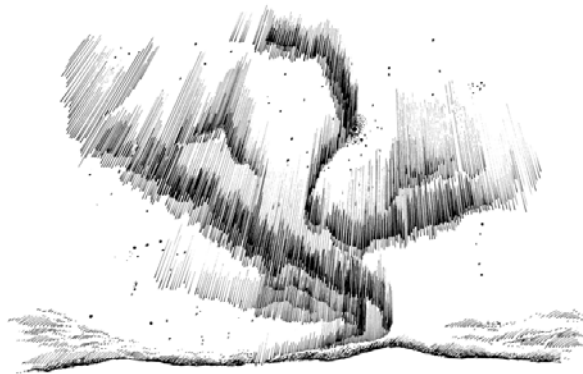


# *TEORIE PLAZMATU*



**STUDIJNÍ TEXT PRO FJFI ČVUT**

**PETR KULHÁNEK**

**PRAHA 2008**

**FJFI ČVUT**

## PŘEDMLUVA

O plazmatu se často hovoří jako o čtvrtém skupenství hmoty. A je to oprávněné, protože vlastnosti plazmatu jsou velmi odlišné od vlastností plynů a kapalin. Především zde hraje roli přítomnost volných nosičů náboje, které mohou reagovat na elektrická a magnetická pole a vzájemná interakce nábojů vede ke vzniku globálních kolektivních polí. Chování plazmatu je tak především ovlivněno elektrickými a magnetickými poli.

Ve vesmíru je 99% veškeré hmoty ionizováno a nachází se ve formě plazmatu. Plazmatem je tvořeno nitro i obálky hvězd, mlhoviny, výtrysky, atd. Na Zemi se s plazmatem setkáme v kanálech blesků, v ionosféře, v podobě slunečního větru, který neustále atakuje magnetické pole Země, a samozřejmě plazma nalezneme v laboratořích výzkumných ústavů.

Plazma je charakteristické lineárními a plošnými útvary (pinči a stěnami) drženými vlastním magnetickým polem, které vzniká protékajícím proudem. Nabití částice mohou jednat rotovat kolem magnetických siločar a jednat driftovat napříč magnetickému a nějakému dalšímu poli. V oblastech intenzivnějšího magnetického pole se mohou odrážet, takový jev nazýváme magnetické zrcadlo.

V plazmatu existuje neuvěřitelné množství modů různých nízkofrekvenčních i vysokofrekvenčních vln. Šíření zvukových i elektromagnetických vln přítomnost plazmatu velmi výrazně ovlivní. Pro plazma je charakteristická řada nestabilit, se kterými se dlouhá léta potýkají konstruktéři termojaderných reaktorů. Neméně zajímavé jsou nelineární jevy v plazmatu.

Z široké škály jevů v plazmatu se některými z nich budeme zabývat v tomto sylabu. U takto obsažené problematiky půjde vždy jen o úzký výběr silně ovlivněný autorem. Proto by text měl být především úvodem k dalšímu samostatnému studiu. Přeji čtenářům rychlé pochopení probíraných jevů, v případě nejasností mě kontaktujte, neboť nemusí jít o chybu vaší úvahy, ale o chybu v textu nebo závadu v mé hlavě.

Části textu vznikaly od roku 2002 na půdě FEL ČVUT jako sylabus pro doktorské studenty, podnět na FEL ale nebylo teorii příliš nakloněno. V říjnu 2007 jsem začal přednášet Teorii plazmatu na FJFI a text průběžně sestavovat z minulých i nových textů podle osnov této nové přednášky.

Ještě dvě technické poznámky na závěr.

- 1) V textu je frekvencí dějů automaticky myšlena úhlová frekvence, která je součástí relativistického čtyřvektoru a je snadno transformovatelná do jiné souřadnicové soustavy.
- 2) V textu platí sčítací konvence pro indexy psané latinkou ( $i, j, k, \dots$ ). Neplatí pro řecké indexy popisující druh částic v plazmatu. Pokud bylo třeba psát index do horní části symbolu, je umístěn v závorce, aby se odlišil od mocniny. Šikmo jsou sázeny proměnné, do kterých lze dosadit. Základním řezem jsou sázeny symboly, do kterých nelze dosadit (zkratky, číselné hodnoty, jednotky). Vektory a tenzory jsou sázeny tučným řezem písma. Tam, kde by čtenář mohl být zmaten, je pro jistotu nad symbolem vektoru umístěna šipka.

Aktuální verzi sylabu naleznete na adrese: <http://www.aldebaran.cz/studium/fpla.pdf>.

2. 10. 2007, Petr Kulhánek

[www.aldebaran.cz](http://www.aldebaran.cz)

# OBSAH

<b>TEORIE PLAZMATU I (ÚVOD DO FYZIKY PLAZMATU)</b>	<b>6</b>
<b>1. POHYBY NABITÝCH ČÁSTIC</b>	<b>6</b>
1.1. NERELATIVISTICKÉ POHYBY	6
1.1.1 Lagrangeova a Hamiltonova funkce	6
1.1.2 Pohyb v elektrickém poli, optická analogie	8
1.1.3 Pohyb v homogenním magnetickém poli	8
1.1.4 Pohyb ve zkřížených polích	10
1.2. RELATIVISTICKÉ POHYBY	13
1.2.1 Lagrangeova a Hamiltonova funkce	13
1.2.2 Pohyb v homogenním elektrickém poli	14
1.3. ADIABATICKÉ PŘIBLÍŽENÍ	16
1.3.1 První adiabatický invariant	16
1.3.2 Pohyb gyračního středu	17
1.3.3 Síla $-\mu \nabla B$	19
1.3.4 Driftová rovnice	20
1.3.5 Drifty	21
1.4. POHYBY VE SPECIÁLNÍCH KONFIGURACÍCH	23
1.4.1 Magnetické zrcadlo	23
1.4.2 Druhý adiabatický invariant, Fermiho mechanismus	24
1.4.3 Magnetický dipól	26
1.4.4 Elektrický a magnetický monopól	27
1.4.5 Tokamak	28
1.4.6 Plazmové vlákno, souvislost s tekutinovým modelem	31
<b>2. STATISTICKÝ PŘÍSTUP – NEROVNOVÁŽNÁ STATISTIKA</b>	<b>33</b>
2.1. BOLTZMANNOVA ROVNICE	33
2.1.1 Různé varianty Boltzmannovy rovnice	33
2.1.2 Boltzmannův srážkový člen	36
2.1.3 Rovnice přenosu (momentová rovnice)	39
2.2. PŘECHOD OD STATISTIKY KE KONTINUU	42
2.2.1 Nulý moment (zachování hmoty, náboje a počtu částic) – částicová část	42
2.2.2 Nulý moment – polní část	43
2.2.3 První moment (zachování hybnosti) – částicová část	43
2.2.4 První moment (zachování hybnosti) – polní část	45
2.2.5 Druhý moment (zachování energie) – částicová část	47
2.2.6 Druhý moment (zachování energie) – polní část	47
2.3. JEDNODUCHÉ TRANSPORTNÍ JEVY	49
2.3.1 Transport náboje (Ohmův zákon)	49
2.3.2 Transport částic (Fickův zákon)	51
2.3.3 Transport tepla (Fourierův zákon)	52
2.3.4 Ambipolární difúze	53
2.3.5 Difúze v magnetickém poli	54
2.3.6 Produkce entropie, Onsagerovy relace reciprocity	56
2.4. COULOMBICKÁ INTERAKCE	58
2.4.1 Debyeova stínící vzdálenost	58
2.4.2 Coulombický rozptyl (Rutherfordova formule)	59
2.4.3 Fokkerova-Planckova rovnice	61
2.4.4 Rosenbluthovy potenciály	63
2.4.5 Brzděná a ubíhající testovací částice	68
2.4.6 Relaxační časy a srážkové frekvence	72

<b>3. TEKUTINOVÝ PŘÍSTUP – MAGNETOHDRODYNAMIKA</b>	<b>73</b>
3.1. ODVOZENÍ ROVNIC NERELATIVISTICKÉ MAGNETOHDRODYNAMIKY	73
3.1.1 Rovnice pro magnetické pole a vektorový potenciál	75
3.1.2 Rovnice pro hustotu	81
3.1.3 Rovnice pro rychlost	82
3.1.4 Uzavření soustavy	86
3.2. VYBRANÉ JEVY Z MAGNETOHDRODYNAMIKY	88
3.2.1 Hartmannovo řešení	88
3.2.2 Vlny konečné amplitudy	90
3.2.3 Helicita	92
3.2.4 Přepojení magnetických silokřivek	97
3.2.5 Tekutinové dynamo	101
3.3. NĚKTERÉ ROVNOVÁŽNÉ KONFIGURACE V PLAZMATU	108
3.3.1 Rovnováha v plazmatu	108
3.3.2 Proudové vlákno (pinč)	108
3.3.3 Proudová stěna	112
3.3.4 Dvojvrstva	113
3.3.5 Rázové vlny	118
<b>TEORIE PLAZMATU II (VLNY A NESTABILITY)</b>	<b>120</b>
<b>4. LINEÁRNÍ VLNY V PLAZMATU</b>	<b>120</b>
4.1. ZÁKLADNÍ POJMY	120
4.1.1 Vlnění	120
4.1.2 Rozměrová analýza (vlny na hluboké vodě)	124
4.1.3 Lineární teorie (elektromagnetické vlny)	126
4.1.4 Nelineární teorie (zvukové vlny)	129
4.1.5 Další příklady (Jeansovo kritérium, vlnová, KG a telegrafní rovnice)	132
4.2. PLAZMOVÉ OSCILACE A VLNY	138
4.2.1 Odvození disperzní relace	138
4.2.2 Plazmové oscilace	140
4.2.3 Plazmové vlny	140
4.2.4 Iontové vlny	142
4.2.5 Další vlivy	143
4.3. MAGNETOAKUSTICKÉ VLNY	144
4.3.1 Odvození disperzní relace	144
4.3.2 Vlnoplochy magnetoakustických vln	146
4.3.3 Směry vektorů v magnetoakustických vlnách	147
4.4. ELEKTROMAGNETICKÉ VLNY	148
4.4.1 Odvození disperzní relace	148
4.4.2 Komplex elektromagnetických vln, CMA diagram	150
4.4.3 Stixovy koeficienty	155
4.4.4 Faradayova rotace	156
4.4.5 Hvizdy (whistlers)	157
4.4.6 Tenzor permitivity pro elektromagnetické vlny v plazmatu	160
<b>5. NĚKTERÉ NESTABILITY V PLAZMATU</b>	<b>162</b>
5.1 NEOMEZENÉ CHLADNÉ PLAZMA	162
5.1.1 Základní pojmy	162
5.1.2 Vícesvazková nestabilita	164
5.1.3 Dva symetrické svazky	166
5.1.4 Nestabilita typu svazek-plazma	168
5.1.5 Další nestability (driftová, Weibelova)	168

5.2 PLAZMA S HRANICÍ	169
5.2.1 Základní vztahy	169
5.2.2 Navazování vektorových a skalárních polí na hranici	173
5.2.3 Nestability plazmového vlákna	174
5.2.4 Rayleighova-Taylorova nestabilita	180
5.2.5 Kelvinova-Helmholtzova nestabilita	180
5.2.6 Další nestability	180
5.3 REZISTIVNÍ NESTABILITY	181
5.3.1 Základní vztahy	181
5.3.2 Ostrůvková (tearing) nestabilita	184
5.3.3 Řízené rezistivní nestability	185
5.3.4 Tokamakové nestability	185
5.4 MIKRONESTABILITY	187
5.4.1 Základní vztahy	187
5.4.2 Landauův útlum na elektronech	187
5.4.3 Landauův útlum na iontech	193
5.4.4 Bernsteinovy módy	193
5.4.5 Parametrické nestability	193
5.4.6 Modulační nestability	193
<b>DODATEK A – UŽITEČNÉ VZTAHY</b>	<b>194</b>
A1. Některé integrály a řady	194
A2. Vektorový součin a některé vektorové identity	195
A3. Základní vztahy z komplexní analýzy	196
A4. Některé speciální funkce	197
A5. Výpočet Rosenbluthových potenciálů pro Maxwellovo rozdělení rychlostí	201
<b>DODATEK B – ZOBECNĚNÉ FUNKCE</b>	<b>203</b>
B1. Diracova distribuce	203
B2. Konvoluce	205
B3. Greenův operátor a Greenova funkce	206
<b>DODATEK C – KŘIVOČARÉ SOUŘADNICE, KŘIVKOVÉ, PLOŠNÉ A OBJEMOVÉ INTEGRÁLY</b>	<b>208</b>
C1. Křivočaré souřadnice	208
C2. Křivkové, plošné a objemové integrály	209
<b>DODATEK D – PŘEHLED VZTAHŮ A DEFINIC Z PLAZMATU</b>	<b>210</b>
D1. Základní vztahy	210
D2. Bezrozměrné charakteristiky plazmatu	212
D3. Potenciály elektromagnetického pole	213
<b>DODATEK E – MULTIPÓLOVÝ ROZVOJ</b>	<b>215</b>
E1. Rozvoj potenciálu elektrického pole	215
E2. Rozvoj potenciálu magnetického pole	215
<b>REJSTRÍK NĚKTERÝCH FYZIKŮ A MATEMATIKŮ ZMÍNĚNÝCH V TEXTU</b>	<b>216</b>
<b>LITERATURA</b>	<b>221</b>

## TEORIE PLAZMATU I (ÚVOD DO FYZIKY PLAZMATU)

Předtím, než se pustíte do studia teorie plazmatu, měli byste se seznámit se základy teoretické mechaniky [1], umět něco málo z kvantové teorie [2], termodynamiky a statistické fyziky [3] a základů teorie elektromagnetického pole [16]. Nejvíce budete potřebovat Lagrangeovy a Hamiltonovy rovnice a základy rovnovážné statistické fyziky. V první části teorie plazmatu se budeme zabývat nejprve pohyby jednotlivých částic, poté statistickým přístupem k plazmatu a nakonec plazmatem jako vodivou tekutinou. Druhá část (Teorie plazmatu II) bude věnována vlnám a nestabilitám v plazmatu. V třetí části (Teorie plazmatu III) se budeme věnovat záření plazmatu a solitonům.

### 1. POHYBY NABITÝCH ČÁSTIC

V celé této kapitole budeme počítat pohyby částic ve vnějších, předem daných polích. Předpokládáme tedy, že

1. částice vzájemně neinteragují,
2. vlastní pole částic jsou zanedbatelná.

Elektrická a magnetická pole můžeme popsat buď elektrickou intenzitou  $\mathbf{E}$  a magnetickou indukcí  $\mathbf{B}$  nebo za pomoci čtyřpotenciálu  $(\phi, \mathbf{A})$ . Převodní vztahy jsou

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \phi, \quad (1.1)$$

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}. \quad (1.2)$$

Zde předpokládáme, že  $\phi(t, \mathbf{x})$  a  $\mathbf{A}(t, \mathbf{x})$  jsou předem dané funkce.

### 1.1. Nerelativistické pohyby

#### 1.1.1 Lagrangeova a Hamiltonova funkce

Problematika pohybu nabitých částic v elektromagnetických polích je dána Lagrangeovou funkcí

$$L = L_{\text{částice}} + L_{\text{int}} + L_{\text{pole}}. \quad (1.3)$$

V našem přiblížení jsou pole pevně dána a nebudeme je počítat, proto je polní část Lagrangeovy funkce nulová. Pokud budeme uvažovat jen elektrické pole, které je potenciální, bude Lagrangeova funkce dána vztahem

$$L = \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 - Q\phi. \quad (1.4)$$

Tvar je shodný s klasickou mechanikou [1], kde je Lagrangeova funkce dána rozdílem kinetické a potenciální energie  $L = T - V$ . Kinetická energie představuje Lagrangeovu funkci volné částice  $L_{\text{částice}}$  a potenciální energie Lagrangeovu funkci interakce s elektrickým polem  $L_{\text{int}}$ . V přítomnosti magnetického pole, které není potenciální, musí mít interakční lagranžian další člen. Ten bude nějakou funkcí čtyřvektoru toku náboje pro jedinou částici (charakterizuje částice) a čtyřvektoru potenciálů pole (charakterizuje pole):

$$j_{\mu} = \begin{pmatrix} c\rho_Q \\ \mathbf{j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cQ\delta(\mathbf{x}' - \mathbf{x}) \\ Q\mathbf{v}\delta(\mathbf{x}' - \mathbf{x}) \end{pmatrix}; \quad A_{\mu} = \begin{pmatrix} \phi/c \\ \mathbf{A} \end{pmatrix}.$$

Lagrangeova funkce by měla být skalárem, jedinou kombinací připadající v úvahu je tedy veličina úměrná skalárnímu součinu obou čtyřvektorů integrovanému přes objem (bez integrace přes objem bychom dostali veličinu úměrnou hustotě Lagrangeovy funkce):

$$\int (j \cdot A) d^3 \mathbf{x}' = \int (-Q\phi + Q\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}) \delta(\mathbf{x}' - \mathbf{x}) d^3 \mathbf{x}' = -Q\phi + Q\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}.$$

Z uvedeného vztahu je již jasná chybějící část ve vztahu (1.4), správná Lagrangeova funkce pro nerelativistický pohyb částic v elektrickém a magnetickém poli bude

$$L = \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 - Q\phi + Q\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}.$$

Standardními postupy určíme zobecněnou hybnost, zobecněnou energii a po vyloučení rychlosti z obou vztahů Hamiltonovu funkci. Všechny důležité vztahy jsou:

$$L = \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 - Q\phi + Q\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}, \quad (1.5)$$

$$\mathbf{p} \equiv \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = m \mathbf{v} + Q\mathbf{A}, \quad (1.6)$$

$$\mathcal{E} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} \cdot \mathbf{v} - L = \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 + Q\phi, \quad (1.7)$$

$$H = \frac{(\mathbf{p} - Q\mathbf{A})^2}{2m} + Q\phi. \quad (1.8)$$

**Pozn. 1:** Energii budeme v této kapitole značit  $\mathcal{E}$ , abychom ji odlišili od intenzity elektrického pole  $\mathbf{E}$ .

**Pozn. 2:** Zobecněná hybnost není součinem hmotnosti a rychlosti jako v klasické mechanice!

**Pozn. 3:** Energie nezávisí na  $\mathbf{A}$ , magnetické pole totiž nemění energii, ale jen směr rychlosti.

Ukažme, že příslušné Lagrangeovy rovnice jsou totožné s Lorentzovou rovnicí pro pohyb nabitě částice. Ve složkách máme

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} m v_j v_j - Q\phi(t, \mathbf{x}) + QA_j(t, \mathbf{x}) v_j; \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} &= 0, \\ \frac{d}{dt} (m v_i + QA_i) + Q \frac{\partial \phi}{\partial x_i} - Q \frac{\partial A_j}{\partial x_i} v_j &= 0, \\ \frac{d}{dt} (m v_i) + Q \frac{\partial A_i}{\partial t} + Q \frac{\partial A_i}{\partial x_j} \frac{dx_j}{dt} + Q \frac{\partial \phi}{\partial x_i} - Q \frac{\partial A_j}{\partial x_i} v_j &= 0, \\ \frac{d}{dt} (m v_i) &= Q \left[ -\frac{\partial A_i}{\partial t} - \frac{\partial \phi}{\partial x_i} + v_j \left( \frac{\partial A_j}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_j} \right) \right]. \end{aligned}$$

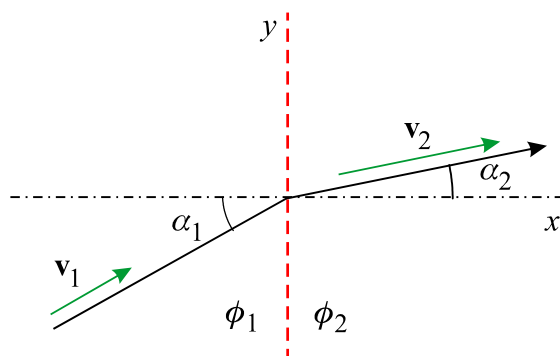
Poslední část v hranaté závorce lze upravit pomocí Levi-Civita tenzoru do tvaru (A.18)

$$\frac{d}{dt} (m \mathbf{v}) = Q \left[ -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{A} \right] \Rightarrow \frac{d}{dt} (m \mathbf{v}) = Q [\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}],$$

což je známá Lorentzova pohybová rovnice.

### 1.1.2 Pohyb v elektrickém poli, optická analogie

Pokud se nabitá částice pohybuje jen v homogenním elektrickém poli, nelze situaci řešit nerelativisticky. Elektrické pole by částici urychlovalo nade všechny meze, což je v rozporu se speciální relativitou. Můžeme ale řešit situaci, kdy je elektrické pole nenulové jen v malé oblasti prostoru, například v nějaké stěně. Idealizovaným případem je rázová vlna se skokem elektrického potenciálu (tzv. dvojrvtva, podrobněji viz kapitola 3.3.4).



V obou polorovinách je potenciál konstantní a tedy elektrické pole nulové. Nabitá částice se proto pohybuje rovnoměrně přímočaře. K jedinému urychlení dochází na rozhraní, a to ve směru osy  $x$ . Složka rychlosti ve směru osy  $y$  se nemění, žádné pole v tomto směru nepůsobí. Tečná složka rychlosti je proto spojitá

$$v_1 \sin \alpha_1 = v_2 \sin \alpha_2. \quad (1.9)$$

Při pohybu nabitě částice se bude zachovávat energie (1.7):

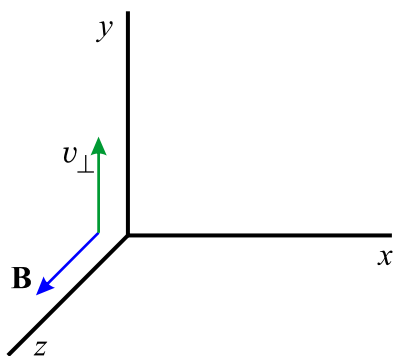
$$\frac{1}{2} m v_1^2 + Q \phi_1 = \frac{1}{2} m v_2^2 + Q \phi_2 = \mathcal{E}. \quad (1.10)$$

Pokud z posledního vztahu vypočteme rychlosti a dosadíme do (1.9), dostaneme

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \sqrt{\frac{\mathcal{E} - Q\phi_1}{\mathcal{E} - Q\phi_2}} = \sqrt{\frac{Q\phi_\infty - Q\phi_1}{Q\phi_\infty - Q\phi_2}} = \sqrt{\frac{\phi_\infty - \phi_1}{\phi_\infty - \phi_2}} = \sqrt{\frac{U_1}{U_2}}. \quad (1.11)$$

Uvedenému vztahu se říká *optická analogie pohybu částice v elektrickém poli*. Svým tvarem připomíná Snellův zákon lomu.

### 1.1.3 Pohyb v homogenním magnetickém poli



$$\begin{aligned} \mathbf{E} = (0, 0, 0) &\Rightarrow \phi = 0, \\ &\mathbf{A} = (-B y, 0, 0) \quad \text{nebo} \\ \mathbf{B} = (0, 0, B) &\Rightarrow \mathbf{A} = (0, B x, 0) \quad \text{nebo} \\ &\mathbf{A} = 1/2 (-B y, B x, 0) \end{aligned}$$

počáteční podmínky:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(0) &= (0, 0, 0), \\ \mathbf{p}(0) &= (0, m v_\perp, 0). \end{aligned}$$

Hodnota vektorového potenciálu  $\mathbf{A}$  plyne ze vztahu (1.2). Pro vektorový potenciál  $\mathbf{A}$  budeme používat druhé z uvedených možných vyjádření. Potenciály elektrických a magnetických polí pro typické konfigurace naleznete v dodatku D3. Zobecněná hybnost je v našem případě dána vztahem  $\mathbf{p} = m\mathbf{v} + Q\mathbf{A}$ . Pro Hamiltonovu funkci platí



$$H = \frac{(\mathbf{p} - Q\mathbf{A})^2}{2m} + Q\phi = \frac{p_x^2 + (p_y - QBx)^2 + p_z^2}{2m}$$

a Hamiltonovy rovnice jsou

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{p_x}{m}, \quad (1.12)$$

$$\dot{y} = \frac{\partial H}{\partial p_y} = \frac{p_y - QBx}{m}, \quad (1.13)$$

$$\dot{z} = \frac{\partial H}{\partial p_z} = \frac{p_z}{m}, \quad (1.14)$$

$$\dot{p}_x = -\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{QB(p_y - QBx)}{m}, \quad (1.15)$$

$$\dot{p}_y = -\frac{\partial H}{\partial y} = 0, \quad (1.16)$$

$$\dot{p}_z = -\frac{\partial H}{\partial z} = 0. \quad (1.17)$$

Z rovnic (1.16), (1.17) máme ihned

$$p_y(t) = p_y(0) = mv_{\perp},$$

$$p_z(t) = p_z(0) = 0.$$

Tyto výrazy spolu s  $p_x$  vyjádřeným z (1.12) dosadíme do (1.15) a získáme tak rovnici

$$\ddot{x} + \left(\frac{QB}{m}\right)^2 x = \frac{QBv_{\perp}}{m}$$

pro proměnnou  $x$ . Po jejím vyřešení (je součtem homogenního a partikulárního) známe závislost  $x(t)$  a můžeme již přímo integrovat rovnice (1.13), (1.14). Výsledné řešení má tvar

$$\begin{aligned} x(t) &= R_L - R_L \cos \omega_c t, \\ y(t) &= R_L \sin \omega_c t, \\ z(t) &= 0, \end{aligned} \quad (1.18)$$

kde jsme označili

$$R_L \equiv \frac{mv_{\perp}}{QB} \quad ; \quad \omega_c \equiv \frac{QB}{m} \quad (1.19)$$

tzv. Larmorův poloměr  $R_L$  a cyklotronní frekvenci  $\omega_c$ . Trajektorii získáme vyloučením času z (1.18):

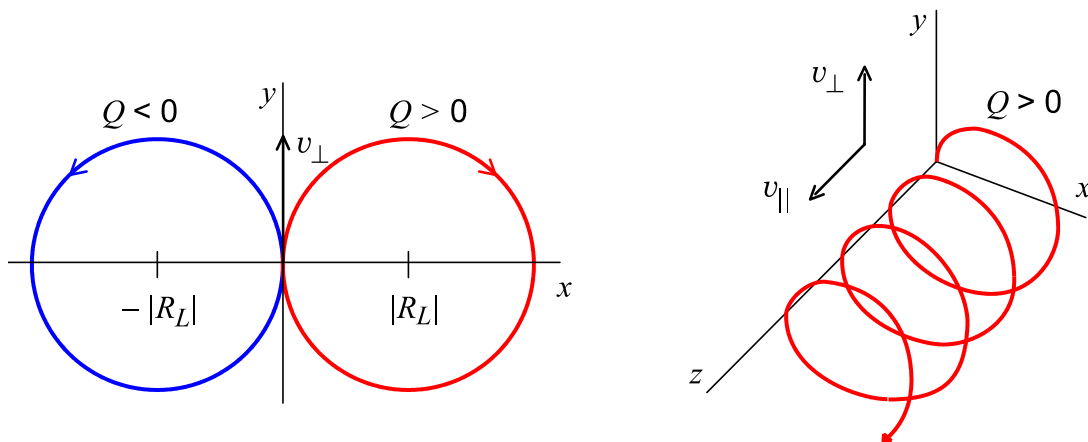
$$(x - R_L)^2 + y^2 = R_L^2. \quad (1.20)$$

Vidíme, že pohyb se děje po kružnici s poloměrem  $R_L$  a se středem  $S = [R_L, 0]$ .

Magnetické pole nepůsobí na pohyb částice ve směru podél pole. Kolmo na směr pole působí Lorentzova síla, která zakřivuje trajektorii částice na kružnici. Při nenulové počáteční

rychlosti  $v_z(0)$  je pohyb částice složen z rovnoměrného přímočarého pohybu podél pole a Larmorovy rotace (tzv. *gyrace*), tím vzniká pohyb po šroubovici.

Samotné elektrické pole naopak nepůsobí na pohyb částice napříč pole (v nerelativistickém případě) nebo jen velmi málo (v relativistickém případě). Ve směru pole dochází k urychlování.



**Poznámka :** Výpočet Larmorovského pohybu lze také provést přímo z Lorentzovy pohybové rovnice  $m\ddot{\mathbf{r}} = Q\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}$ . Složka z opět vede na volný pohyb. Ve složce x a y dostáváme

$$\ddot{x} = \frac{QB}{m} B\dot{y}, \tag{1.21}$$

$$\ddot{y} = -\frac{QB}{m} B\dot{x}. \tag{1.22}$$

Obě rovnice je možné řešit různými způsoby. Asi nejrychleji k cíli vede postup Landauův postup: druhou rovnici přenásobíme komplexní jednotkou a sečteme s první. Kombinaci  $QB/m$  označíme jako cyklotronní frekvenci:

$$\ddot{x} + i\ddot{y} = -i\omega_c B(\dot{x} + i\dot{y}) \tag{1.23}$$

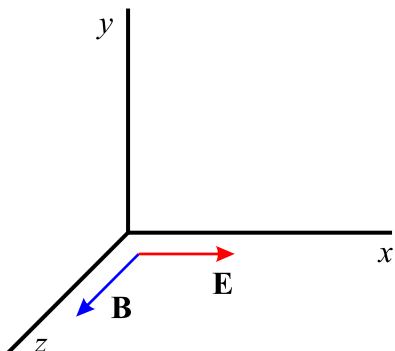
Nyní stačí zavést komplexní proměnnou  $\xi \equiv x + iy$  a řešit jednoduchou rovnici

$$\ddot{\xi} = -i\omega_c B \dot{\xi} \tag{1.24}$$

v komplexním oboru. Po nalezení integračních konstant získáme řešení pro x a y oddělením reálné a imaginární části řešení.

### 1.1.4 Pohyb ve zkřížených polích

Řešme nyní pohyb v homogenním magnetickém poli a na něho kolmém poli elektrickém:



$$\begin{aligned} \mathbf{E} = (E, 0, 0) &\Rightarrow \phi = -Ex, \\ &\mathbf{A} = (-By, 0, 0) \text{ nebo} \\ \mathbf{B} = (0, 0, B) &\Rightarrow \mathbf{A} = (0, Bx, 0) \text{ nebo} \\ &\mathbf{A} = 1/2 (-By, Bx, 0) \end{aligned}$$

počáteční podmínky:

$$\mathbf{x}(0) = (0, 0, 0),$$

$$\mathbf{p}(0) = (0, 0, 0).$$

Nabitou částicí vložíme do počátku souřadnicové soustavy s nulovou rychlostí. Pro vektorový potenciál  $\mathbf{A}$  budeme používat druhé z uvedených možných vyjádření.

Zobecněná hybnost je opět  $\mathbf{p} = m\mathbf{v} + Q\mathbf{A}$ . Pro Hamiltonovu funkci platí

$$H = \frac{(\mathbf{p} - Q\mathbf{A})^2}{2m} + Q\phi = \frac{p_x^2 + (p_y - QBx)^2 + p_z^2}{2m} - QE x$$

a Hamiltonovy rovnice jsou

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{p_x}{m}, \quad (1.25)$$

$$\dot{y} = \frac{\partial H}{\partial p_y} = \frac{p_y - QBx}{m}, \quad (1.26)$$

$$\dot{z} = \frac{\partial H}{\partial p_z} = \frac{p_z}{m}, \quad (1.27)$$

$$\dot{p}_x = \frac{\partial H}{\partial x} = \frac{QB(p_y - QBx)}{m} + QE, \quad (1.28)$$

$$\dot{p}_y = -\frac{\partial H}{\partial y} = 0, \quad (1.29)$$

$$\dot{p}_z = -\frac{\partial H}{\partial z} = 0. \quad (1.30)$$

Postupem zcela analogickým předešlému příkladu získáme řešení

$$\begin{aligned} x(t) &= R_D - R_D \cos \omega_c t, \\ y(t) &= R_D \sin \omega_c t - v_D t, \\ z(t) &= 0, \end{aligned} \quad (1.31)$$

kde jsme označili

$$\omega_c \equiv \frac{QB}{m} \quad ; \quad v_D \equiv \frac{E}{B} \quad ; \quad R_D \equiv \frac{m v_D}{QB} \quad (1.32)$$

tzv. cyklotronní frekvenci  $\omega_c$ , driftovou rychlost  $v_D$  a driftový poloměr  $R_D$ . Rovnice trajektorie má po částečném vyloučení času z rovnic (1.31) tvar

$$(x - R_D)^2 + (y + v_D t)^2 = R_D^2. \quad (1.33)$$

Jde tedy o pohyb po kružnici s poloměrem  $R_D$ , jejíž střed  $S = [R_D, -v_D t]$  se pohybuje konstantní driftovou rychlostí  $v_D$  kolmo na elektrické i magnetické pole. Pro nulovou počáteční rychlost platí vztah plynoucí okamžitě z definic (1.32)

$$v_D = \omega_c R_D \quad (1.34)$$

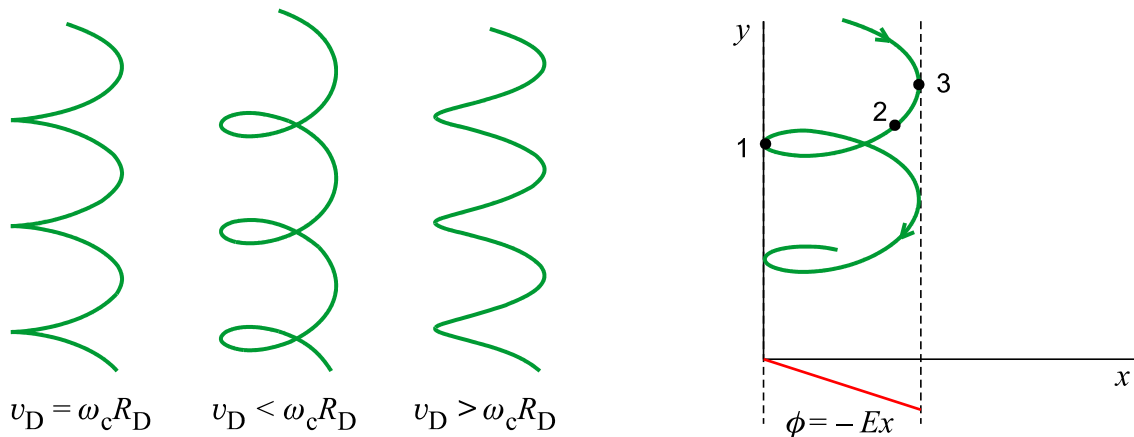
a výsledná křivka (1.33) se nazývá cykloida. Pro nenulovou počáteční rychlost již neplatí (1.34) a pohyb probíhá po obecnější křivce, tzv. trochoidě:

$$\begin{aligned}x(t) &= R_D - R_D \cos \omega_c t, \\y(t) &= R_D \sin \omega_c t - v_D t, \\z(t) &= v_{0z} t,\end{aligned}\tag{1.35}$$

kde se driftový poloměr změnil na

$$R_D = \frac{m}{QB} \sqrt{v_{0x}^2 + (v_{0y} + v_D)^2}.\tag{1.36}$$

Pro  $v_{0z} = 0$  se pohyb opět děje po kružnici s pohybujícím se středem  $S = [R_D, -v_D t]$ . Pro  $Q > 0$  mají trochoidy tvar:



V bodech trajektorie 1, 2, 3 má částice různou potenciální energii

$$\phi = -Ex \quad \Rightarrow \quad \phi_1 > \phi_2 > \phi_3.$$

a vzhledem k zákonu zachování energie i různou rychlost

$$\frac{1}{2}mv^2 + Q\phi = \text{const} \quad \Rightarrow \quad v_1 < v_2 < v_3.$$

a tím i různý Larmorův poloměr:

$$R_L = \frac{mv}{QB} \quad \Rightarrow \quad R_{L1} < R_{L2} < R_{L3}.$$

Trochoidální trajektorii částice lze tedy interpretovat jako pohyb po kružnici s proměnným poloměrem. Na následujícím obrázku jsou typické stopy nabitých částic v mlžné komoře.



## 1.2. Relativistické pohyby

### 1.2.1 Lagrangeova a Hamiltonova funkce

V Lagrangeově funkci (1.5) je správně relativisticky zapsána interakční část. Lagrangeova funkce pro volnou částici ale není ve shodě se speciální relativitou; ta by měla být nějakou funkcí relativistického invariantu

$$ds^2 \equiv -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 = -c^2 dt^2 \left( 1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2} \right).$$

Je zřejmé, že by mělo být  $L dt \sim \sqrt{-ds^2} = -c \sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2} dt$ , tj.

$$L_{\text{částice}} = \alpha \sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2}.$$

Koeficient úměrnosti  $\alpha$  určíme tak, aby v limitě malých rychlostí výraz přešel v Lagrangeovu funkci  $m_0 \mathbf{v}^2/2$  pro nerelativistickou částici ( $m_0$  je klidová hmotnost částice):

$$L_{\text{částice}} = \alpha \sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2} \approx \alpha \left( 1 - \frac{\mathbf{v}^2}{2c^2} \right) = \alpha - \alpha \frac{\mathbf{v}^2}{2c^2} \quad \Rightarrow \quad \alpha = -m_0 c^2.$$

Posunutí o konstantu není podstatné. Výsledná Lagrangeova funkce pro relativistické pohyby nabitých částic v elektrických a magnetických polích tedy je

$$L = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2} - Q\phi + Q\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} \quad (1.37)$$

Standardním způsobem určíme hybnost a energii:

$$\mathbf{p} \equiv \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = \frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2}} + Q\mathbf{A}, \quad (1.38)$$

$$\mathcal{E} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} \cdot \mathbf{v} - L = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2}} + Q\phi. \quad (1.39)$$

Povšimněte si, že zavedeme-li tzv. „pohybovou“ hmotnost

$$m \equiv \frac{m_0}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2}}, \quad (1.40)$$

získají vztahy pro hybnost a energii jednoduchý a srozumitelný tvar

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} + Q\mathbf{A}; \quad \mathcal{E} = mc^2 + Q\phi. \quad (1.41)$$

Posledním krokem bude odvození Hamiltonovy funkce. Z klasické mechaniky víme, že je vždy možné nalézt Legendreovu duální transformaci, tj. z výrazů (1.38) a (1.39) vyloučit rychlost. Nejjednodušším postupem je ponechat na pravé straně výrazů jen odmocniny a rovnice umocnit na druhou:

$$\begin{aligned} (\mathbf{p} - Q\mathbf{A})^2 &= \frac{m_0^2 \mathbf{v}^2}{1 - \mathbf{v}^2/c^2}; \\ \frac{1}{c^2} (\mathcal{E} - Q\phi)^2 &= \frac{m_0^2 c^2}{1 - \mathbf{v}^2/c^2}. \end{aligned}$$

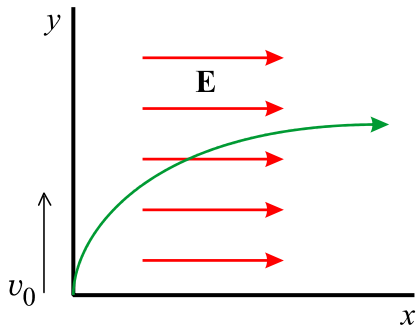
Odečteme-li nyní obě rovnice od sebe, vykrátí se čítec se jmenovatelem a na pravé straně zmizí závislost na rychlosti:

$$\frac{1}{c^2}(\mathcal{E} - Q\phi)^2 - (\mathbf{p} - Q\mathbf{A})^2 = m_0^2 c^2.$$

V tuto chvíli již stačí jen dopočítat energii a označit ji jako Hamiltonovu funkci:

$$H = c\sqrt{m_0^2 c^2 + (\mathbf{p} - Q\mathbf{A})^2} + Q\phi. \quad (1.42)$$

### 1.2.2 Pohyb v homogenním elektrickém poli



$$\mathbf{E} = (E, 0, 0) \Rightarrow \phi = -Ex,$$

$$\mathbf{B} = (0, 0, 0) \Rightarrow \mathbf{A} = 0;$$

počáteční podmínky:

$$\mathbf{x}(0) = (0, 0, 0),$$

$$\mathbf{p}(0) = (0, p_0, 0), \text{ kde } p_0 \equiv mv_0 / \sqrt{1 - v_0^2/c^2}.$$

Úlohu budeme řešit jako rovinný problém. Hodnota potenciálu  $\phi$  plyne ze vztahu (1.1) pro  $\mathbf{A} = 0$ . Hamiltonova funkce problému je

$$H = c\sqrt{m_0^2 c^2 + (\mathbf{p} - Q\mathbf{A})^2} + Q\phi = c\sqrt{m_0^2 c^2 + p_x^2 + p_y^2} - QEx,$$

a příslušné Hamiltonovy rovnice mají tvar

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{cp_x}{\sqrt{m_0^2 c^2 + p_x^2 + p_y^2}}, \quad (1.43)$$

$$\dot{y} = \frac{\partial H}{\partial p_y} = \frac{cp_y}{\sqrt{m_0^2 c^2 + p_x^2 + p_y^2}}, \quad (1.44)$$

$$\dot{p}_x = -\frac{\partial H}{\partial x} = QE, \quad (1.45)$$

$$\dot{p}_y = -\frac{\partial H}{\partial y} = 0. \quad (1.46)$$

Integrací rovnic (1.45), (1.46) dostaneme

$$p_x(t) = QEt,$$

$$p_y(t) = p_y(0) = \text{const} = p_0.$$

Toto řešení dosadíme do rovnic (1.43), (1.44) a integrujeme:

$$x(t) = \int_0^t \frac{cp_x}{\sqrt{m_0^2 c^2 + p_x^2 + p_y^2}} dt' = c \int_0^t \frac{QEt}{\sqrt{\pi_0^2 + (QEt')^2}} dt' = \frac{c}{QE} \left( \sqrt{\pi_0^2 + (QEt)^2} - \pi_0 \right),$$

$$y(t) = \int_0^t \frac{cp_y}{\sqrt{m_0^2 c^2 + p_x^2 + p_y^2}} dt' = c \int_0^t \frac{p_0}{\sqrt{\pi_0^2 + (QEt)^2}} dt' = \frac{p_0 c}{QE} \operatorname{arcsch}\left(\frac{QEt}{\pi_0}\right).$$

Výsledné řešení je tedy dáno vztahy

$$\boxed{\begin{aligned} x(t) &= \frac{\pi_0 c}{QE} \left( \sqrt{1 + (QEt/\pi_0)^2} - 1 \right), \\ y(t) &= \frac{p_0 c}{QE} \operatorname{arcsch}(QEt/\pi_0), \end{aligned}} \quad (1.47)$$

kde jsme označili

$$\boxed{\begin{aligned} p_0 &\equiv m_0 v_0 / \sqrt{1 - v_0^2/c^2}, \\ \pi_0 &\equiv \sqrt{m_0^2 c^2 + p_0^2}. \end{aligned}} \quad (1.48)$$

Proveďme nyní nerelativistickou limitu

$$v \ll c \text{ (tj. } p_0 \ll m_0 c) \Rightarrow \pi_0 \approx m_0 c; \quad p_0 = m_0 v_0, \quad \text{tj.}$$

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{m_0 c^2}{QE} \left( \sqrt{1 + \left(\frac{QEt}{m_0 c}\right)^2} - 1 \right) \approx \frac{m_0 c^2}{QE} \left( 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{QEt}{m_0 c}\right)^2 - 1 \right) = \frac{QE}{2m_0} t^2, \\ y(t) &= \frac{cm_0 v_0}{QE} \operatorname{arcsch}\left(\frac{QEt}{m_0 c}\right) \approx \frac{cm_0 v_0}{QE} \cdot \frac{QEt}{m_0 c} = v_0 t. \end{aligned}$$

Vidíme, že výrazy přecházejí ve známé klasické vztahy – pohyb rovnoměrně zrychlený ve směru pole a pohyb rovnoměrný napříč polem. Současně rychlost ve směru pole  $v_x$  neroste nade všechny meze, tak jako v klasickém případě:

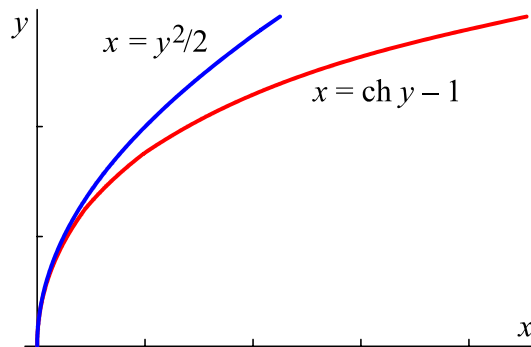
$$\lim_{t \rightarrow \infty} v_x(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{dx}{dt} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{c}{QE} \cdot (QE)^2 \cdot \frac{t}{\sqrt{\pi_0^2 + (QEt)^2}} = c.$$

V libovolném konečném čase  $t$  je vždy  $v_x < c$ .

Vyloučíme-li z (1.47) čas, dostaneme trajektorii částice

$$x = \frac{\pi_0 c}{QE} \left[ \operatorname{ch}\left(\frac{QE}{p_0 c} y\right) - 1 \right]. \quad (1.49)$$

Rozdíl mezi funkcemi  $x = y^2/2$  (klasická trajektorie) a  $x = \operatorname{ch}(y) - 1$  je na obrázku:



### 1.3. Adiabatické přiblížení

Budeme předpokládat, že magnetické pole dominantně ovlivňuje pohyb nabitých částic a základním pohybem je tedy Larmorova rotace neboli gyrace kolem magnetických siločar. V plazmatu mohou být samozřejmě přítomna i další pole, například elektrické a gravitační. V adiabatickém přiblížení předpokládáme, že všechna pole se za jednu Larmorovu otočku změni jen málo. V čase to znamená, že dojde k malé změně polí za dobu jedné otočky částice; v prostoru tato podmínka říká, že se pole změni málo na Larmorově poloměru. Matematicky lze oba předpoklady vyjádřit takto:

$$\left| \frac{\partial F_k}{\partial t} \right| \ll \frac{F}{T}; \quad \left| \frac{\partial F_k}{\partial x_l} \right| \ll \frac{F}{R_L} \quad \text{pro } \forall k, l, \quad (1.50)$$

kde  $\mathbf{F}$  je jakékoli pole ovlivňující pohyb částic. Pole se mohou měnit v čase i prostoru, ale jen v malé míře. Za tohoto předpokladu se zachovávají některé veličiny, z nichž nejdůležitější je první adiabatický invariant. Často budeme potřebovat znát projekci rychlosti částice do směru magnetického pole (ve směru pole je pohyb volný a částice se pohybuje podél siločar) a projekci do směru kolmého na siločar (odpovídá Larmorově rotaci):

$$\mathbf{v}_{\parallel} = \left( \mathbf{v} \cdot \frac{\mathbf{B}}{B} \right) \frac{\mathbf{B}}{B} = \frac{1}{B^2} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{B}; \quad (1.51)$$

$$\mathbf{v}_{\perp} = \mathbf{v} - \mathbf{v}_{\parallel}. \quad (1.52)$$

Rovnoběžnou projekci jsme standardním způsobem rozepsali jako velikost  $\times$  směr.

#### 1.3.1 První adiabatický invariant

Předpokládejme, že se částice pohybuje Larmorovou rotací v pomalu se měnícím magnetickém poli  $\mathbf{B}(t)$ . Spočítáme změnu kinetické energie Larmorovy rotace za jednu otočku:

$$\Delta W_{\perp} = \oint_{\gamma=\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \oint_{\gamma=\partial S} Q\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = Q \int_S (\text{rot } \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{S} = -Q \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} = Q \frac{\partial B}{\partial t} \pi R_L^2.$$

Při odvození jsme využili Stokesovu větu a Faradayův indukční zákon. Vzhledem k tomu, že se pole mění za jednu otočku jen málo, můžeme derivaci pole nahradit jeho změnou za jednu otočku, tedy za periodu:

$$\Delta W_{\perp} \cong Q \frac{\Delta B}{T} \pi R_L^2 = Q \frac{\Delta B}{2\pi/\omega_c} \pi R_L^2.$$

Nyní dosadíme dříve odvozené vztahy pro Larmorův poloměr  $R_L = mv_{\perp}/QB$  a cyklotronní frekvenci  $\omega_c = QB/m$  a dostaneme relaci

$$\Delta W_{\perp} = \frac{mv_{\perp}^2}{2} \frac{\Delta B}{B} = W_{\perp} \frac{\Delta B}{B} \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta W_{\perp}}{W_{\perp}} = \frac{\Delta B}{B} \quad \Rightarrow \quad W_{\perp} \propto B \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\mu \equiv \frac{W_{\perp}}{B} = \frac{mv_{\perp}^2}{2B} = \text{const}}. \quad (1.53)$$

S nárůstem pole tedy úměrně poroste kolmá složka kinetické energie. Veličina  $\mu$  se nazývá první adiabatický invariant a je konstantní pro pomalu se měnící pole.



**Poznámka 1:** Při odvození jsme využili relaci

$$\frac{\Delta W_{\perp}}{W_{\perp}} = \frac{\Delta B}{B} \quad \Leftrightarrow \quad W_{\perp} \propto B,$$

jejíž platnost pro nenulové pole snadno dokážeme diferenciací vztahu  $W_{\perp}/B = \text{const}$ :

$$\frac{B\Delta W_{\perp} - W_{\perp}\Delta B}{B^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad B\Delta W_{\perp} - W_{\perp}\Delta B = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\Delta W_{\perp}}{W_{\perp}} = \frac{\Delta B}{B}.$$

**Poznámka 2:** Odvozený adiabatický invariant má mnohem obecnější platnost a zůstává konstantní při jakýchkoli malých časových i prostorových změnách všech polí působících na částici. V teoretické mechanice se ukazuje, že se při kvaziperiodickém pohybu pod vlivem pomalu se měnících polí zachovává integrál přes periodu

$$\oint p_q dq = \text{const}.$$

Pokud za zobecněnou souřadnici zvolíme úhel při Larmorově rotaci, potom zobecněnou hybností bude moment hybnosti a dostaneme

$$mR_L v_{\perp} \cdot 2\pi = \text{const} \quad \Rightarrow \quad \frac{mv_{\perp}^2}{2B} = \text{const}.$$

**Poznámka 3 (magnetický moment):** První adiabatický invariant má několik významů:

$$\begin{aligned} 1) \quad \mu &= \frac{mv_{\perp}^2}{2B} = \frac{W_{\perp}}{B}; \\ 2) \quad \mu &= IS; \\ 3) \quad \mu &= \left| \frac{1}{2} Q \mathbf{r} \times \mathbf{v} \right|. \end{aligned} \tag{1.54}$$

Z druhého nebo třetího vyjádření vidíme, že jde o *magnetický moment* gyrující částice (viz dodatek E). Ekvivalentnost všech vyjádření je zřejmá z přímého dosazení:

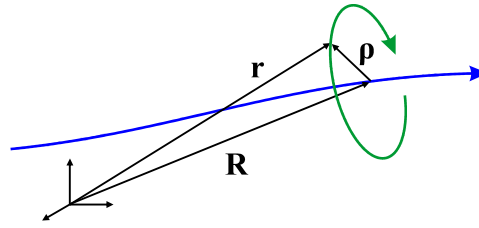
$$\begin{aligned} IS &= \frac{Q}{T} \pi R_L^2 = \dots = \frac{mv_{\perp}^2}{2B}; \\ \left| \frac{1}{2} Q \mathbf{r} \times \mathbf{v} \right| &= \frac{1}{2} QR_L v_{\perp} = \dots = \frac{mv_{\perp}^2}{2B}. \end{aligned}$$

### 1.3.2 Pohyb gyračního středu

V mnoha případech nepotřebujeme znát detailní pohyb částice v magnetickém poli. Vystředujeme-li známý gyrační pohyb, můžeme se zabývat jen pohybem gyračního středu. Při odvození budeme používat malý parametr  $\varepsilon$ , který bude určovat, které členy jsou podstatné a které nikoli. Po vystředování provedeme limitu  $\varepsilon \rightarrow 1$ . Až do vystředování budeme používat dva časy:

- $t$  pomalu se měnící čas ve shodě s adiabatickým přiblížením (čas, který popisuje změny polí)
- $\tau$  rychle se měnící čas popisující jednotlivé fáze gyrace. Přes tento čas budeme středovat a budeme předpokládat, že  $\tau \sim t/\varepsilon$ .

Označme  $\mathbf{R}(t)$  polohu gyračního středu,  $\mathbf{r}(t)$  skutečnou polohu gyrující částice a  $\boldsymbol{\rho}(t, \tau)$  vektor gyrace, přes který budeme středovat:



Souřadnicový systém zavedeme tak, aby třetí osa lokálně mířila ve směru magnetického pole, tedy bude platit

$$\mathbf{e}_3 = \mathbf{B}/B \quad (1.55)$$

Polohový vektor částice podle obrázku bude:

$$\mathbf{r}(t, \tau) = \mathbf{R}(t) + \varepsilon \boldsymbol{\rho}(t, \tau), \quad (1.56)$$

Parametrem  $\varepsilon$  označujeme, že gyrace je pro nás méně podstatný jev než pohyb gyračního středu. Podle (1.18) budeme pro gyraci v našem souřadnicovém systému mít

$$\boldsymbol{\rho}(t, \tau) = -\mathbf{e}_1 R_L(t) \cos(\omega_c(t)\tau) + \mathbf{e}_2 R_L(t) \sin(\omega_c(t)\tau). \quad (1.57)$$

Povšimněte si, že rychlé změny souvisící s gyrací jsou označeny časem  $\tau$ , přes který budeme středovat. Pohybovou rovnici částice zapíšeme ve tvaru

$$m \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}_{\text{ext}}(t, \mathbf{r}) + \frac{1}{\varepsilon} Q \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}(t, \mathbf{r}), \quad (1.58)$$

parametr  $\varepsilon$  koresponduje s dominantním postavením magnetického pole v problému. Pohybovou rovnici také můžeme psát ve tvaru

$$\varepsilon m \ddot{\mathbf{r}} = \varepsilon \mathbf{F}_{\text{ext}}(t, \mathbf{r}) + Q \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}(t, \mathbf{r}), \quad (1.59)$$

kteřá v limitě  $\varepsilon \rightarrow 0$  přejde na rovnici  $\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B} = 0$  popisující pohyb částice podél silokřivek. Nyní ve shodě s (1.56) vypočteme jednotlivé členy. Derivaci podle času  $t$  budeme označovat standardně tečkou, derivaci podle rychlého času  $\tau \sim t/\varepsilon$  čárkou ( $dt/dt \sim 1/\varepsilon$ ):

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t) &= \mathbf{R}(t) + \varepsilon \boldsymbol{\rho}(t, \tau); \\ \dot{\mathbf{r}} &= \dot{\mathbf{R}} + \varepsilon \dot{\boldsymbol{\rho}} + \boldsymbol{\rho}' ; \\ \ddot{\mathbf{r}} &= \ddot{\mathbf{R}} + \varepsilon \ddot{\boldsymbol{\rho}} + 2\dot{\boldsymbol{\rho}}' + \frac{1}{\varepsilon} \boldsymbol{\rho}'' ; \\ \mathbf{F}_{\text{ext}}(\mathbf{r}) &\approx \mathbf{F}_{\text{ext}}(\mathbf{R}) + \varepsilon (\boldsymbol{\rho} \cdot \nabla) \mathbf{F}_{\text{ext}} ; \\ \mathbf{B}(\mathbf{r}) &\approx \mathbf{B}(\mathbf{R}) + \varepsilon (\boldsymbol{\rho} \cdot \nabla) \mathbf{B} . \end{aligned}$$

Po dosazení získáme pohybovou rovnici ve tvaru

$$\varepsilon m \left[ \ddot{\mathbf{R}} + \varepsilon \ddot{\boldsymbol{\rho}} + 2\dot{\boldsymbol{\rho}}' + \frac{1}{\varepsilon} \boldsymbol{\rho}'' \right] = \varepsilon \left[ \mathbf{F}_{\text{ext}}(\mathbf{R}) + \varepsilon (\boldsymbol{\rho} \cdot \nabla) \mathbf{F}_{\text{ext}} \right] + Q \left[ \dot{\mathbf{R}} + \varepsilon \dot{\boldsymbol{\rho}} + \boldsymbol{\rho}' \right] \times \left[ \mathbf{B}(\mathbf{R}) + \varepsilon (\boldsymbol{\rho} \cdot \nabla) \mathbf{B} \right].$$

Nyní provedeme středování přes rychle se měnící čas  $\tau$ . Z (1.57) je vidět, že

$$\langle \boldsymbol{\rho} \rangle_\tau = \langle \dot{\boldsymbol{\rho}} \rangle_\tau = \langle \boldsymbol{\rho}' \rangle_\tau = \langle \dot{\boldsymbol{\rho}}' \rangle_\tau = \langle \ddot{\boldsymbol{\rho}} \rangle_\tau = \langle \boldsymbol{\rho}'' \rangle_\tau = 0. \quad (1.60)$$

Nenulové zůstanou jen střední hodnoty z kvadrátu vektoru gyrace  $\boldsymbol{\rho}$ . V pohybové rovnici ponecháme jen členy do prvního řádu v  $\varepsilon$ :

$$\varepsilon m \ddot{\mathbf{R}} = \varepsilon \mathbf{F}_{\text{ext}}(\mathbf{R}) + Q \dot{\mathbf{R}} \times \mathbf{B}(\mathbf{R}) + \varepsilon Q \langle \boldsymbol{\rho}' \times (\boldsymbol{\rho} \cdot \nabla) \mathbf{B} \rangle_\tau .$$

Zbývá tedy provést středování posledního členu. Za vektor gyrace dosadíme z (1.57), za gradient  $\mathbf{e}_1\partial_x + \mathbf{e}_2\partial_y + \mathbf{e}_3\partial_z$  a využijeme relace

$$\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3; \quad \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1; \quad \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2; \quad \mathbf{B} = B\mathbf{e}_3;$$

$$\langle \cos \omega_c \tau \rangle_\tau = \langle \sin \omega_c \tau \rangle_\tau = \langle \sin \omega_c \tau \cos \omega_c \tau \rangle_\tau = 0; \quad \langle \cos^2 \omega_c \tau \rangle_\tau = \langle \sin^2 \omega_c \tau \rangle_\tau = \frac{1}{2}.$$

Středování se netýká vektorů  $\mathbf{e}_k$ , které se mění s pomalým časem  $t$ . Výsledek středování je

$$\varepsilon m \ddot{\mathbf{R}} = \varepsilon \mathbf{F}_{\text{ext}}(\mathbf{R}) + Q \dot{\mathbf{R}} \times \mathbf{B}(\mathbf{R}) - \varepsilon \frac{mv_\perp^2}{2B} \nabla B.$$

Po provedení limity  $\varepsilon \rightarrow 1$  získáme hledanou pohybovou rovnici pro gyrační střed

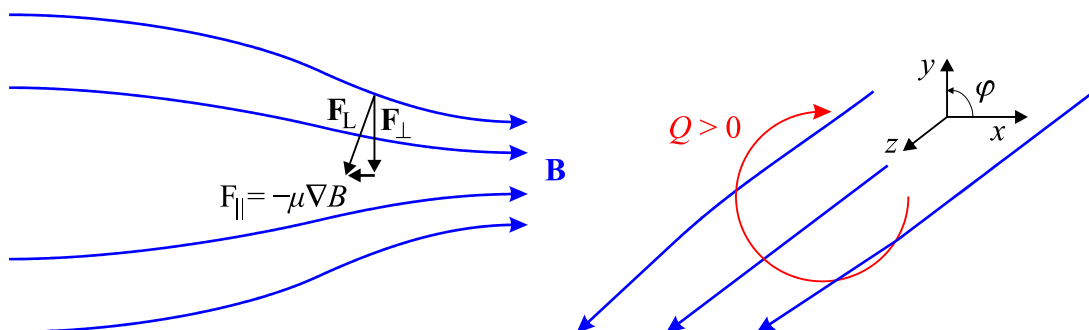
$$\boxed{m \ddot{\mathbf{R}} = \mathbf{F}_{\text{ext}} + Q \dot{\mathbf{R}} \times \mathbf{B} - \mu \nabla B;}$$

$$\mu \equiv \frac{mv_\perp^2}{2B}. \quad (1.61)$$

**Poznámka:** Všechny síly v rovnici jsou fiktivní, působí v gyračním středu, kde ve skutečnosti žádná částice není.

### 1.3.3 Síla $-\mu \nabla B$

Nová síla  $-\mu \nabla B$  vytlačuje částice z oblastí silnějších magnetických polí. Závisí jen na velikosti pole  $B$ , nikoli na jeho směru. Míří z oblasti silnějšího magnetického pole do oblastí slabšího pole. Koeficientem je první adiabatický invariant. Síla opět působí v místě gyračního středu a jde tedy o fiktivní sílu.



Povšimněme si původu síly na obrázku vlevo. Lorentzova síla je vždy kolmá k silokřivkám a tak má u zhušťujících se silokřivek nenulovou i složku rovnoběžnou s osou systému, která gyrující částici vytlačuje z oblasti hustého pole. Předpokládejme, že původní neporušené pole mířilo v ose  $z$ :

$$\mathbf{B} = (0, 0, B)$$

Zaveďme nyní malou poruchu pole  $\partial B / \partial z > 0$  podle pravého obrázku. V tu chvíli ale nutně vzniká nenulová radiální složka pole  $B_r$  (ve válcových souřadnicích) a síla  $F_z$  vytlačující částici z oblasti zhuštění. Nejlépe je to vidět z rovnice  $\text{div } \mathbf{B} = 0$  přeepsané do válcových souřadnic ( $B_\varphi = 0$ ):

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r B_r) + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial r} (r B_r) = -r \frac{\partial B_z}{\partial z}, \quad / \int$$

$$rB_r = -\frac{r^2}{2} \frac{\partial B_z}{\partial z},$$

$$B_r = -\frac{r}{2} \frac{\partial B_z}{\partial z} \cong -\frac{r}{2} \frac{\partial B}{\partial z}.$$

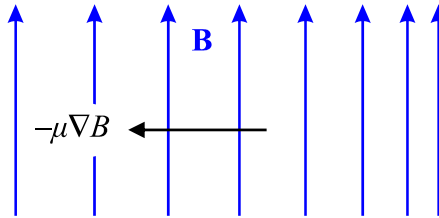
Tato radiální složka pole ( $B_r \ll B_z \cong B$ ) způsobuje vznik síly v ose  $z$ :

$$F_z = -QB_r v_\varphi = -Q \left( -\frac{R_L}{2} \frac{\partial B}{\partial z} \right) (-\omega_c R_L) = -\frac{\omega_c R_L^2}{2} \frac{\partial B}{\partial z}.$$

Podle obrázku je úhlová složka rychlosti pro kladný náboj záporná. Po dosazení za úhlovou frekvenci a Larmorův poloměr  $z$  (1.19) dostaneme

$$F_z = -\frac{mv_\perp^2}{2B} \frac{\partial B}{\partial z} = -\mu \frac{\partial B}{\partial z}.$$

Sílu  $-\mu \nabla B$  lze tedy získat i jinak než středováním přes gyraci. Postup přes středování je ovšem obecnější, protože tuto sílu získáme i v případě, kdy působí kolmo na silokřivky a pole se zhušťuje ve směru kolmém na silokřivky, tj. například  $\partial B_z / \partial x \neq 0$ :



### 1.3.4 Driftová rovnice

Násobme rovnici pro pohyb gyračního středu (1.61) vektorově magnetickým polem. Po standardní úpravě dvojnásobného vektorového součinu a vydělení celé rovnice  $QB^2$  dostaneme

$$\dot{\mathbf{R}} - \left( \dot{\mathbf{R}} \cdot \frac{\mathbf{B}}{B} \right) \frac{\mathbf{B}}{B} = \frac{\mathbf{F}_{\text{ext}} \times \mathbf{B} - \mu \nabla B \times \mathbf{B} - m \ddot{\mathbf{R}} \times \mathbf{B}}{QB^2};$$

Druhý výraz na levé straně je projekcí rychlosti gyračního středu do směru magnetického pole, tedy levá strana má tvar  $\dot{\mathbf{R}} - \dot{\mathbf{R}}_{\parallel}$ , což je kolmá projekce rychlosti gyračního středu:

$$\dot{\mathbf{R}}_{\perp} = \frac{\mathbf{F}_{\text{ext}} \times \mathbf{B} - \mu \nabla B \times \mathbf{B} - m \ddot{\mathbf{R}} \times \mathbf{B}}{QB^2}. \quad (1.62)$$

Odvozená rovnice se nazývá *driftová rovnice*. Gyrační střed se může pohybovat nenulovou rychlostí  $\dot{\mathbf{R}}_{\perp}$  kolmo na silokřivky magnetického pole. Takový pohyb nazýváme drift a může vzniknout třemi způsoby odpovídajícími třem členům rovnice na pravé straně. První příčinou mohou být další pole, například elektrické nebo gravitační. Druhou příčinou může být nehomogenita magnetického pole, která vede na grad  $B$  drift. Poslední příčinou může být nerovnoměrný pohyb gyračního středu. Buď je způsobený změnou směru rychlosti gyračního středu způsobenou zakřivením silokřivek (*drifty zakřivení*) nebo změnou velikosti rychlosti gyračního středu (*inerciální drifty*).

Driftování nabitých částic kolmo na magnetické pole je velice častým jevem v plazmatu. Většinou jde o kombinaci několika driftů naráz, neboť některé drifty způsobí separaci náboje a vznik elektrického pole, které následně vede na drift v elektrickém poli. Pokud se situace

pomalu mění, driftová rychlost gyračního středu tyto změny sleduje a poslední člen v driftové rovnici je nenulový. Vznikne například inerciální drift způsobený změnou velikosti rychlosti gyračního středu.

### 1.3.5 Drifty

- **$\mathbf{E} \times \mathbf{B}$  drift.** Jde o drift nabité částice v elektrickém a magnetickém poli. V jednoduché podobě jsme se s ním již seznámili v kapitole 1.1.4. Z driftové rovnice (1.62) plyne pro  $\mathbf{F} = Q\mathbf{E}$

$$\mathbf{v}_E = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2}. \quad (1.63)$$

Driftová rychlost je kolmá k oběma polím a její velikost je

$$v_E = \frac{E}{B} \sin \alpha, \quad (1.64)$$

kde  $\alpha$  je úhel mezi oběma poli. Dříve odvozený vztah (1.32) pro driftovou rychlost je speciálním případem vztahu (1.63). Driftová rychlost nezávisí na hmotnosti a náboji částice, elektrony i ionty v elektrickém poli driftují stejným směrem. Tento drift nebude původcem elektrického proudu.

- **Gravitační drift.** V tíhovém poli  $\mathbf{F} = m\mathbf{g}$  a magnetickém poli dochází k driftu s rychlostí

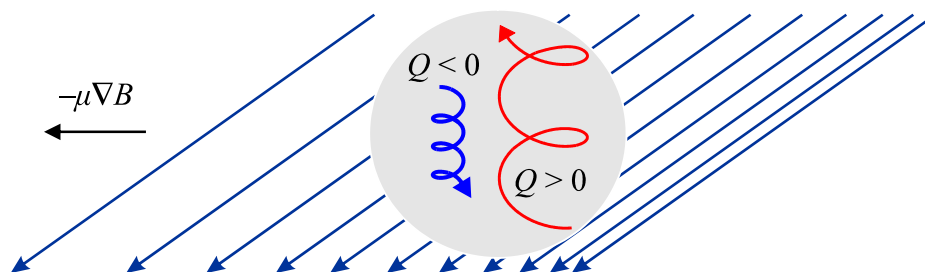
$$\mathbf{v}_g = \frac{m\mathbf{g} \times \mathbf{B}}{QB^2}, \quad (1.65)$$

kteřá je kolmá ke gravitačnímu i magnetickému poli. Její směr závisí na náboji částice a pro elektrony a ionty je opačný. Velikost síly závisí na hmotnosti částic. Drift může být zdrojem elektrických proudů, vede k separaci náboje, která následně způsobí  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$  drift.

- **Grad  $|\mathbf{B}|$  drift.** Tento drift je způsoben změnou velikosti magnetického pole. Příslušná driftová rychlost má velikost

$$\mathbf{v}_{\nabla B} = \frac{-\mu \vec{\nabla} B \times \mathbf{B}}{QB^2} = \frac{mv_{\perp}^2}{2Q} \frac{\mathbf{B} \times \vec{\nabla} B}{B^3}, \quad (1.66)$$

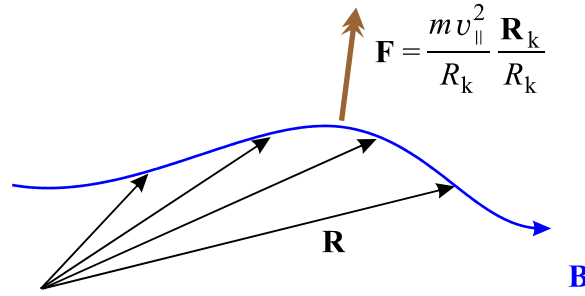
Tento drift závisí na hmotnosti a náboji částic, povede k různému driftování elektronů a iontů a ke vzniku elektrického proudu v plazmatu. Drift vede k separaci náboje, která následně způsobí  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$  drift.



- **Drift zakřivení.** Při pohybu kolem zakřivené silokřivky magnetického pole bude na částici působit odstředivá síla

$$\mathbf{F} = -m\ddot{\mathbf{R}} = \frac{mv_{\parallel}^2}{R_k} \frac{\mathbf{R}_k}{R_k}, \quad (1.67)$$

kde  $R_k$  je poloměr křivosti silokřivky.



Rychlost driftu zakřivení je

$$\mathbf{v}_R = \frac{m v_{\parallel}^2}{Q B^2} \frac{\mathbf{R}_k \times \mathbf{B}}{R_k^2}. \quad (1.68)$$

Drift zakřivení opět povede ke vzniku proudu v plazmatu a separaci náboje. Poloměr křivosti parametricky zadané křivky  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$  můžeme určit ze vztahu:

$$\frac{1}{R_k} = \left\| \frac{d^2 \mathbf{r}}{ds^2} \right\|; \quad ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt. \quad (1.69)$$

Někdy může být užitečné jiné vyjádření poloměru křivosti (vhodné do vztahu (1.68)).

$$\frac{1}{R_k} \frac{\mathbf{R}_k}{R_k} \cong \left( \frac{\mathbf{B}}{B} \cdot \nabla \right) \frac{\mathbf{B}}{B}. \quad (1.70)$$

- **Polarizační drift.** Bude-li se velikost elektrického pole pomalu měnit v čase, bude se také měnit driftová rychlost gyračního středu  $\mathbf{v}_E(t)$ . To povede ke vzniku inerciálního driftu odpovídajícímu inerciální síle

$$-m \ddot{\mathbf{R}} = -m \frac{d \mathbf{v}_E(t)}{dt} = -m \frac{d\mathbf{E}/dt \times \mathbf{B}}{B^2}$$

a polarizačnímu driftu

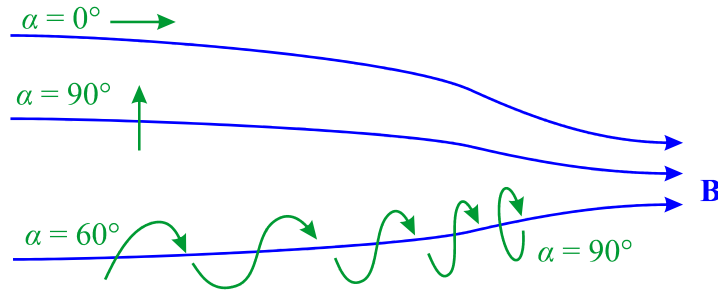
$$\mathbf{v}_P = \frac{m}{Q B^4} [\mathbf{B} \times (d\mathbf{E}/dt \times \mathbf{B})], \quad (1.71)$$

který je opět původcem vzniku proudu v plazmatu. Drift vede k separaci náboje, která následně způsobí  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$  drift.

## 1.4. Pohyby ve speciálních konfiguracích

### 1.4.1 Magnetické zrcadlo

Pokud se částice pohybuje pomalu proměnným magnetickým polem, bude se měnit sklon gyrační kružnice vzhledem k silokřivkám. Označme úhel mezi rychlostí částice a magnetickými silokřivkami  $\alpha$ :



Složky rychlosti ve směru pole a kolmo na pole budou dány vztahy

$$v_{\parallel} = v \cos \alpha \quad ; \quad v_{\perp} = v \sin \alpha . \quad (1.72)$$

Ze zákona zachování energie  $\mathcal{E}$  a adiabatického invariantu  $\mu$

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} m v^2 + Q\varphi = \frac{1}{2} m v_{\perp}^2 + \frac{1}{2} m v_{\parallel}^2 = \text{const} ; \quad (1.73)$$

$$\mu = \frac{m v_{\perp}^2}{2B} = \text{const}$$

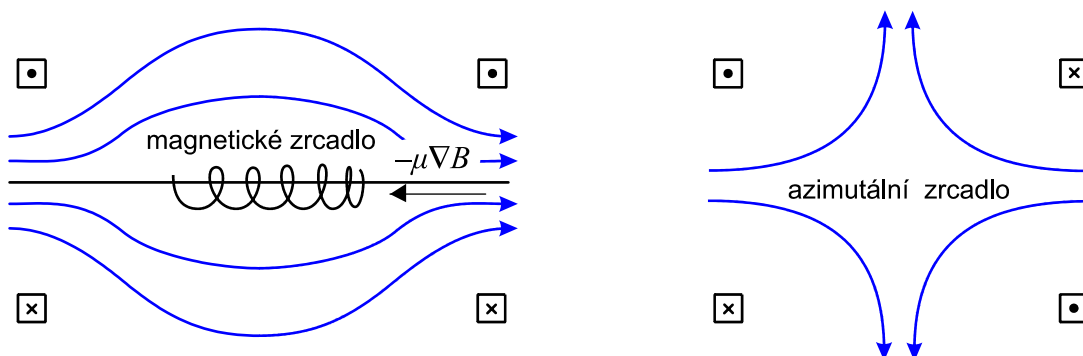
plyne tzv. zrcadlová rovnice

$$\boxed{\frac{\sin^2 \alpha}{B} = \text{const} \quad ; \quad \text{tj.} \quad \frac{\sin^2 \alpha}{B} = \frac{\sin^2 \alpha_0}{B_0}} . \quad (1.74)$$

Index 0 označuje hodnoty pole a úhlu v místě nástřelu částice. Do čím silnějšího pole se dostane částice, tím kolměji je postavena její Larmorova šroubovice. Pokud bude rovina gyrace kolmá k poli ( $\alpha = 90^\circ$ ), částice se odrazí. Z (1.74) plyne, že částice nastřelená pod úhlem  $\alpha_0$  v místě s polem  $B_0$  bude obrácena zpět, vzroste-li velikost pole na kritickou hodnotu

$$\boxed{B_c = \frac{B_0}{\sin^2 \alpha_0}} . \quad (1.75)$$

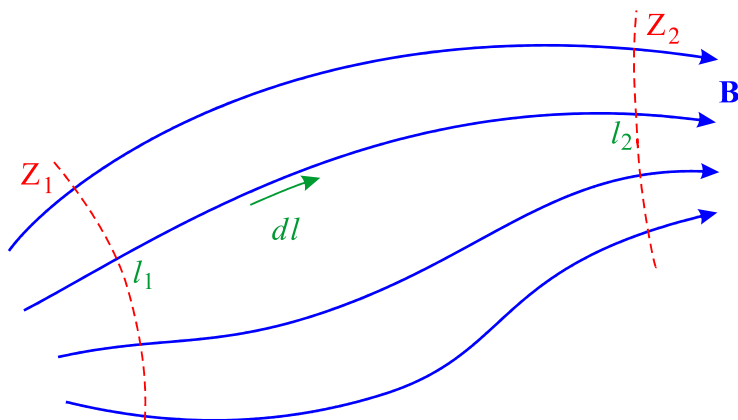
Nedosáhne-li magnetické pole této hodnoty, částice oblastí hustých silokřivek prolétne. Máme-li naopak zadáno maximální pole  $B_c$ , potom ze systému v místě s polem  $B$  uniknou všechny částice s úhlem  $\alpha < \alpha_0$  (tzv. únikový kužel).



Nejjednodušší magnetické zrcadlo získáme pomocí dvou shodně orientovaných cívek na obrázku vlevo. Záměnou směru proudu v cívkách magnetického zrcadla vznikne tzv. azimutální zrcadlo. V azimutálním zrcadle je v centru  $|\mathbf{B}|=0$ , Larmorův poloměr je nekonečný, cyklotronní frekvence nulová a změny polí nejsou malé ve srovnání s Larmorovou rotací. Adiabatický invariant  $\mu$  se nezachovává a částice, které prošly centrální oblastí, se snadno dostanou do únikového kužele.

### 1.4.2 Druhý adiabatický invariant, Fermiho mechanismus

Uvažujme nyní pohyb částice mezi dvěma zrcadly. K takové situaci může dojít v poli dipólu (van Allenovy pásy u Země), tokamaku (banánový orbit) nebo mezi dvěma cívkami.



Částice koná dva periodické pohyby:

- 1) Larmorovu rotaci, se kterou je spojen první adiabatický invariant  $\mu$ ;
- 2) pohyb od jednoho zrcadla k druhému a zpět (zakmitávání, bouncing).

Předpokládejme, že magnetické pole se mění s časem pomalu v porovnání s periodickým pohybem mezi zrcadly. Při takové změně se samozřejmě bude poloha zrcadel  $Z_1$  a  $Z_2$  přesouvat. Z teoretické mechaniky víme, že by se měl zachovávat tzv. druhý adiabatický invariant

$$J_2 \equiv \oint v_{\parallel} dl. \quad (1.76)$$

Ukažme, že se pro naši situaci  $J_2$  skutečně zachovává. Při proměnném magnetickém poli nemůže být celková energie částice integrálem pohybu a nezachovává se. Zapišeme proto alespoň její kolmou část pomocí prvního adiabatického invariantu (1.53):

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} m v_{\parallel}^2 + \frac{1}{2} m v_{\perp}^2 = \frac{1}{2} m v_{\parallel}^2 + \mu B. \quad (1.77)$$

Z výrazu pro energii určíme podélnou složku rychlosti a z té vypočteme druhý adiabatický invariant. Integrujme nejprve podél magnetické siločivky od prvního zrcadla do obecného místa  $l$  mezi zrcadly:

$$\tilde{J}_2(\mathcal{E}, t, l) \equiv \int_{l_1}^l v_{\parallel} dl = \int_{l_1}^l \sqrt{\frac{2}{m} [\mathcal{E} - \mu B(t, l')]} dl'.$$

Vlnka nad symbolem znamená, že nejde o celý adiabatický invariant, integrace zatím není přes celou periodu pohybu. V závorce jsou uvedeny veškeré proměnné veličiny. Zajímat nás samozřejmě bude časová změna veličiny  $\tilde{J}_2$ :



$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{J}_2}{dt} &= \frac{\partial \tilde{J}_2}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{J}_2}{\partial \mathcal{E}} \frac{d\mathcal{E}}{dt} + \frac{d\tilde{J}_2}{dl} \frac{dl}{dt} = \\ &= - \int_{l_1}^l \frac{\mu}{m} \frac{\partial B}{\partial t} \left[ \frac{2}{m} (\mathcal{E} - \mu B) \right]^{-1/2} dl + \left[ v_{\parallel} \dot{v}_{\parallel} + \frac{\mu}{m} \frac{\partial B}{\partial t} + \frac{\mu}{m} \frac{\partial B}{\partial l} v_{\parallel} \right] \int_{l_1}^l \left[ \frac{2}{m} (\mathcal{E} - \mu B) \right]^{-1/2} dl + \\ &\quad + \left[ \frac{2}{m} (\mathcal{E} - \mu B) \right]^{1/2} v_{\parallel} - v_{\parallel} \int_{l_1}^l \frac{\mu}{m} \frac{\partial B}{\partial l} \left[ \frac{2}{m} (\mathcal{E} - \mu B) \right]^{-1/2} dl . \end{aligned}$$

Derivování je přímočaré, při úpravách jsme použili  $dl/dt = v_{\parallel}$  a z integrací vytknuli první adiabatický invariant  $\mu$ . Nyní integrujme přes celou periodu, tj. druhým bodem integrace bude bod obratu  $l = l_1$ , ve kterém platí  $v_{\parallel} = 0$ :

$$\frac{dJ_2}{dt} = - \frac{\mu}{m} \oint \frac{\partial B}{\partial t} \left[ \frac{2}{m} (\mathcal{E} - \mu B) \right]^{-1/2} dl + \frac{\mu}{m} \frac{\partial B}{\partial t} \oint \left[ \frac{2}{m} (\mathcal{E} - \mu B) \right]^{-1/2} dl .$$

Pro pole, které se pomalu mění v rámci periody pohybu, můžeme z prvního integrálu vytknout výraz  $\partial B / \partial t$ . Oba členy se poté odečtou a dostaneme

$$\frac{dJ_2}{dt} = 0 . \quad (1.78)$$

Druhý adiabatický invariant se tedy skutečně zachovává.

### ■ Fermiho urychlování prvního druhu

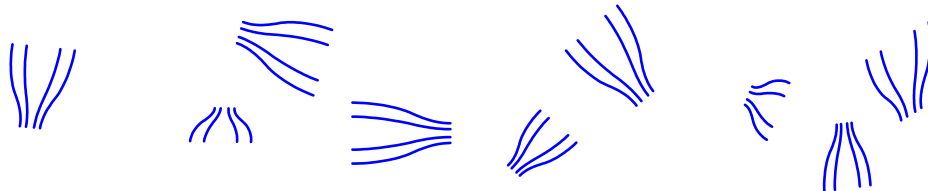
Představme si, že pole sílí a obě zrcadla se k sobě pomalu přibližují. Dále předpokládejme, že oblast změny pole je malá v porovnání se vzdáleností mezi zrcadly. Pak můžeme pro druhý adiabatický invariant přibližně psát:

$$2L v_{\parallel} \approx \text{const} , \quad (1.79)$$

kde  $L$  je vzdálenost mezi zrcadly. Je zřejmé, že při zmenšování vzdálenosti  $L$  mezi zrcadly musí docházet k zvětšení podélné složky rychlosti a tím i k zvětšení celkové energie částice. Částice přebírá při odrazu energii od vstřícně se pohybujícího zrcadla a dochází k jejímu urychlování. Tento mechanismus nazýváme *Fermiho urychlování prvního druhu*. Pokud se zrcadlo proti částici pohybuje rychlostí  $v_Z$ , bude mít po odrazu rychlost  $v_{\parallel} + 2v_Z$ .

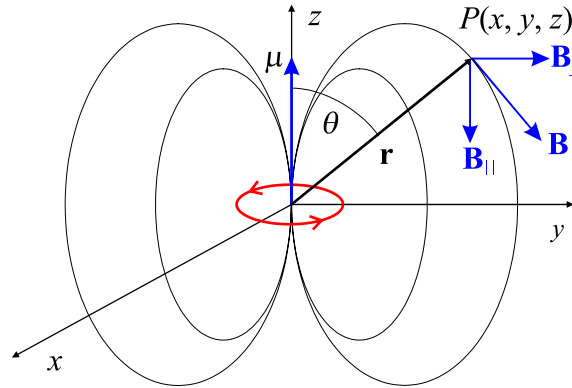
### ■ Fermiho urychlování druhého druhu

Představme si, že ve vesmíru se pohybují náhodně nabitě částice v prostředí různě se měnících magnetických polí. Nabitá částice bude tu a tam odrážena od magnetických zrcadel pohybujících se náhodným směrem. Díky Fermiho mechanismu bude statisticky někdy urychlena a někdy zpomalená. Rychlostní rozdělení se proto bude rozšiřovat a mezi částicemi se objeví určité procento velmi rychlých částic, které náhodně získaly energii z „příznivých“ odrazů od magnetických zrcadel. Tento mechanismus nazýváme *Fermiho urychlování druhého druhu* a italský fyzik Enrico Fermi se jím pokusil vysvětlit vysoké energie částic kosmického záření.



### 1.4.3 Magnetický dipól

Magnetický dipól je nejnižším přiblížením multipólového rozvoje magnetického pole. Zdrojem dipólového pole může například být elektrický proud tekoucí po malé kružnici.



Velikost magnetického dipólu je dána magnetickým dipólovým momentem  $\boldsymbol{\mu}$ . Pro soustavu nabitých částic je magnetický moment dán vztahem (viz dodatek E2)

$$\boldsymbol{\mu} = \sum_a Q_a \frac{1}{2} (\mathbf{r}_a \times \mathbf{v}_a). \quad (1.80)$$

Sumace probíhá přes všechny částice. Pro jednu částici pohybující se po kružnici je magnetický moment prvním adiabatickým invariantem částice a podle (1.54) platí

$$|\boldsymbol{\mu}| = \left| \frac{1}{2} Q (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) \right| = \frac{m v_{\perp}^2}{2B} = IS,$$

kde  $I$  je elektrický proud tekoucí po obvodu kružnice s plochou  $S$  způsobený pohybem nabitých částic. Objemová hustota magnetického momentu se nazývá magnetizace a je rovna

$$\mathbf{M} \equiv \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \sum_a Q_a \frac{1}{2} (\mathbf{r}_a \times \mathbf{v}_a). \quad (1.81)$$

Ze znalosti magnetického momentu můžeme určit vektorový potenciál (viz dodatky D, E) a magnetické pole:

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\boldsymbol{\mu} \times \mathbf{r}}{r^3}, \quad (1.82)$$

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r} - r^2 \boldsymbol{\mu}}{r^5}. \quad (1.83)$$

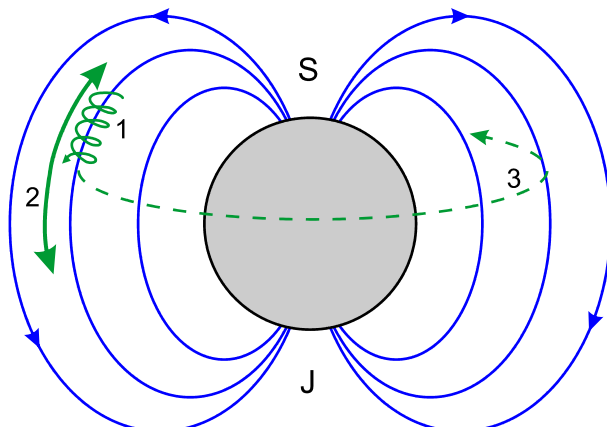
Pro magnetický dipólový moment orientovaný ve směru osy  $z$  máme:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \boldsymbol{\mu} \left( \frac{3zx}{r^5}, \frac{3zy}{r^5}, \frac{3z^2}{r^5} - \frac{1}{r^3} \right), \quad (1.84)$$

$$\mathbf{B} = (B_{\perp}, B_{\parallel}) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \boldsymbol{\mu} (3 \cos \theta \sin \theta, 3 \cos^2 \theta - 1). \quad (1.85)$$

Díky těmto explicitním formulím můžeme snadno řešit pohyby nabitých částic, například numericky. Pokud víme, pod jakým úhlem a kde do pole částice vnikla, ze zrcadlové rovnice snadno zjistíme kritické pole nutné k otočení částice na dané silokřivce. Pokud se pole dipólu nemění mezi odrazy, zachovává se první i druhý adiabatický invariant. Díky driftu zakřivení se částice ještě pohybuje v azimutálním směru kolem dipólu a koná tak tři kvaziperiodické

pohyby: 1) Larmorovu rotaci, 2) odrazy mezi zrcadly v polárních oblastech, 3) drift zakřivení. S driftem zakřivení je spojen *třetí adiabatický invariant*, který je úměrný magnetickému indukčnímu toku plochou křivky.



V zemském dipólovém poli je perioda jednotlivých dějů (energie částice 1 keV, silokřivka ve vzdálenosti čtyřnásobku poloměru na rovníku, částice s nulovou podélnou rychlostí) [9]:

částice	1 – gyrace	2 – pohyb mezi zrcadly	3 – drift
elektron 1 keV	$10^{-4}$ s	4 s	180 h
proton 1 keV	0,14 s	170 s	180 h

Driftová rychlost elektronů a iontů vychází stejná, jde o drift zakřivení, jehož hodnota závisí nejen na hmotnosti částice, ale i na podélné složce rychlosti, obě závislosti se vyruší.

**Poznámka:** Dipólové pole ubývá se třetí mocninou vzdálenosti, proto astronomové vyjadřují dipólový moment planet a ostatních těles jako součin pole na rovníku a třetí mocniny poloměru. Jednotkou je  $\text{Tm}^3$ . Tato veličina je úměrná skutečnému dipólovému momentu (1.80).

#### 1.4.4 Elektrický a magnetický monopol

Magnetické monopóly sice neexistují, ale čistě teoreticky bychom mohli zkoumat pohyb v poli elektrického a magnetického monopolu, u kterých jsou pole dána vztahy:

$$\mathbf{E} = \frac{Q_E}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{r^3}; \quad \mathbf{B} = Q_M \frac{\mathbf{r}}{r^3}. \quad (1.86)$$

Celkem snadno lze ukázat, že se při pohybu nebude zachovávat moment hybnosti, ale vektor

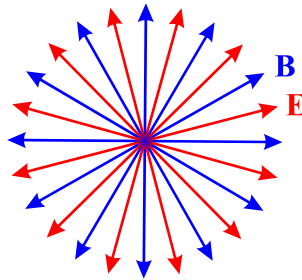
$$\mathbf{N} \equiv \mathbf{r} \times m\mathbf{v} - Q_E Q_M \frac{\mathbf{r}}{r}. \quad (1.87)$$

Pojďme toto tvrzení dokázat:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{N}}{dt} &= \frac{d}{dt} \left( \mathbf{r} \times m\mathbf{v} - Q_E Q_M \frac{\mathbf{r}}{r} \right) = \mathbf{v} \times m\mathbf{v} + \mathbf{r} \times \mathbf{F} - Q_E Q_M \frac{r\mathbf{v} - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})\frac{\mathbf{r}}{r}}{r^2} = \\ &= 0 + Q_E \mathbf{r} \times (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) - Q_E Q_M \frac{\mathbf{v}}{r} + Q_E Q_M \frac{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})\mathbf{r}}{r^3} = \\ &= Q_E \mathbf{r} \times \left( \frac{Q_E}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{r^3} + \mathbf{v} \times Q_M \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) - Q_E Q_M \frac{\mathbf{v}}{r} + Q_E Q_M \frac{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})\mathbf{r}}{r^3} = \end{aligned}$$

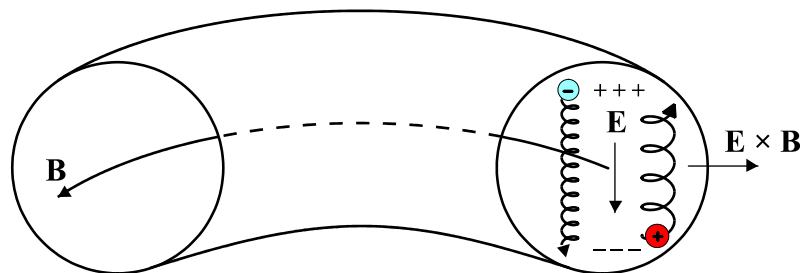
$$= 0 + \frac{Q_E Q_M}{r^3} \mathbf{r} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{r}) - Q_E Q_M \frac{\mathbf{v}}{r} + Q_E Q_M \frac{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{r}}{r^3} = 0.$$

Vektor  $\mathbf{N}$  se při pohybu tedy zachovává. Pohyb se děje po kuželové ploše s osou totožnou s vektorem  $\mathbf{N}$ . Rostoucí magnetické pole v počátku souřadnic způsobí, že každý náboj bude odražen silou  $-\mu \nabla B$  v nějaké vzdálenosti  $r_{\min}$  od monopólu. Má-li pohybující se elektrický náboj shodné znaménko s  $Q_E$ , bude se odpuzovat a pohyb bude neomezený,  $r \in (r_{\min}, \infty)$ . Má-li pohybující se náboj opačné znaménko, bude se přitahovat a pohyb bude omezený,  $r \in (r_{\min}, r_{\max})$ . Hodnotu  $r_{\max}$  můžeme určit ze zákona zachování energie.



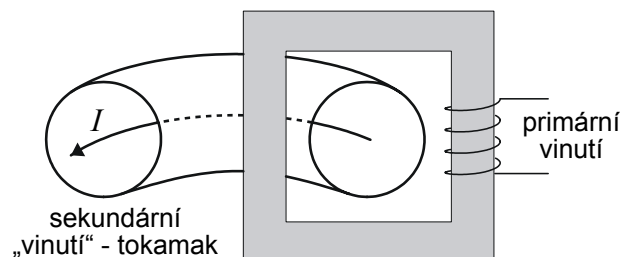
### 1.4.5 Tokamak

V tokamaku (z ruského TOroidnaja KAmera v MAgnitnych Kатуškach) je plazmové vlákno stočeno do toroidální geometrie, základním polem je *toroidální* pole sledující plazmové vlákno. Zpravidla je generováno cívkou navinutou na plášť toroidu. Pouhé toroidální pole vede na drifty, které způsobí únik nabitých částic z vnitřního prostoru tokamaku.

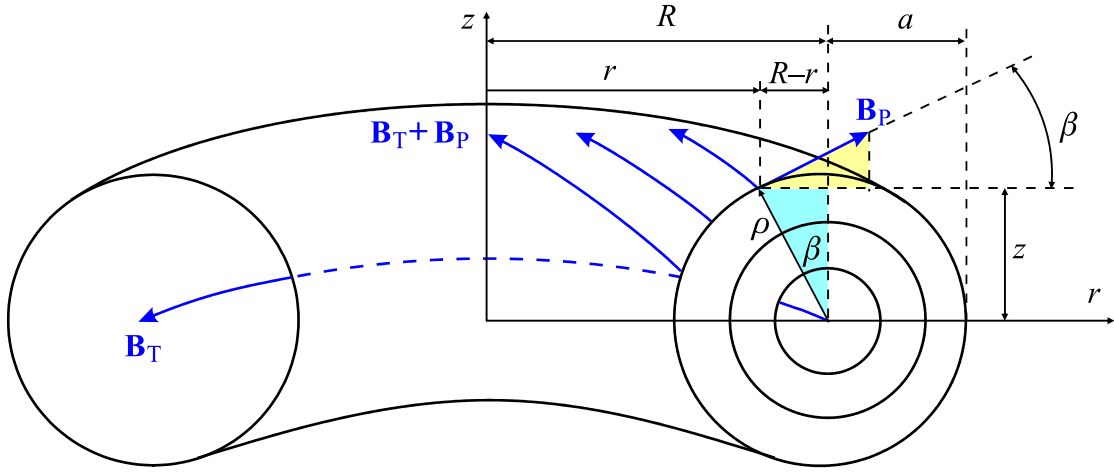


V toroidální geometrii dochází k driftu zakřivení, který způsobuje separaci náboje, tím vzniká elektrické pole a následný  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$  drift, kterým částice unikají z prostoru toroidu. Tomu lze částečně čelit zkroucením silokřivek pole dodatečným *poloidálním* polem. Pohybem částic po zkroucených silokřivkách bude vlastně spojena oblast kladného a záporného náboje, v jistém slova smyslu dojde ke zkratování separovaného náboje. Dodatečné poloidální pole můžeme získat různými způsoby. Jmenujme alespoň:

- 1) *stellarátor* – vinutí je šikmé.
- 2) *tokamak* – torus je sekundárním vinutím transformátoru. Tím v prostoru tokamaku vzniká elektrický proud, který generuje poloidální pole.



- 3) *multipóly* – v pracovním prostoru jsou vodiče, které generují poloidální pole.



Naším cílem nyní bude určit analytické výrazy pro pole. Toroidální pole musí podle Ampérova zákona ubývat se vzdáleností od středu jako  $1/r$ :

$$B_T(r) = B_{T0} \frac{R}{r}; \quad B_{T0} \equiv B_T(R). \quad (1.88)$$

Velikost poloidálního pole může být na každém magnetickém povrchu s poloměrem  $\rho$  (viz obrázek) různá a bude ubývat se vzdáleností stejně jako toroidální pole:

$$B_p(\rho, r) = B_{p0}(\rho) \frac{R}{r}; \quad B_{p0}(\rho) \equiv B_p(\rho, R). \quad (1.89)$$

Určeme nyní projekce poloidálního pole do radiálního směru a do osy  $z$ . Využijeme k tomu podobnost trojúhelníků zvýrazněných na obrázku:

$$B_{p_r}(\rho, r) = B_p \cos \beta = B_{p0}(\rho) \frac{R}{r} \frac{z}{\rho}, \quad (1.90)$$

$$B_{p_z}(\rho, r) = B_p \sin \beta = B_{p0}(\rho) \frac{R}{r} \frac{R-r}{\rho}. \quad (1.91)$$

Zřejmě platí

$$B_p^2 = B_{p_r}^2 + B_{p_z}^2; \quad \rho^2 = (R-r)^2 + z^2. \quad (1.92)$$

Předpokládejme, že částice nalétne pod úhlem  $\alpha_0$  na vnějším okraji magnetického povrchu, kde je pole z celého povrchu minimální:

$$B_{\min} = \sqrt{B_{T0}^2 + B_{p0}^2(\rho)} \frac{R}{R+\rho}. \quad (1.93)$$

Částice bude sledovat magnetickou silokřivku směrem do oblasti menších hodnot  $r$ , kde pole roste. K případnému odrazu dojde podle zrcadlové rovnice v kritickém poli (1.75)

$$B_c = \frac{B_{\min}}{\sin^2 \alpha_0}. \quad (1.94)$$

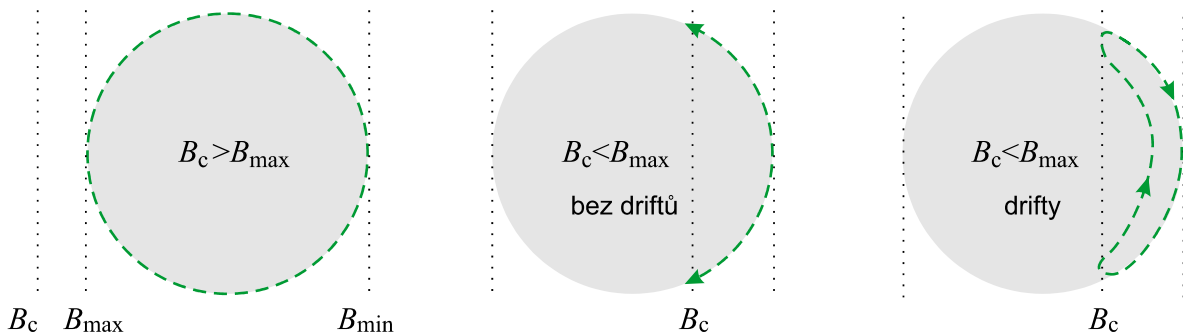
K odrazu dojde jen tehdy, pokud je kritické pole menší než maximální pole na vnitřním okraji, tj. částice se na své pouti setká s dostatečně silným polem, které ji otočí:

$$B_c < B_{\max} = \sqrt{B_{T0}^2 + B_{p0}^2(\rho)} \frac{R}{R-\rho}. \quad (1.95)$$

Kombinací posledních tří rovnic získáme podmínku pro otočení pohybu částice:

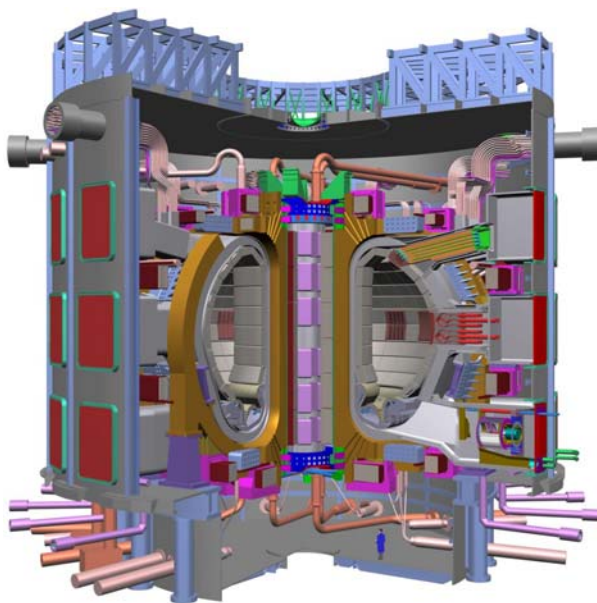
$$\sin^2 \alpha_0 > \frac{R - \rho}{R + \rho} \tag{1.96}$$

Není-li podmínka splněna, částice se pohybuje po silokřivce kolem dokola magnetického povrchu. Je-li podmínka splněna, odrazí se v určitém místě zpět. Díky driftům vzniká v řezu tzv. banánová orbita pojmenovaná podle tvaru trajektorie gyračního středu



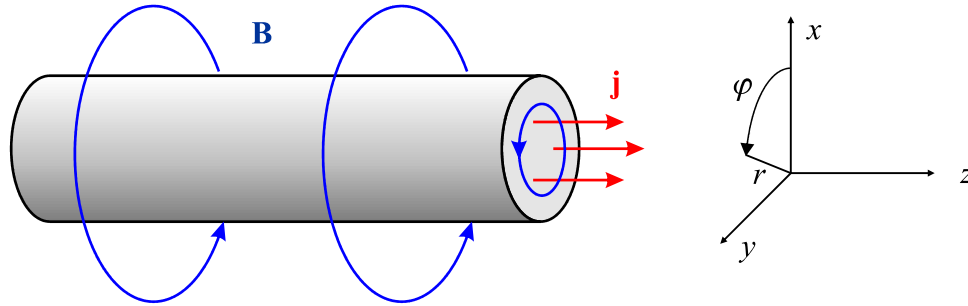
V následující tabulce je porovnání tokamaků Tore Supra a JET s obřím experimentálním tokamakem ITER (International Thermonuclear Experimental Reactor), který bude postaven v Cadarache ve Francii kolem roku 2020 v rámci mezinárodní spolupráce.

Parametry	Tore Supra	JET	ITER
Poloměr prstence plazmatu [m]	2,25	3	6,21
Poloměr plazmatu [m]	0,7	1,25	2,0
Objem plazmatu [m <sup>3</sup> ]	25	155	837
Proud v plazmatu [MA]	1,7	5÷7	15
Magnetické pole [T]	4,5	3,4	5,3
Délka pulsů [s]	~ 100	10	> 300
Typ plazmatu	D-D	D-D / D-T	D-T
Termonukleární výkon	~ 1 kW	50 kW / 10 MW	500 MW



ITER

### 1.4.6 Plazmové vlákno, souvislost s tekutinovým modelem



Představme si nyní nejjednodušší rovnovážné plazmové vlákno protékané elektrickým proudem podle obrázku. Magnetické pole má jen azimutální směr a jedinou nenulovou složkou je  $B_\varphi$ . Uvnitř vlákna musí být magnetické pole se vzdáleností od středu rostoucí – plyne to z Ampérova zákona, větší silokřivka uzavírá větší plochu a teče jí větší celkový proud. Vně vlákna pole ubývá jako  $1/r$ . Pohyb částic vně vlákna je jednoduchý, budou podléhat driftní zakřivení (kladné částice driftují ve směru osy  $z$ ) a grad  $B$  driftní stejného směru. Výsledkem je drift částic podél vlákna.

Zaměříme se ale na pohyby částic uvnitř vlákna. Nalezneme rotaci magnetického pole  $\mathbf{B}$ :

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \text{rot}(\mathbf{H} + \mathbf{M}) = \mu_0 \left( \mathbf{j}_C + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{j}_M \right). \quad (1.97)$$

V závorce je celkový proud tekoucí vláknem. První člen představuje vodivostní proud, ukážeme, že je tvořen driftem zakřivení a grad  $B$  driftem částic uvnitř vlákna. Druhý člen je v našem případě statické rovnováhy nulový (v případě časové proměnnosti by souvisel s polarizačním driftem). Poslední člen je magnetizační proud  $\mathbf{j}_M = \text{rot } \mathbf{M}$  – ten vzniká díky Larmorovské rotaci částic, která není sousedními částicemi kompenzována přesně na nulu. Odvoďme nyní vztahy pro jednotlivé proudové hustoty uvnitř vlákna.

#### ■ Proud způsobený grad $B$ driftem

Pro střední proudovou hustotu můžeme za pomoci koncentrace a rychlosti nosičů náboje psát

$$\mathbf{j}_{\nabla B} = \left\langle \sum_{\alpha} Q_{\alpha} n_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha} \right\rangle.$$

kde sumace probíhá přes elektrony a ionty, středování přes všechny částice. Za rychlost dosadíme driftní rychlost (1.68) a využijeme cylindrické symetrie proudového vlákna:

$$\mathbf{j}_{\nabla B} = -\frac{1}{B^2} \left\langle n_e \frac{m_e v_{e\perp}^2}{2} + n_i \frac{m_i v_{i\perp}^2}{2} \right\rangle \frac{\partial B}{\partial r} \mathbf{e}_z.$$

Připomeňme, že pole uvnitř vlákna s rostoucím  $r$  roste a tedy derivace  $\partial B / \partial r > 0$ . Z geometrie problému je zřejmé, že grad  $B$  drift míří v záporném směru osy  $z$ . Středujme nyní kolmou složku kinetické energie. Kolmá složka má dva stupně volnosti a proto platí

$$\left\langle \frac{m v_{\perp}^2}{2} \right\rangle = 2 \cdot \frac{1}{2} k_B T = k_B T$$

a tedy

$$\mathbf{j}_{\nabla B} = -\frac{1}{B^2} (n_e k_B T_e + n_i k_B T_i) \frac{\partial B}{\partial r} \mathbf{e}_z = -\frac{p}{B^2} \frac{\partial B}{\partial r} \mathbf{e}_z. \quad (1.98)$$

### ■ Proud způsobený driftem zakřivení

Podobně jako při grad  $B$  driftu určíme z driftu zakřivení (1.68) proudovou hustotu

$$\mathbf{j}_R = \frac{1}{rB} \left\langle n_e m_e v_{e\parallel}^2 + n_i m_i v_{i\parallel}^2 \right\rangle \mathbf{e}_z.$$

Vypočteme střední hodnotu složky kinetické energie (částice má jeden stupeň volnosti podél magnetického pole)

$$\left\langle \frac{m v_{\parallel}^2}{2} \right\rangle = 1 \cdot \frac{1}{2} k_B T = \frac{1}{2} k_B T$$

a pro proudovou hustotu způsobenou driftem zakřivení máme výsledný vztah

$$\mathbf{j}_R = \frac{1}{rB} (n_e k_B T_e + n_i k_B T_i) \mathbf{e}_z = \frac{p}{rB} \mathbf{e}_z. \quad (1.99)$$

### ■ Magnetizační proud

V případě homogenního plazmatu a konstantního magnetického pole je proudový příspěvek od soustavy shodně Larmorovsky rotujících částic nulový. Je-li pole nehomogenní, jsou Larmorovy orbity v různých místech různé a průměrný příspěvek k tekoucímu proudu může být nenulový. Podobně v nehomogenním plazmatu v některém směru narůstá počet nosičů náboje a při průměrování příspěvku k celkovému proudu dostaneme nenulový výsledek. Magnetický moment jedné částice je

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{m v_{\perp}^2}{2B} \mathbf{e}_{\varphi}. \quad (1.100)$$

**Poznámka:** Gyrující nabitá částice generuje vlastní magnetické pole, které má opačný směr než pole původní. Hovoříme proto o *diamagnetizmu plazmatu*. V souřadnicové soustavě na obrázku má původní magnetické pole směr  $-\mathbf{e}_{\varphi}$ , magnetický moment částice má směr  $+\mathbf{e}_{\varphi}$ .

Nyní určíme celkovou magnetizaci a opět vystředujeme přes kvadráty rychlostí:

$$\mathbf{M} = \left\langle \sum_{\alpha} n_{\alpha} \boldsymbol{\mu}_{\alpha} \right\rangle = \frac{\left\langle n_e m_e v_{e\perp}^2 + n_i m_i v_{i\perp}^2 \right\rangle}{2B} \mathbf{e}_{\varphi} = \frac{(n_e k_B T_e + n_i k_B T_i)}{B} \mathbf{e}_{\varphi} = \frac{p}{B} \mathbf{e}_{\varphi}.$$

Magnetizační proud určíme v zadané geometrii již snadno:

$$\mathbf{j}_M = \text{rot } \mathbf{M} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{p}{B} \right) \mathbf{e}_z. \quad (1.101)$$

Na závěr ukažme, že součet všech tří proudových hustot odvozených výše dá celkový proud tekoucí plazmatem:

$$j_{\nabla B} + j_R + j_M = -\frac{p}{B^2} \frac{\partial B}{\partial r} + \frac{p}{rB} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{p}{B} \right) = -\frac{1}{B} \frac{\partial p}{\partial r}.$$

Zřejmě tedy platí

$$(j_{\nabla B} + j_R + j_M) B = -\frac{\partial p}{\partial r},$$

což je podmínka rovnováhy  $\mathbf{j} \times \mathbf{B} = -\nabla p$ , ve které vystupuje celkový proud. Mikroskopické procesy jsou tak přirozenou cestou provázány s makroskopickými proudy v kontinuu



## 2. STATISTICKÝ PŘÍSTUP – NEROVNOVÁŽNÁ STATISTIKA

Předpokládejme, že systém může být složen z několika druhů částic (elektrony, neutrály, ionty), které budeme označovat indexem  $\alpha$ . V celé této kapitole platí sčítací konvence pro indexy psané latinkou ( $i, j, k, \dots$ ). Neplatí pro řecké indexy popisující druh částic. Označme hustotu pravděpodobnosti výskytu částic druhu  $\alpha$

$$f_\alpha = f_\alpha(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}_\alpha) .$$

V termodynamické rovnováze hustota pravděpodobnosti nezávisí na čase a splývá s kanonickou nebo grandkanonickou rozdělovací funkcí  $\rho$ . Hustotu pravděpodobnosti závislou na čase budeme normovat vzhledem k počtu částic, tj.

$$\begin{aligned} \int f_\alpha(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}_\alpha) d^3 \mathbf{v}_\alpha &= n_\alpha(t, \mathbf{x}); \\ \int f_\alpha(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}_\alpha) d^3 \mathbf{x} d^3 \mathbf{v}_\alpha &= N_\alpha(t); \end{aligned} \quad (2.1)$$

Integrováním přes rychlostní prostor získáme koncentraci částic

$$n_\alpha = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \Delta N_\alpha / \Delta V \quad (2.2)$$

a dostaneme se tak na pozici kontinua. Dalším středováním přes prostorové proměnné získáme celkový počet částic  $N_\alpha$ . Při středování obecné proměnné  $A$  musíme vzhledem ke způsobu normování pravděpodobnosti výsledek dělit součtem všech pravděpodobností:

$$\mathcal{A}(t, \mathbf{x}) = \langle A \rangle_{\mathbf{v}} = \frac{\int A f_\alpha(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}_\alpha) d^3 \mathbf{v}_\alpha}{\int f_\alpha(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}_\alpha) d^3 \mathbf{v}_\alpha}; \quad A(t) = \langle A \rangle_{\mathbf{x}, \mathbf{v}} = \frac{\int A f_\alpha(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}_\alpha) d^3 \mathbf{x} d^3 \mathbf{v}_\alpha}{\int f_\alpha(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}_\alpha) d^3 \mathbf{x} d^3 \mathbf{v}_\alpha}. \quad (2.3)$$

Veličina  $\mathcal{A}(t, \mathbf{x})$  má význam hustoty veličiny  $A$ . Díky normování je

$$\int A f_\alpha(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}_\alpha) d^3 \mathbf{v}_\alpha = n_\alpha(t, \mathbf{x}) \mathcal{A}(t, \mathbf{x}). \quad (2.4)$$

### 2.1. Boltzmannova rovnice

#### 2.1.1 Různé varianty Boltzmannovy rovnice

Hustota pravděpodobnosti výskytu částic druhu  $\alpha$  se s časem mění z důvodu srážek částic se sebou samými i s ostatními druhy:

$$\frac{d}{dt} f_\alpha(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}_\alpha) = \sum_{\beta} S_{\alpha\beta}$$

Členy napravo se nazývají Boltzmannovy srážkové integrály a budou diskutovány v příští kapitole. Rozepišme úplnou derivaci na levé straně:

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_k} \frac{dx_k}{dt} + \frac{\partial f_\alpha}{\partial v_{k\alpha}} \frac{dv_{k\alpha}}{dt} = \sum_{\beta} S_{\alpha\beta} .$$

Sumační konvence platí v předchozím vztahu jen pro indexy psané latinkou, pro řecké nikoli. Časové derivace poloh jsou rychlosti a časové derivace rychlostí jsou zrychlení, která vyjádříme pomocí síly z druhého Newtonova zákona:

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + v_{k\alpha} \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_k} + \frac{F_{k\alpha}}{m_\alpha} \frac{\partial f_\alpha}{\partial v_{k\alpha}} = \sum_{\beta} S_{\alpha\beta} .$$

Členy přes které se sčítá, zapíšeme jako působící operátory:

$$! \quad \boxed{\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + (\mathbf{v}_\alpha \cdot \nabla_{\mathbf{x}}) f_\alpha + \frac{1}{m_\alpha} (\mathbf{F}_\alpha \cdot \nabla_{\mathbf{v}}) f_\alpha = \sum_{\beta} S_{\alpha\beta}} \quad (2.5)$$

Odvozená rovnice se nazývá Boltzmannova rovnice a je základní rovnicí statistiky nerovnovážných procesů. Členy na pravé straně se nazývají Boltzmannův srážkový integrál (lze je vyjádřit jako integrál přes část fázového prostoru). Podle možných způsobů vyjádření srážkového integrálu tuto rovnici nazýváme různými způsoby:

- **Boltzmannova rovnice:** Srážky jsou zcela obecné a vyjadřují se pomocí srážkového integrálu (viz kapitola 2.1.2). Boltzmannova rovnice je pojmenována podle Ludwiga Boltzmann (1844–1906), rakouského fyzika a zakladatele statistické fyziky.
- **Fokkerova-Planckova rovnice:** Srážkový člen započítává jen párové Coulombovy interakce, pro které je účinný průřez dobře znám. Rovnice je pojmenována podle Adriaana Daniěla Fokkera (1887–1972), holandského fyzika a muzikanta a podle Maxe Plancka (1858–1947), rakouského fyzika a jednoho ze zakladatelů kvantové teorie. Speciálním případem Fokkerovy Planckovy rovnice je *Landauova rovnice*. Jako dolní mez párových Coulombových srážek zvolíme záměrnou vzdálenost, při které se srážející se částice odchýlí o pravý úhel (srážky na menší vzdálenosti jsou málo pravděpodobné) a jako maximální záměrnou vzdálenost srážky Debyeovu vzdálenost (vzdálenost přirozeného stínění bodových zdrojů). Rovnice je pojmenována podle Lva Davidoviče Landau (1908–1968), sovětského teoretického fyzika a nositele Nobelovy ceny za fyziku pro rok 1962.
- **BGK rovnice:** Předpokládáme, že systém není příliš daleko od lokální termodynamické rovnováhy  $f_{LE}$  a srážky způsobují jeho návrat do této rovnováhy, srážkový člen má jednoduchý tvar  $S_\alpha \approx (\Delta f_\alpha / \Delta t)_{col} = -(f_\alpha - f_{LE}) / \tau_c = -\nu_c (f_\alpha - f_{LE})$ , kde  $\tau_c$  je střední doba mezi srážkami a  $\nu_c$  je srážková frekvence (charakteristická konstanta). Rovnice je pojmenována podle autorů, jimiž jsou indický matematik Prabhu Lal Bhatnagar (1912–1976), americký teoretický fyzik Eugene P. Gross (1926–1991) a americký matematik a astrofyzik Max Krook (1913–1985)
- **Vlasovova rovnice:** Srážky zcela zanedbáváme (na pravé straně je nula) a působící silou je jen Lorentzova síla. Nejméně přesná, ale nejčastěji používaná aproximace. Rovnice je pojmenována podle Anatolie Alexandroviče Vlasova (1908–1975), sovětského teoretického fyzika, který se po většinu života věnoval statistické fyzice.

**Příklad:** Ukažte, že stacionární řešení Boltzmannovy (Vlasovovy) rovnice vede na kanonické rozdělení. Řešte v jedné dimenzi, pro jediný druh částic, které nepodléhají srážkám a pro potenciální silové pole  $F = -dV/dx$ .

**Řešení:** Z Boltzmannovy rovnice v tomto případě zbude

$$v \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{m} \frac{dV}{dx} \frac{\partial f}{\partial v} = 0.$$

Rovnici řešíme substitucí  $f(x, v) = F(x)G(v)$ . Pokusíme se separovat proměnné:

$$v \frac{dF}{dx} G - \frac{1}{m} \frac{dV}{dx} F \frac{dG}{dv} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dF}{F dV} = \frac{1}{m} \frac{dG}{G v dv}$$

Na levé straně rovnosti jsou všechny proměnné funkcí souřadnice, na pravé straně funkcí rychlosti. Je zřejmé, že mají-li se sobě rovnat dvě funkce různých proměnných, musí být obě konstantní. Označme tuto konstantu  $-\beta$ :

$$\frac{1}{F} \frac{dF}{dV} = -\beta \quad \Rightarrow \quad \frac{dF}{F} = -\beta dV \quad \Rightarrow \quad F(x) = K_x \exp[-\beta V(x)]$$

$$\frac{1}{mGv} \frac{dG}{dv} = -\beta \quad \Rightarrow \quad \frac{dG}{G} = -\beta m v dv \quad \Rightarrow \quad G(v) = K_v \exp[-\beta m v^2 / 2]$$

Celkové řešení je

$$f(x, v) = F(x) \cdot G(v) = K \exp \left[ -\beta \left( \frac{m v^2}{2} + V(x) \right) \right]$$

Řešení má skutečně charakter kanonického rozdělení. Hodnotu koeficientu  $\beta$  bychom zjistili porovnáním s termodynamikou, stejně jako při odvození kanonického rozdělení [3]. Vyjde

$$\beta = \frac{1}{k_B T}. \quad (2.6)$$

◆

**Poznámka:** Z rovnovážného rozdělení a kvazineutrality plyne okamžitě rovnice pro poměrné zastoupení iontů různé násobnosti v plazmatu. Tuto rovnici poprvé odvodil indický astrofyzik Mehd Nad Saha (1893–1956) v roce 1920 a nezávisle na něm v roce 1923 také americký fyzik a chemik Irwing Langmuir (1881–1957). Dnes se zapisuje ve tvaru

$$\frac{n_{i+1} n_e}{n_i} = C \frac{g_{i+1} g_e}{g_i} \exp \left[ -\frac{\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i}{k_B T} \right]; \quad C = \frac{(2\pi m_e k_B T)^{3/2}}{(2\pi \hbar)^3}, \quad (2.7)$$

kde  $g_i$  je stupeň degenerace pro ionty násobnosti  $i$ ,  $g_e$  je stupeň degenerace elektronů, zpravidla se pokládá roven 2,  $\varepsilon_i$  je energie potřebná k vytvoření iontu násobnosti  $i$  (k odstranění  $i$  elektronů z obalu). Faktor  $(2\pi \hbar)^3$  je velikost jednoho kvantového stavu elektronu ve fázovém prostoru, podrobněji viz [3]. Sahaova rovnice se často používá pro určení koncentrace elektronů při jednonásobné ionizaci, kdy  $n_i = n_e$ :

$$\frac{n_e^2}{n_n} = C \frac{2g_1}{g_0} \exp \left[ -\frac{I}{k_B T} \right], \quad (2.8)$$

kde  $I$  je ionizační energie.

## ■ Boltzmannova rovnice v chaotických rychlostech

Vždy musíme rozlišovat mezi třemi rychlostmi:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{v}_\alpha & \text{ fázová proměnná} \\
 \mathbf{u}_\alpha(t, \mathbf{x}) \equiv \langle \mathbf{v}_\alpha \rangle & \text{ rychlostní pole (průměrná, středovaná rychlost)} \\
 \mathbf{w}_\alpha \equiv \mathbf{v}_\alpha - \mathbf{u}_\alpha & \text{ chaotická (tepelná) složka rychlosti}
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

Doposud jsme využívali fázový prostor se sedmi proměnnými  $(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}_\alpha)$ . Fázová rychlost obsahuje část odpovídající proudění i tepelnou část  $(\mathbf{v}_\alpha = \mathbf{u}_\alpha + \mathbf{w}_\alpha)$ . Někdy je výhodné pracovat s proměnnými obsahujícími jen tepelnou část pohybu, tj. provést transformaci

$$(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}_\alpha) \rightarrow (t, \mathbf{x}, \mathbf{w}_\alpha).$$

V Boltzmannově rovnici potom musíme nahradit derivace a rychlosti podle schématu:

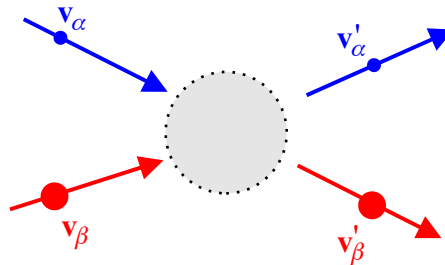
$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial t} & \rightarrow \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial w_k}{\partial t} \frac{\partial}{\partial w_k} = \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial u_k}{\partial t} \frac{\partial}{\partial w_k}, \\
 \frac{\partial}{\partial x_j} & \rightarrow \frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{\partial w_k}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial w_k} = \frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial w_k}, \\
 \frac{\partial}{\partial v_j} & \rightarrow \frac{\partial}{\partial w_j}, \\
 v_j & \rightarrow w_j + u_j(t, \mathbf{x}).
 \end{aligned}$$

Výsledek je

$$\boxed{
 \begin{aligned}
 \frac{d f_\alpha}{dt} + (\mathbf{w}_\alpha \cdot \nabla_{\mathbf{x}}) f_\alpha + \left( \frac{\mathbf{F}_\alpha}{m_\alpha} - \frac{d \mathbf{u}_\alpha}{dt} \right) \cdot \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{w}_\alpha} - [(\mathbf{w}_\alpha \cdot \nabla_{\mathbf{x}}) \mathbf{u}_\alpha] \cdot \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{w}_\alpha} = \sum_{\beta} S_{\alpha\beta}, \\
 \text{kde } \frac{d}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}_\alpha \cdot \nabla_{\mathbf{x}}.
 \end{aligned}
 } \tag{2.10}$$

### 2.1.2 Boltzmannův srážkový člen

V této kapitole se budeme zabývat pravou stranou Boltzmannovy rovnice, tedy srážkami. Předpokládejme pružnou srážku dvou částic  $\alpha$  a  $\beta$ .



Nejprve přejdeme od rychlostí částic  $\mathbf{v}_\alpha$  a  $\mathbf{v}_\beta$  k relativní  $\mathbf{v}_{\alpha\beta}$  a těžišťové  $\mathbf{v}_{(\alpha\beta)}$  rychlosti. Transformace jedním směrem má tvar:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{v}_{\alpha\beta} & = \mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v}_\beta; \\
 \mathbf{v}_{(\alpha\beta)} & = \frac{m_\alpha \mathbf{v}_\alpha + m_\beta \mathbf{v}_\beta}{m_\alpha + m_\beta}.
 \end{aligned} \tag{2.11}$$

Inverzní transformace má tvar (determinant matice je roven jedné, takže stačí najít ke každému prvku subdeterminanty, opatřit je znaménkem a poté vzniklou matici transponovat):

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_\alpha &= \mathbf{v}_{(\alpha\beta)} + \frac{m_\beta}{m_\alpha + m_\beta} \mathbf{v}_{\alpha\beta}; \\ \mathbf{v}_\beta &= \mathbf{v}_{(\alpha\beta)} - \frac{m_\alpha}{m_\alpha + m_\beta} \mathbf{v}_{\alpha\beta}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Zformulujme v nových proměnných zákon zachování energie a hybnosti:

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= m_\alpha \mathbf{v}_\alpha + m_\beta \mathbf{v}_\beta = (m_\alpha + m_\beta) \mathbf{v}_{(\alpha\beta)} = \text{const}, \\ E &= \frac{1}{2} m_\alpha \mathbf{v}_\alpha^2 + \frac{1}{2} m_\beta \mathbf{v}_\beta^2 = \frac{1}{2} (m_\alpha + m_\beta) \mathbf{v}_{(\alpha\beta)}^2 + \frac{1}{2} \frac{m_\alpha m_\beta}{m_\alpha + m_\beta} \mathbf{v}_{\alpha\beta}^2 = \text{const}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Zákon zachování hybnosti vede na zachování těžišťové rychlosti. Zákon zachování energie v kombinaci se zákonem zachování hybnosti vede na zachování velikosti vzájemné rychlosti:

- *Těžišťová rychlost obou částic se při srážce nemění.*
- *Velikost vzájemné rychlosti dvou částic se při srážce nemění.*

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{(\alpha\beta)} &= \text{const}, \\ |\mathbf{v}_{\alpha\beta}| &= \text{const}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Jediná veličina, která se při srážce mění, je směr vzájemné rychlosti. Zavedme proto dvě nové veličiny charakterizující srážku:

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_{\alpha\beta} &\equiv |\mathbf{v}_{\alpha\beta}|; \\ \mathbf{k}_{\alpha\beta} &\equiv \frac{\mathbf{v}_{\alpha\beta}}{|\mathbf{v}_{\alpha\beta}|}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

První veličina je velikost vzájemné rychlosti a po celou dobu srážky se nemění ( $\mathbf{g}_{\alpha\beta} = \mathbf{g}'_{\alpha\beta}$ ).

Druhá veličina je směr vzájemné rychlosti a představuje 2 stupně volnosti srážky (dvě složky vektoru  $\mathbf{k}$ , třetí lze dopočítat, protože jde o vektor jednotkový). V literatuře se často označuje vzájemná rychlost symbolem  $\mathbf{g}$ , neboli  $\mathbf{v}_{\alpha\beta} = \mathbf{g}_{\alpha\beta}$ .

### ■ Účinný průřez srážky

Standardně se zavádí účinný průřez srážky částic druhu  $\alpha$  nalétávajících na částice druhu  $\beta$  pomocí vztahu pro srážkovou frekvenci

$$\nu_\alpha = \sum_\beta \nu_{\alpha\beta} = \sum_\beta \sigma_{\alpha\beta} n_\beta \bar{v}_{\alpha\beta} \quad (2.16)$$

Účinný průřez je definován jako „účinná plocha“ částice  $\beta$  na kterou nalétává částice  $\alpha$ . Frekvence srážek je pak samozřejmě úměrná účinnému průřezu, průměrné hodnotě vzájemné rychlosti obou druhů částic a koncentraci cílových částic.

V našem případě srážky dvou částic zavedeme účinný průřez zcela analogicky – půjde o podmíněnou pravděpodobnost (za podmínky konstantního  $\mathbf{g}_{\alpha\beta}$ ), kterou označíme

$$\sigma(\mathbf{k}_{\alpha\beta} | \mathbf{k}'_{\alpha\beta}; \mathbf{g}_{\alpha\beta}),$$

a která je normována tak, aby

$$\frac{dw}{dt} = g_{\alpha\beta} \sigma(\mathbf{k}_{\alpha\beta} | \mathbf{k}'_{\alpha\beta}; g_{\alpha\beta}) d^2 \mathbf{k}'_{\alpha\beta} \quad (2.17)$$

byla časová změna podmíněné pravděpodobnosti, že jednotkový vektor ve směru relativní rychlosti bude po srážce ležet v intervalu  $(\mathbf{k}'_{\alpha\beta}, \mathbf{k}'_{\alpha\beta} + d\mathbf{k}'_{\alpha\beta})$ .

Účinný průřez se nemění při:

- obrácení pohybu částic:  $\sigma(\mathbf{k}_{\alpha\beta} | \mathbf{k}'_{\alpha\beta}; g_{\alpha\beta}) = \sigma(-\mathbf{k}'_{\alpha\beta} | -\mathbf{k}_{\alpha\beta}; g_{\alpha\beta})$ ,
- při inverzi souřadnicové soustavy:  $\sigma(\mathbf{k}_{\alpha\beta} | \mathbf{k}'_{\alpha\beta}; g_{\alpha\beta}) = \sigma(-\mathbf{k}_{\alpha\beta} | -\mathbf{k}'_{\alpha\beta}; g_{\alpha\beta})$ .

Z obou vlastností plyne důležitý symetrický vztah

$$! \quad \sigma(\mathbf{k}_{\alpha\beta} | \mathbf{k}'_{\alpha\beta}; g_{\alpha\beta}) = \sigma(\mathbf{k}'_{\alpha\beta} | \mathbf{k}_{\alpha\beta}; g_{\alpha\beta}). \quad (2.18)$$

### ■ Boltzmannův srážkový integrál

Nyní již můžeme napsat srážkový člen na pravé straně Boltzmannovy rovnice jako

$$S_{\alpha\beta} = \int \left[ f_{\alpha}(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}'_{\alpha}) f_{\beta}(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}'_{\beta}) - f_{\alpha}(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}_{\alpha}) f_{\beta}(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}_{\beta}) \right] \cdot g_{\alpha\beta} \sigma(\mathbf{k}_{\alpha\beta} | \mathbf{k}'_{\alpha\beta}; g_{\alpha\beta}) d^2 \mathbf{k}'_{\alpha\beta} d^3 \mathbf{v}_{\beta} \quad (2.19)$$

Interpretace je zřejmá. Pravděpodobnost srážky dvou částic je úměrná součinu hustot pravděpodobností obou částic (tj. výskytu částic v daném místě fázového prostoru) násobené účinným průřezem srážky. První člen popisuje příznivé jevy, kdy ze všech ostatních oblastí fázového prostoru se po srážce částice dostanou do daného místa fázového prostoru. Druhý člen jsou nepříznivé případy, kdy částice z daného místa fázového prostoru po srážce uniknou. Integrace je provedena přes volné parametry srážky. Díky vlastnosti (2.18) bylo možné oba účinné průřezy zapsat jednotně a vytknout z hranaté závorky. Srážkový člen ve tvaru (2.19) znamená automatický předpoklad, že pár interagujících částic *není nijak korelovaný*. Tento předpoklad někdy nazýváme podmínkou *molekulárního chaosu*.

### ■ Srážkový invariant

Označme  $\psi_{\alpha}$  nějaký sumační invariant (hmotnost, hybnost, energie), pro který platí

$$\psi_{\alpha} + \psi_{\beta} = \psi'_{\alpha} + \psi'_{\beta}. \quad (2.20)$$

Potom pro srážkový člen platí velmi důležitý vztah

$$! \quad \sum_{\alpha, \beta} \int \psi_{\alpha} S_{\alpha\beta} d^3 \mathbf{v}_{\alpha} = 0. \quad (2.21)$$

Důkaz tohoto vztahu je sice jednoduchý, ale poněkud pracný a proto ho může méně pozorný student vynechat.

**Důkaz:**

$$S = \sum_{\alpha, \beta} \int \psi_{\alpha} S_{\alpha\beta} d^3 \mathbf{v}_{\alpha} = \sum_{\alpha, \beta} \int \psi_{\alpha} \left[ f'_{\alpha} f'_{\beta} - f_{\alpha} f_{\beta} \right] \cdot g_{\alpha\beta} \sigma(\mathbf{k}_{\alpha\beta} | \mathbf{k}'_{\alpha\beta}; g_{\alpha\beta}) d^2 \mathbf{k}'_{\alpha\beta} d^3 \mathbf{v}_{\alpha} d^3 \mathbf{v}_{\beta}$$

V integraci provedeme transformaci k těžišťové a relativní rychlosti podle schématu

$$d^3 \mathbf{v}_{\alpha} d^3 \mathbf{v}_{\beta} = d^3 \mathbf{v}_{(\alpha\beta)} d^3 \mathbf{v}_{\alpha\beta} = d^3 \mathbf{v}_{(\alpha\beta)} g_{\alpha\beta}^2 d g_{\alpha\beta} d^2 \mathbf{k}_{\alpha\beta}.$$

Výsledek bude

$$S = \sum_{\alpha\beta} \int \psi_{\alpha} \left[ f'_{\alpha} f'_{\beta} - f_{\alpha} f_{\beta} \right] g_{\alpha\beta}^3 \sigma(\mathbf{k}_{\alpha\beta} | \mathbf{k}'_{\alpha\beta}; g_{\alpha\beta}) d^2 \mathbf{k}'_{\alpha\beta} d^2 \mathbf{k}_{\alpha\beta} d g_{\alpha\beta} d^3 \mathbf{v}_{(\alpha\beta)}.$$

Nyní zaměníme čárkované a nečárkované veličiny a použijeme relace

$$g'_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}; \quad \mathbf{v}'_{(\alpha\beta)} = \mathbf{v}_{(\alpha\beta)}; \quad \sigma(\mathbf{k} | \mathbf{k}'; g_{\alpha\beta}) = \sigma(\mathbf{k}' | \mathbf{k}; g_{\alpha\beta})$$

Výsledek bude

$$S = \sum_{\alpha\beta} \int \psi'_{\alpha} \left[ f_{\alpha} f_{\beta} - f'_{\alpha} f'_{\beta} \right] g_{\alpha\beta}^3 \sigma(\mathbf{k}_{\alpha\beta} | \mathbf{k}'_{\alpha\beta}; g_{\alpha\beta}) d^2 \mathbf{k}'_{\alpha\beta} d^2 \mathbf{k}_{\alpha\beta} d g_{\alpha\beta} d^3 \mathbf{v}_{(\alpha\beta)}.$$

Jako další krok provedeme symetrizaci, napíšeme výsledek jako polovinu posledního kroku a polovinu předposledního:

$$S = \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} \int (\psi_{\alpha} - \psi'_{\alpha}) \left[ f'_{\alpha} f'_{\beta} - f_{\alpha} f_{\beta} \right] g_{\alpha\beta}^3 \sigma(\mathbf{k}_{\alpha\beta} | \mathbf{k}'_{\alpha\beta}; g_{\alpha\beta}) d^2 \mathbf{k}'_{\alpha\beta} d^2 \mathbf{k}_{\alpha\beta} d g_{\alpha\beta} d^3 \mathbf{v}_{(\alpha\beta)}.$$

V dalším kroku zaměníme indexy  $\alpha$  a  $\beta$  a opět provedeme symetrizaci:

$$S = \frac{1}{4} \sum_{\alpha\beta} \int (\psi_{\alpha} + \psi_{\beta} - \psi'_{\alpha} - \psi'_{\beta}) \left[ f'_{\alpha} f'_{\beta} - f_{\alpha} f_{\beta} \right] g_{\alpha\beta}^3 \sigma(\dots) d^2 \mathbf{k}'_{\alpha\beta} d^2 \mathbf{k}_{\alpha\beta} d g_{\alpha\beta} d^3 \mathbf{v}_{(\alpha\beta)}.$$

Pro sumační invarianty je ale první závorka nulová a proto  $S = 0$ . ◆

### 2.1.3 Rovnice přenosu (momentová rovnice)

Často nepotřebujeme pravděpodobnostní informace o celém fázovém prostoru, ale postačí nám informace jen o vývoji dynamických proměnných v čase a v poloze. Přes informace o rozložení v rychlostech je možné vystředovat. Nezapomeňte, že pravděpodobnosti jsou normovány k počtu částic a proto podle (2.3) je

$$\mathbf{u}_{\alpha}(t, \mathbf{x}) = \frac{\int \mathbf{v}_{\alpha} f_{\alpha}(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}_{\alpha}) d^3 \mathbf{v}_{\alpha}}{\int f_{\alpha}(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}_{\alpha}) d^3 \mathbf{v}_{\alpha}}.$$

Ztráta informace o proměnné  $\mathbf{v}_{\alpha}$  způsobená středováním vede od statistiky k rovnicím kontinua. Vynásobme Boltzmannovu rovnici (2.5) libovolným sumačním invariantem  $\phi_{\alpha}(\mathbf{v}_{\alpha})$  a vystředujme přes rychlostní proměnné:

$$\int \phi_{\alpha} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial t} d^3 \mathbf{v}_{\alpha} + \int \phi_{\alpha} (\mathbf{v}_{\alpha} \cdot \nabla_{\mathbf{x}}) f_{\alpha} d^3 \mathbf{v}_{\alpha} + \int \frac{\phi_{\alpha}}{m_{\alpha}} (\mathbf{F}_{\alpha} \cdot \nabla_{\mathbf{v}}) f_{\alpha} d^3 \mathbf{v}_{\alpha} = \int \phi_{\alpha} \sum_{\beta} S_{\alpha\beta} d^3 \mathbf{v}_{\alpha}.$$

Postupně nyní upravíme všechny tři členy na levé straně:

*První člen:*

$$\int \phi_{\alpha}(\mathbf{v}_{\alpha}) \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial t} d^3 \mathbf{v}_{\alpha} = \frac{\partial}{\partial t} \int \phi_{\alpha} f_{\alpha} d^3 \mathbf{v}_{\alpha} = \frac{\partial}{\partial t} n_{\alpha}(t, \mathbf{x}) \langle \phi_{\alpha} \rangle_{\mathbf{v}} = \frac{\partial}{\partial t} \langle n_{\alpha} \phi_{\alpha} \rangle_{\mathbf{v}}.$$

*Druhý člen:*

$$\int \phi_{\alpha}(\mathbf{v}_{\alpha}) v_{k\alpha} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial x_k} d^3 \mathbf{v}_{\alpha} = \frac{\partial}{\partial x_k} \int \phi_{\alpha}(\mathbf{v}_{\alpha}) v_{k\alpha} f_{\alpha} d^3 \mathbf{v}_{\alpha} = \frac{\partial}{\partial x_k} n_{\alpha}(t, \mathbf{x}) \langle \phi_{\alpha} v_{k\alpha} \rangle_{\mathbf{v}} = \frac{\partial}{\partial x_k} \langle n_{\alpha} \phi_{\alpha} v_{k\alpha} \rangle_{\mathbf{v}}$$

Třetí člen:

$$\int \frac{\phi_\alpha(\mathbf{v}_\alpha)}{m_\alpha} F_{k\alpha}(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}_\alpha) \frac{\partial f_\alpha}{\partial v_{k\alpha}} d^3 \mathbf{v}_\alpha \stackrel{\text{(p.p.)}}{=} \left[ \frac{\phi_\alpha F_{k\alpha} f_\alpha}{m_\alpha} \right]_{\partial\Omega} - \frac{1}{m_\alpha} \int \frac{\partial}{\partial v_{k\alpha}} [\phi_\alpha F_{k\alpha}] f_\alpha d^3 \mathbf{v}_\alpha =$$

$$= - \frac{1}{m_\alpha} \left\langle n_\alpha \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_\alpha} (\phi_\alpha \mathbf{F}_\alpha) \right\rangle_{\mathbf{v}}.$$

Při úpravě třetího členu musíme předpokládat, že silové pole může být i funkcí rychlostí (například magnetická složka Lorentzovy síly). Provedli jsme integraci per partes. První člen je nulový, protože na hranicích oblasti předpokládáme nulové hustoty pravděpodobnosti výskytu částic. Středováním přes rychlostní prostor z Boltzmannovy rovnice zůstane

$$! \quad \frac{\partial}{\partial t} \langle n_\alpha \phi_\alpha \rangle_{\mathbf{v}} + \frac{\partial}{\partial x_i} \langle n_\alpha \phi_\alpha v_{i\alpha} \rangle_{\mathbf{v}} - \frac{1}{m_\alpha} \left\langle n_\alpha \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_\alpha} (\phi_\alpha \mathbf{F}_\alpha) \right\rangle_{\mathbf{v}} = \int \phi_\alpha \sum_{\beta} S_{\alpha\beta} d^3 \mathbf{v}_\alpha. \quad (2.22)$$

Jde o rovnici přenosu (momentovou rovnici), která je základem *teorie kontinua*. Než si o této rovnici řekneme trochu více, napíšeme ji pro elektromagnetickou interakci

$$\mathbf{F}_\alpha = Q_\alpha \mathbf{E} + Q_\alpha \mathbf{v}_\alpha \times \mathbf{B}.$$

Při derivování třetího členu v rychlostech musíme přejít buď ke složkám nebo využít definice vektorového součinu přes Levi-Civitův tenzor. Postup je přímočarý s výsledkem:

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle n_\alpha \phi_\alpha \rangle_{\mathbf{v}} + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \langle n_\alpha \phi_\alpha \mathbf{v}_\alpha \rangle_{\mathbf{v}} - \frac{Q_\alpha}{m_\alpha} \left\langle n_\alpha (\mathbf{E} + \mathbf{v}_\alpha \times \mathbf{B}) \cdot \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial \mathbf{v}_\alpha} \right\rangle_{\mathbf{v}} = \int \phi_\alpha \sum_{\beta} S_{\alpha\beta} d^3 \mathbf{v}_\alpha \quad (2.23)$$

### Poznámky:

- Statistická fyzika využívá proměnné  $(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}_\alpha)$ . Po středování přes rychlostní prostor ztrácíme část informace. Vystředované proměnné jsou jen funkcí  $(t, \mathbf{x})$ . Sama střední hodnota rychlosti  $\mathbf{u}_\alpha(t, \mathbf{x})$  se ale v rovnicích kontinua samozřejmě objevuje. Jen ztrácíme statistickou informaci o rychlostní části fázového prostoru.
- Celá rovnice přenosu má tvar rovnice kontinuity. První člen je časová derivace hustoty aditivní veličiny, pak následuje divergence toku veličiny. Třetí člen odpovídá zdrojovým členům od polí a pravá strana zdrojovým členům od srážek. Proto se rovnici říká *rovnice přenosu* – popisuje, jak tečou (přenášá se) různé veličiny.
- V rovnici přenosu je volná funkce rychlosti  $\phi_\alpha$ . Za ní se dosazují různé mocniny rychlosti a tím získáváme tzv. momenty Boltzmannovy rovnice. Proto se rovnici přenosu říká *momentová rovnice*.
- Pokud byla funkce  $\phi_\alpha$  sumačním invariantem, bude po sečtení všech rovnic (2.23) pravá strana nulová, tj. členy od srážek se vyruší. Plyne to okamžitě ze vztahu (2.21):

$$\sum_{\alpha} \frac{\partial}{\partial t} \langle n_\alpha \phi_\alpha \rangle_{\mathbf{v}} + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \langle n_\alpha \phi_\alpha \mathbf{v}_\alpha \rangle_{\mathbf{v}} - \frac{Q_\alpha n_\alpha}{m_\alpha} \left\langle (\mathbf{E} + \mathbf{v}_\alpha \times \mathbf{B}) \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial \mathbf{v}_\alpha} \right\rangle_{\mathbf{v}} = 0.$$

Tomuto přiblížení říkáme jednotekutinový model a velmi často se používá.

- Pro nulý moment můžeme položit  $\phi_\alpha$  rovno  $m_\alpha$  a v jednotekutinovém přiblížení dostaneme rovnici kontinuity:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \frac{\partial}{\partial x_i} j_i = 0; \quad \rho \equiv \sum_{\alpha} \rho_{\alpha}, \quad \mathbf{j} \equiv \sum_{\alpha} m_{\alpha} n_{\alpha} \mathbf{u}_{\alpha}.$$

Z rovnice kontinuity počítáme časový vývoj hustoty (nulého momentu Boltzmannovy rovnice). Ve druhém členu se ale objevila nová veličina – tok hmoty  $\mathbf{j}$  obsahující střední hodnotu rychlosti



proudění. Proto musíme mít i rovnici pro časový vývoj toku hmoty (hustoty hybnosti) neboli pohybovou rovnici. Získáme ji jako první moment Boltzmannovy rovnice položením  $\phi_\alpha = m_\alpha v_{i\alpha}$ :

$$\frac{\partial}{\partial t} J_i + \frac{\partial}{\partial x_j} P_{ij} = 0.$$

V pohybové rovnici se objevuje další nová veličina – tenzor tlaku. Obsahuje dynamický tlak (tok hybnosti), běžný tlak látky (skalární složka odpovídající chaotickému pohybu), viskozitu (tenzorová část tlaku) a u elektromagnetické interakce Maxwellův tenzor prnutí (tlak způsobený přítomností elektrických a magnetických polí). Jako další moment Boltzmannovy rovnice získáme rovnici pro časový vývoj tenzoru tlaku (odpovídá rovnici pro přenos energie, jde o kvadráty rychlostí):

$$\frac{\partial}{\partial t} P_{ij} + \frac{\partial}{\partial x_k} Q_{ijk} = 0.$$

V druhém členu se opět objevuje nová veličina popisující tepelný tok. V této proceduře bychom mohli pokračovat libovolně daleko a získáme tak nekonečnou posloupnost momentových rovnic pro kontinuum. V praxi se soustava uzavírá nějakým algebraickým vztahem (například Fourierovým zákonem pro tepelný tok) po konečném počtu momentů.

- V teorii plazmatu se často využívá i vícetekutinový model (plazma se skládá z tekutiny elektronů, tekutin různých typů iontů a tekutiny neutrálních částic). V tomto přiblížení nevymizí srážkové členy a je třeba s nimi počítat.
- Chceme-li úplnější informaci o systému, musíme řešit Boltzmannovou rovnici doplněnou o příslušné polní rovnice. Postačí-li nám informace na úrovni kontinua, opíráme naše výpočty o soustavu momentových rovnic.

Odvoďme nyní první tři momenty Boltzmannovy rovnice zapsané pomocí střední rychlosti proudění  $\mathbf{u}_\alpha \equiv \langle \mathbf{v}_\alpha \rangle$  a tepelné rychlosti  $\mathbf{w}_\alpha \equiv \mathbf{v}_\alpha - \mathbf{u}_\alpha$ . V momentové rovnici (2.23) dosadíme za  $\phi_\alpha$  postupně funkce  $m_\alpha$  nebo  $Q_\alpha$ ,  $m_\alpha v_{\alpha k}$  a  $m_\alpha v_\alpha^2 / 2$  a poté rychlost rozdělíme na uspořádanou a tepelnou část  $v_{\alpha k} = u_{\alpha k} + w_{\alpha k}$ . Nezapomeňte, že  $\langle \mathbf{w}_\alpha \rangle = 0$ .

## 2.2. Přejchod od statistiky ke kontinuu

### 2.2.1 Nultý moment (zachování hmoty, náboje a počtu částic) – částicová část

Za funkci  $\phi_\alpha$  postupně dosadíme skaláry  $m_\alpha$ ,  $Q_\alpha$  a 1. Tím dostaneme zákony zachování hmotnosti, náboje a počtu částic. Pro nultý moment jsou srážkové členy všech pravých stran nulové, neboť se coulombickou srážkou nemění hmotnost, náboj ani počet částic. Připomeňme, že v celé této kapitole platí sčítací konvence pro indexy psané latinkou ( $i, j, k, \dots$ ). Neplatí pro řecké indexy popisující druh částic. Pokud bude potřeba index psát do horní části symbolu, umístíme ho do závorky, aby se odlišil od mocniny. Šikmo jsou sázeny jen proměnné, do kterých lze dosadit. Výsledné zákony zachování (rovnice kontinuity) jsou:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_{m,\alpha}}{\partial t} + \frac{\partial j_k^{(m,\alpha)}}{\partial x_k} &= 0, \\ \frac{\partial \rho_{Q,\alpha}}{\partial t} + \frac{\partial j_k^{(Q,\alpha)}}{\partial x_k} &= 0, \quad \alpha = e, i, ii, n, \dots \\ \frac{\partial n_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial n_\alpha u_{\alpha k}}{\partial x_k} &= 0. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Někdy je namísto složkového zápisu vhodný invariantní zápis (nezávislý na zvolené souřadnicové bázi):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_{m,\alpha}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \mathbf{j}_{m,\alpha} &= 0, \\ \frac{\partial \rho_{Q,\alpha}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \mathbf{j}_{Q,\alpha} &= 0, \quad \alpha = e, i, ii, n, \dots \\ \frac{\partial n_\alpha}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (n_\alpha \mathbf{u}_\alpha) &= 0. \end{aligned} \quad (2.25)$$

V časových derivacích vystupuje postupně hustota hmoty, hustota náboje a koncentrace částic druhu  $\alpha$ . V prostorových derivacích je tok hmoty, tok náboje a tok počtu částic druhu  $\alpha$ . Všechny tyto veličiny jsou již jen funkcí času a prostoru a jsou definovány vztahy (použijeme jen invariantní zápis):

$$\begin{aligned} \rho_{m,\alpha} &= m_\alpha n_\alpha = \int m_\alpha f_\alpha d^3 \mathbf{v}_\alpha, \\ \rho_{Q,\alpha} &= Q_\alpha n_\alpha = \int Q_\alpha f_\alpha d^3 \mathbf{v}_\alpha \\ \mathbf{j}_{m,\alpha} &= m_\alpha n_\alpha \mathbf{u}_\alpha = \int m_\alpha \mathbf{v}_\alpha f_\alpha d^3 \mathbf{v}_\alpha, \\ \mathbf{j}_{Q,\alpha} &= Q_\alpha n_\alpha \mathbf{u}_\alpha = \int Q_\alpha \mathbf{v}_\alpha f_\alpha d^3 \mathbf{v}_\alpha, \end{aligned} \quad (2.26)$$

Po sečtení momentových rovnic pro všechny druhy částic (přes  $\alpha$ ) získáme

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \mathbf{j}_m &= 0, \\ \frac{\partial \rho_Q}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \mathbf{j}_Q &= 0, \\ \frac{\partial n}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (n\mathbf{u}) &= 0, \end{aligned} \quad (2.27)$$

kde jsme označili

$$\begin{aligned}
 \rho_m &\equiv \sum_{\alpha} \rho_{m,\alpha} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} n_{\alpha}, & \rho_Q &\equiv \sum_{\alpha} \rho_{Q,\alpha} = \sum_{\alpha} Q_{\alpha} n_{\alpha}, \\
 \mathbf{j}_m &\equiv \sum_{\alpha} \mathbf{j}_{m,\alpha} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} n_{\alpha} \mathbf{u}_{\alpha}, & \mathbf{j}_Q &\equiv \sum_{\alpha} \mathbf{j}_{Q,\alpha} = \sum_{\alpha} Q_{\alpha} n_{\alpha} \mathbf{u}_{\alpha}, \\
 n &\equiv \sum_{\alpha} n_{\alpha}, & \mathbf{u} &\equiv \frac{\sum_{\alpha} m_{\alpha} n_{\alpha} \mathbf{u}_{\alpha}}{\sum_{\alpha} m_{\alpha} n_{\alpha}}.
 \end{aligned} \tag{2.28}$$

### 2.2.2 Nultý moment – polní část

Výpočet polí pro Boltzmannovu nebo momentovou rovnici vychází ze soustavy Maxwellových rovnic

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho_Q, \tag{2.29}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \tag{2.30}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \tag{2.31}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j}_Q + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \tag{2.32}$$

Zdrojové členy jsou dány vztahy

$$\begin{aligned}
 \rho_Q &= \sum_{\alpha} Q_{\alpha} n_{\alpha} = \sum_{\alpha} \int Q_{\alpha} f_{\alpha} d^3 \mathbf{v}_{\alpha}, \\
 \mathbf{j}_Q &= \sum_{\alpha} Q_{\alpha} n_{\alpha} \mathbf{u}_{\alpha} = \sum_{\alpha} \int Q_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha} f_{\alpha} d^3 \mathbf{v}_{\alpha}.
 \end{aligned} \tag{2.33}$$

Zdrojové členy Maxwellových rovnic jsou v souladu s nultým momentem Boltzmannovy rovnice. Pokud sečteme parciální derivaci rovnice (2.29) podle času a divergenci rovnice (2.32), obdržíme zákon zachování náboje

$$\frac{\partial \rho_Q}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \mathbf{j}_Q = 0,$$

který jsme již odvodili jako nultý moment Boltzmannovy rovnice (2.27).

*V odvození dalších momentů budeme předpokládat, že v popisovaném plazmatu platí lineární závislost mezi oběma elektrickými vektory  $\mathbf{E}$  a  $\mathbf{D}$  a oběma magnetickými vektory  $\mathbf{B}$  a  $\mathbf{H}$ .*

### 2.2.3 První moment (zachování hybnosti) – částicová část

Do momentové rovnice nyní dosadíme za  $\phi_{\alpha}$  vztah pro  $l$ -tou složku hybnosti  $\phi_{\alpha} = m_{\alpha} v_{\alpha l}$ , která je sumačním invariantem. Po dosazení budou mít momentové rovnice pro jednotlivé druhy částic tvar:

$$\frac{\partial}{\partial t} (n_{\alpha} m_{\alpha} u_{\alpha l}) + \frac{\partial}{\partial x_k} (n_{\alpha} m_{\alpha} \langle v_{\alpha l} v_{\alpha k} \rangle_{\mathbf{v}}) = n_{\alpha} Q_{\alpha} (\mathbf{E} + \mathbf{u}_{\alpha} \times \mathbf{B})_l + \int m_{\alpha} v_{\alpha l} \sum_{\beta} S_{\alpha\beta} d^3 \mathbf{v}_{\alpha}.$$

První člen je časovou změnou hustoty hybnosti částic druhu  $\alpha$ . Druhý člen je prostorovou derivací toku hybnosti. Tok hybnosti je tenzorem druhého řádu, neboť každá složka hybnosti může téct ve třech nezávislých směrech. V tomto členu rozepíšeme rychlosti na chaotickou

a uspořádanou část dle vztahu  $v_{\alpha k} = w_{\alpha k} + u_{\alpha k}$  a roznásobíme. Členy úměrné první mocnině chaotické rychlosti mají nulovou střední hodnotu a vypadnou. Zůstanou jen dva členy. První souvisí s uspořádanou složkou rychlosti a nazýváme ho dynamický tlak  $D_{kl}$ . Druhý souvisí s chaotickým pohybem a nazýváme ho tenzor tlaku  $P_{kl}$ . Celá levá strana má tvar rovnice kontinuity a tedy tvar zákona zachování  $l$ -té složky hybnosti. Nenulové členy na pravé straně znamenají, že se hybnost nezachovává. První člen popisuje nezachování způsobené přítomností polí (elektromagnetické pole předává hybnost částicím) a druhý nezachování hybnosti způsobené srážkami. Výsledný vztah tedy je:

$$\frac{\partial}{\partial t} \gamma_{\alpha l} + \frac{\partial}{\partial x_k} T_{lk}^{(\alpha)} = f_{\alpha l} + \Gamma_{\alpha l}, \quad (2.34)$$

kde jednotlivé členy jsou definovány takto:

$$\begin{aligned} \gamma_{\alpha l} &\equiv n_{\alpha} m_{\alpha} u_{\alpha l} = m_{\alpha} \int v_{\alpha l} f_{\alpha} d^3 \mathbf{v}_{\alpha}; \\ T_{lk}^{(\alpha)} &\equiv n_{\alpha} m_{\alpha} u_{\alpha l} u_{\alpha k} + n_{\alpha} m_{\alpha} \langle w_{\alpha l} w_{\alpha k} \rangle_{\mathbf{v}} = D_{lk}^{(\alpha)} + P_{lk}^{(\alpha)}; \\ D_{lk}^{(\alpha)} &\equiv n_{\alpha} m_{\alpha} u_{\alpha l} u_{\alpha k}; \\ P_{lk}^{(\alpha)} &\equiv n_{\alpha} m_{\alpha} \langle w_{\alpha l} w_{\alpha k} \rangle_{\mathbf{v}} = m_{\alpha} \int (v_{\alpha l} - u_{\alpha l})(v_{\alpha k} - u_{\alpha k}) f_{\alpha} d^3 \mathbf{v}_{\alpha}; \\ f_{\alpha l} &\equiv n_{\alpha} Q_{\alpha} (\mathbf{E} + \mathbf{u}_{\alpha} \times \mathbf{B})_l = (\rho_{Q,\alpha} \mathbf{E} + \mathbf{j}_{Q,\alpha} \times \mathbf{B})_l; \\ \Gamma_{\alpha l} &\equiv m_{\alpha} \int v_{\alpha l} \sum_{\beta} S_{\alpha\beta} d^3 \mathbf{v}_{\alpha}. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Členy jsou vázány na druh částic  $\alpha$  a postupně mají význam: hustota hybnosti, tenzor toku hybnosti, tenzor dynamického tlaku, tenzor tlaku, hustota Lorentzovy síly, časová změna hustoty hybnosti způsobená srážkami. Zapišme nyní zákon zachování hybnosti částic druhu  $\alpha$  invariantně:

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{\gamma}_{\alpha} + \bar{\nabla} \cdot \bar{\mathbf{T}}_{\alpha} = \bar{\mathbf{f}}_{\alpha} + \bar{\Gamma}_{\alpha}, \quad (2.36)$$

kde pro jednotlivé členy nyní máme

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}_{\alpha} &\equiv n_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{u}_{\alpha} = m_{\alpha} \int \mathbf{v}_{\alpha} f_{\alpha} d^3 \mathbf{v}_{\alpha}; \\ \bar{\mathbf{T}}_{\alpha} &\equiv n_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{u}_{\alpha} \otimes \mathbf{u}_{\alpha} + n_{\alpha} m_{\alpha} \langle \mathbf{w}_{\alpha} \otimes \mathbf{w}_{\alpha} \rangle_{\mathbf{v}} = \bar{\mathbf{D}}_{\alpha} + \bar{\mathbf{P}}_{\alpha}; \\ \bar{\mathbf{D}}_{\alpha} &\equiv n_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{u}_{\alpha} \otimes \mathbf{u}_{\alpha}; \\ \bar{\mathbf{P}}_{\alpha} &\equiv n_{\alpha} m_{\alpha} \langle \mathbf{w}_{\alpha} \otimes \mathbf{w}_{\alpha} \rangle_{\mathbf{v}} = m_{\alpha} \int (\mathbf{v}_{\alpha} - \mathbf{u}_{\alpha}) \otimes (\mathbf{v}_{\alpha} - \mathbf{u}_{\alpha}) f_{\alpha} d^3 \mathbf{v}_{\alpha}; \\ \bar{\mathbf{f}}_{\alpha} &\equiv \rho_{Q,\alpha} \mathbf{E} + \mathbf{j}_{Q,\alpha} \times \mathbf{B}; \\ \bar{\Gamma}_{\alpha} &\equiv \int m_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha} \sum_{\beta} S_{\alpha\beta} d^3 \mathbf{v}_{\alpha}. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Často bývá zvykem tenzor tlaku související s chaotickou složkou rychlosti formálně rozdělit na dvě části tak, aby jedna část představovala skalární tlak a druhá (tenzorová) měla nulovou

stopu. Tato část odpovídá viskozitě a viskózní tenzor se označuje záporným znaménkem (působí proti toku hybnosti):

$$P_{lk}^{(\alpha)} \equiv p_{\alpha} \delta_{lk} - V_{lk}^{(\alpha)} = \frac{1}{3} n_{\alpha} m_{\alpha} \langle w_{\alpha}^2 \rangle_{\mathbf{v}} \delta_{lk} - n_{\alpha} m_{\alpha} \left\langle \frac{1}{3} w_{\alpha}^2 \delta_{lk} - w_{\alpha l} w_{\alpha k} \right\rangle_{\mathbf{v}} ;$$

$$\vec{\mathbf{P}}_{\alpha} \equiv p_{\alpha} \vec{\mathbf{1}} - \vec{\mathbf{V}}_{\alpha} = \frac{1}{3} n_{\alpha} m_{\alpha} \langle w_{\alpha}^2 \rangle_{\mathbf{v}} \vec{\mathbf{1}} - n_{\alpha} m_{\alpha} \left\langle \frac{1}{3} w_{\alpha}^2 \vec{\mathbf{1}} - \mathbf{w}_{\alpha} \otimes \mathbf{w}_{\alpha} \right\rangle_{\mathbf{v}} .$$
(2.38)

Pokud chceme plazma chápat jako jednu jedinou tekutinu, sečteme všechny rovnice (2.36). Vzhledem k tomu, že funkce  $\phi_{\alpha}$  byla sumačním invariantem, srážky se vyruší a získáme jednoduchý tvar zákona zachování hybnosti, který již uvedeme jen v invariantním tvaru

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{\gamma}_{\mathbf{P}} + \vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{T}}_{\mathbf{P}} = \vec{\mathbf{f}} ;$$
(2.39)

kde pro jednotlivé členy máme:

$$\vec{\gamma}_{\mathbf{P}} \equiv \sum_{\alpha} n_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha} ,$$

$$\vec{\mathbf{T}}_{\mathbf{P}} \equiv \vec{\mathbf{D}} + \vec{\mathbf{P}} = \sum_{\alpha} (n_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{u}_{\alpha} \otimes \mathbf{u}_{\alpha}) + \sum_{\alpha} (n_{\alpha} m_{\alpha} \langle \mathbf{w}_{\alpha} \otimes \mathbf{w}_{\alpha} \rangle_{\mathbf{v}}) ,$$

$$\vec{\mathbf{f}} \equiv \rho_{\mathbf{Q}} \mathbf{E} + \mathbf{j}_{\mathbf{Q}} \times \mathbf{B} .$$
(2.40)

Index P znamená, že jde o částice (Particles). Obdobný zákon zachování také odvodíme pro pole. Hustota Lorentzovy síly na pravé straně je časovou změnou hustoty hybnosti, kterou pole předává částicím.

#### 2.2.4 První moment (zachování hybnosti) – polní část

Elektromagnetické pole můžeme chápat jako soustavu fotonů s nulovou klidovou hmotností a hybností

$$\mathbf{p} = m \mathbf{c}$$

Pro hustotu hybnosti pole potom máme

$$\vec{\gamma}_{\mathbf{EM}} = \rho_{\mathbf{m}} \mathbf{c} .$$

Pomocí Einsteinova vztahu mezi hmotou a energií v hustotách  $\rho_{\mathbf{W}} = \rho_{\mathbf{m}} c^2$  máme

$$\vec{\gamma}_{\mathbf{EM}} = \frac{\rho_{\mathbf{W}} \mathbf{c}}{c^2} .$$

V čitateli je součin hustoty energie a rychlosti šíření, tj. tok energie, který je dán Poyntingovým vektorem, proto

$$\vec{\gamma}_{\mathbf{EM}} = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{H}}{c^2} .$$

Vyjádríme-li rychlost světla za pomoci permitivity a permeability ( $c^2 = 1/\epsilon\mu$ ), dostáváme výsledný vztah pro hustotu hybnosti pole:

$$\vec{\gamma}_{\mathbf{EM}} = \mathbf{D} \times \mathbf{B} .$$
(2.41)

Naším cílem je nyní sestavit zákon zachování hybnosti elektromagnetického pole, tedy najít časovou derivaci vztahu (2.41). Při úpravách využijeme Maxwellovy rovnice (2.29) až (2.32):

$$\frac{\partial \vec{\gamma}_{EM}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{D} \times \mathbf{B}) = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \times \mathbf{B} + \mathbf{D} \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = (\text{rot } \mathbf{H} - \mathbf{j}_Q) \times \mathbf{B} + \mathbf{D} \times (-\text{rot } \mathbf{E}) = \dots$$

Následují standardní úpravy, ve kterých členy s prostorovými derivacemi převedeme do tvaru divergence. Lze to provést například za pomoci přepisu vektorových součinů pomocí Levi-Civitova tenzoru. Výsledkem elementárních úprav s využitím Maxwellových rovnic je

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} \vec{\gamma}_{EM} + \vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbb{T}}_{EM} = -\vec{\mathbf{f}}.} \quad (2.42)$$

kde pro jednotlivé členy máme:

$$\begin{aligned} \vec{\gamma}_{EM} &\equiv \mathbf{D} \times \mathbf{B}, \\ \vec{\mathbb{T}}_{EM} &\equiv \vec{\mathbb{T}}_E + \vec{\mathbb{T}}_M, \\ \vec{\mathbb{T}}_E &\equiv \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}}{2} \vec{\mathbf{1}} - \mathbf{E} \otimes \mathbf{D}; & T_{ij}^{(E)} &\equiv \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}}{2} \delta_{ij} - E_i D_j, \\ \vec{\mathbb{T}}_M &\equiv \frac{\mathbf{H} \cdot \mathbf{B}}{2} \vec{\mathbf{1}} - \mathbf{H} \otimes \mathbf{B}; & T_{ij}^{(M)} &\equiv \frac{\mathbf{H} \cdot \mathbf{B}}{2} \delta_{ij} - H_i B_j, \\ \vec{\mathbf{f}} &\equiv \rho_Q \mathbf{E} + \mathbf{j}_Q \times \mathbf{B}. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Tenzor toku hybnosti pole  $\vec{\mathbb{T}}_{EM}$  se nazývá *Maxwellův tenzor pnutí*. Vidíme, že hybnost elektromagnetického pole se nezachovává. Je to dáno předáváním hybnosti pole částicím. Teprve celkový součet hybnosti všech částic a pole má tvar zákona zachování. Získáme ho sečtením rovnic (2.39) a (2.42):

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}(\rho_m \mathbf{u} + \mathbf{D} \times \mathbf{B}) + \vec{\nabla} \cdot \left[ \sum_{\alpha} \vec{\mathbb{T}}_{\alpha} + \vec{\mathbb{T}}_E + \vec{\mathbb{T}}_M \right] = 0.} \quad (2.44)$$

Odvozená rovnice je zákonem zachování hybnosti pro soustavu částic a elektromagnetického pole. První člen v časové derivaci má význam *hustoty hybnosti látky*  $\rho_m \mathbf{u}$ , což je ale současně tok hmoty z rovnice kontinuity. Druhý člen  $\mathbf{D} \times \mathbf{B}$  je *hustotou hybnosti elektromagnetického pole*. V prostorových derivacích se nacházejí *tenzory toku hybnosti částic, elektrického a magnetického pole*.

Zopakujme si na závěr jednotlivé parciální zákony zachování hybnosti. Hybnost samotného pole ani částic se nezachovává:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{D} \times \mathbf{B}) + \vec{\nabla} \cdot (\vec{\mathbb{T}}_E + \vec{\mathbb{T}}_M) &= -\rho_Q \mathbf{E} - \rho_Q \mathbf{u} \times \mathbf{B}, \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho_m \mathbf{u}) + \vec{\nabla} \cdot \left( \sum_{\alpha} \vec{\mathbb{T}}_{\alpha} \right) &= \rho_Q \mathbf{E} + \rho_Q \mathbf{u} \times \mathbf{B}. \end{aligned}$$

Časovou změnou hustoty hybnosti je u částic hustota Lorentzovy síly vystupující na pravé straně. U elektromagnetického pole je na pravé straně člen s opačným znaménkem. Teprve součet obou rovnic dá na pravé straně nulu. V zákonech zachování hybnosti pro jednotlivé druhy částic (momentové rovnice nesečteme) se na pravých stranách objeví ještě nevykompenzované srážkové členy:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_{m,\alpha} \mathbf{u}_{\alpha}) + \vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbb{T}}_{\alpha} = \rho_{Q,\alpha} \mathbf{E} + \rho_{Q,\alpha} \mathbf{u}_{\alpha} \times \mathbf{B} + \sum_{\beta} \int m_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha} S_{\alpha\beta} d^3 \mathbf{v}_{\alpha}.$$

Poznamenejme na závěr, že platí-li zákon zachování hybnosti ve tvaru  $\partial \vec{\gamma} / \partial t + \vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{T}} = 0$ , lze zákon zachování momentu hybnosti psát jako  $\partial \mathcal{M}_{ij} / \partial t + \partial \mathcal{N}_{ijk} / \partial x_k = 0$ , kde hustota momentu hybnosti je  $\mathcal{M}_{ij} = x_i \gamma_j - x_j \gamma_i$  a tok momentu hybnosti je  $\mathcal{N}_{ijk} = x_i T_{jk} - x_j T_{ik}$ .

### 2.2.5 Druhý moment (zachování energie) – částicová část

Volme nyní za  $\phi_\alpha$  kinetickou energii částice druhu  $\alpha$ , tj.  $\phi_\alpha = m_\alpha v_\alpha^2 / 2 = m_\alpha v_{\alpha k} v_{\alpha k} / 2$ . Průběh výpočtu je identický s prvním momentem. Po dosazení do momentové rovnice rozdělíme rychlost na uspořádanou a chaotickou část ( $v_{\alpha k} = w_{\alpha k} + u_{\alpha k}$ ) a všechny členy roznásobíme. Střední hodnoty členů s první mocninou chaotické rychlosti dají nulu a zbývající dají zákon zachování energie ve tvaru:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\rho_{m,\alpha} u_\alpha^2}{2} + e_\alpha \right) + \nabla \cdot \left( \frac{\rho_{m,\alpha} u_\alpha^2}{2} \mathbf{u}_\alpha + e_\alpha \mathbf{u}_\alpha + \vec{\mathbf{P}}_\alpha \cdot \vec{\mathbf{u}}_\alpha + \mathbf{q}_\alpha \right) = \mathbf{j}_{Q,\alpha} \cdot \mathbf{E} + \mathcal{E}_\alpha; \quad (2.45)$$

$$e_\alpha \equiv \rho_{m,\alpha} \left\langle \frac{w_\alpha^2}{2} \right\rangle; \quad \mathbf{q}_\alpha \equiv \rho_\alpha \left\langle \frac{w_\alpha^2}{2} \mathbf{w}_\alpha \right\rangle; \quad \mathcal{E}_\alpha \equiv \sum_\beta \int \frac{m_\alpha v_\alpha^2}{2} S_{\alpha\beta} d^3 v_\alpha.$$

V časové derivaci je hustota kinetické energie částic druhu  $\alpha$  a hustota vnitřní energie částic druhu  $\alpha$  (souvisí s chaotickým pohybem). V prostorové derivaci jsou *toky energií*: tok kinetické energie, tok vnitřní energie, tok tlakové energie a tepelný tok. Na pravé straně jsou členy způsobující nezachování energie: první je Jouleův ohřev částic způsobený elektrickým polem (hustota Jouleova výkonu) a druhý souvisí s předáváním energie srážkami.

Pokud nám postačí jednotekutinové přiblížení, sečteme všechny rovnice (2.45). Vzhledem k tomu, že funkce  $\phi_\alpha$  byla sumačním invariantem, srážky se vyruší a získáme jednoduchý tvar zákona zachování energie:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\rho_m u^2}{2} + e \right) + \nabla \cdot \left( \frac{\rho_m u^2}{2} \mathbf{u} + e \mathbf{u} + \vec{\mathbf{P}} \cdot \vec{\mathbf{u}} + \mathbf{q} \right) = \mathbf{j}_Q \cdot \mathbf{E}; \quad (2.46)$$

$$e = \sum_\alpha e_\alpha; \quad \mathbf{q} = \sum_\alpha \mathbf{q}_\alpha.$$

Ostatní veličiny jsou definovány stejně jako u předchozích momentů. Energie plazmatu se nezachovává, plazma je ohříváno elektromagnetickými poli. Teprve celkový součet energie všech částic pole má tvar skutečného zákona zachování.

### 2.2.6 Druhý moment (zachování energie) – polní část

Z klasické elektrodynamiky je dobře známa hustota energie elektrického pole jako  $\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} / 2$ , jde například o hustotu energie na kondenzátoru. Obdobně hustota energie v magnetickém poli je  $\mathbf{H} \cdot \mathbf{B} / 2$ , jde například o hustotu energie cívky. Z Maxwellových rovnic (2.29) až (2.32) vypočteme časovou změnu hustoty energie a upravíme do tvaru zákona zachování. Opět budeme uvažovat lineární vztahy mezi oběma elektrickými vektory a mezi oběma magnetickými vektory:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}}{2} + \frac{\mathbf{H} \cdot \mathbf{B}}{2} \right) &= \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mathbf{E} \cdot (\text{rot } \mathbf{H} - \mathbf{j}_Q) + \mathbf{H} \cdot (-\text{rot } \mathbf{E}) = \\ &= \mathbf{E} \cdot \text{rot } \mathbf{H} - \mathbf{H} \cdot \text{rot } \mathbf{E} - \mathbf{j}_Q \cdot \mathbf{E} = -\text{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) - \mathbf{j}_Q \cdot \mathbf{E}. \end{aligned}$$

Výsledný zákon zachování energie pro pole má proto tvar:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}}{2} + \frac{\mathbf{H} \cdot \mathbf{B}}{2} \right) + \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = -\mathbf{j}_Q \cdot \mathbf{E}. \quad (2.47)$$

V časové derivaci je hustota elektrické a hustota magnetické energie. V prostorové derivaci je tok energie  $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ , který nazýváme Poyntingův vektor. Člen na pravé straně je hustota Jouleova výkonu odváděná z pole na ohřev částic. Celkový zákon zachování energie získáme sečtením částicové části (2.46) a polní části (2.47):

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\rho u^2}{2} + e + \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}}{2} + \frac{\mathbf{H} \cdot \mathbf{B}}{2} \right) + \nabla \cdot \left( \frac{\rho u^2}{2} \mathbf{u} + e \mathbf{u} + \vec{\mathbf{P}} \cdot \vec{\mathbf{u}} + \mathbf{q} + \mathbf{E} \times \mathbf{H} \right) = 0. \quad (2.48)$$

V časové derivaci jsou *hustoty energií* (kinetické, vnitřní, elektrické, magnetické); v prostorové derivaci jsou *toky energií* (kinetické, vnitřní, tlakové, tepelné, elektromagnetické). Zákon zachování energie platí jen pro soustavu všech druhů částic a pole. Oddělené zákony zachování mají nenulové pravé strany obsahující hustotu Jouleova výkonu.

Pokud nesečteme momentové rovnice a budeme uvažovat zákony zachování energie pro jednotlivé druhy částic zvlášť, objeví se na pravých stranách ještě srážkové členy.

Předpokládejme polytropní chování plazmatu s částicemi, které mají  $f$  stupňů volnosti, tj.

$$p = Kn^\gamma; \quad \gamma \equiv \frac{f+2}{f}. \quad (2.49)$$

Pro tlak současně platí stavová rovnice ve tvaru

$$p = nk_B T \quad (2.50)$$

Pro hustotu vnitřní energie potom máme

$$e = \frac{f}{2} nk_B T = \frac{p}{\gamma-1}. \quad (2.51)$$

Pochopitelně by bylo možné odvozovat další momenty Boltzmannovy rovnice, jejich struktura bude ale stále složitější a interpretace jednotlivých členů obtížnější. Pokud jako funkci  $\phi_\alpha$  použijeme obecnou mocninu rychlosti a nepůjde o sumační invariant, nedojde po sečtení rovnic pro všechny druhy částic k vyrušení srážkových členů.

Každá momentová rovnice nám přinese novou veličinu, pro kterou musíme napsat další momentovou rovnici. Získáme tak nekonečnou posloupnost momentů Boltzmannovy rovnice. Rozhodneme-li se, že nám dané přiblížení postačí, odvozování dalších momentů ukončíme nějakým empirickým vztahem, v případě druhého momentu například Fourierovým zákonem pro tepelný tok.



### 2.3. Jednoduché transportní jevy

Ve fyzice plazmatu je statistický přístup využíván zejména při řešení tří okruhů problémů:

1. *transportní jevy*. Jde o výpočet přenosu hmoty, hybnosti, energie a dalších veličin na základě srážkových procesů v plazmatu.
2. *relaxační jevy*. Jde o návrat narušeného systému k termodynamické rovnováze vlivem srážek, výpočet relaxačních časů a s nimi spojených veličin.
3. *mikroinstability a Landauův útlum*. Třída jevů, pro které je podstatná rychlostní část rozdělení a které nemohou být odvozeny v rámci magnetohydrodynamiky (teorie kontinua). Jsou-li charakteristické frekvence dějů podstatně větší než frekvence srážek, je možné využít bezsrážkové přiblížení (Landauovu rovnici).

Třetím okruhem problémů se budeme zabývat později v tomto sylabu (v kapitole 5.4). V této a následující kapitole se však seznámíme se základy transportních a relaxačních jevů.

Uvažujme nejprve relativně jednoduché, ale účinné BGK přiblížení (Prabhu Lal Bhatnagar, Eugene P. Gross, Max Krook), kdy předpokládáme, že srážkový člen je úměrný odchylce od lokálního rovnovážného rozdělení a srážky mají vratný charakter, tj. navrací plazma z počáteční odchylky zpět do rovnováhy:

$$S_\alpha \approx (\Delta f_\alpha / \Delta t)_{\text{col}} = -(f_\alpha - f_{\text{LE}}) / \tau = -\nu(f_\alpha - f_{\text{LE}}).$$

Pokud nebudeme popisovat více druhů částic naráz, budeme v dalších odvozeních index  $\alpha$  vynechávat. BGK rovnice tedy je

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \vec{\nabla}_{\mathbf{x}}) f + \left( \frac{\mathbf{F}}{m} \cdot \vec{\nabla}_{\mathbf{v}} \right) f = -\nu(f - f_{\text{LE}}); \quad (2.52)$$

$$f_{\text{LE}} \equiv n(\mathbf{x}) \left( \frac{m}{2\pi k_{\text{B}} T(\mathbf{x})} \right)^{3/2} \exp \left[ -\frac{m(\mathbf{v} - \mathbf{u}(\mathbf{x}))^2}{2k_{\text{B}} T(\mathbf{x})} \right] \quad (2.53)$$

Funkce  $f_{\text{LE}}$  je lokální rovnovážné kanonické (Gibbsovo) rozdělení rychlostí, které nazýváme Maxwellovo rozdělení. Předpokládáme, že se může měnit místo od místa. Řešení pro hustotu pravděpodobnosti budeme hledat ve tvaru perturbační řady

$$f = f_0 + \varepsilon f_1 + \varepsilon^2 f_2 + \dots \quad (2.54)$$

V následujících výpočtech je  $f_0$  známé řešení a v odchylkách od něho se omezíme na členy prvního řádu a poté provedeme limitní přechod  $\varepsilon \rightarrow 1$ . Předpokládáme tedy malé odchylky od Maxwellova rozdělení.

#### 2.3.1 Transport náboje (Ohmův zákon)

Předpokládejme homogenní rovnovážné plazma, pro které je

$$f_0 = f_{\text{LE}} \equiv n \left( \frac{m}{2\pi k_{\text{B}} T} \right)^{3/2} \exp \left[ -\frac{m \mathbf{v}^2}{2k_{\text{B}} T} \right]. \quad (2.55)$$

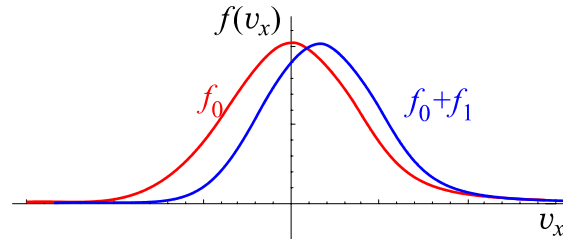
Budeme hledat ustálenou homogenní poruchu  $f_1$  rozdělení způsobenou zapnutím slabého elektrického pole  $\mathbf{E} = -\varepsilon \nabla \phi$  (chápeme ho jako první řád poruchové teorie, v systému vznikl malý spád potenciálu  $\phi$ ). V prvním řádu poruchové teorie z (2.52) proto zůstane

$$\frac{Q\mathbf{E}}{m} \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}} = -\nu f_1.$$

Po dosazení za  $f_0$  dopočteme poruchu rozdělení

$$f_1 = \frac{Q(\mathbf{E} \cdot \mathbf{v})}{\nu k_B T} n \left( \frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} \exp \left[ -\frac{m \mathbf{v}^2}{2k_B T} \right]. \quad (2.56)$$

Maxwellovo rozdělení soustavy nabitých částic je elektrickým polem v prvním řádu perturbační teorie charakteristicky deformované,  $f = f_0 + f_1$ . Na obrázku je hustota pravděpodobnosti souboru pro složku rychlosti ve směru elektrického pole.



Určeme nyní *tok náboje* neboli hustotu elektrického proudu tekoucího plazmatem:

$$\mathbf{j}_Q = Qn\mathbf{u} = \int Q\mathbf{v}(f_0 + f_1)d^3\mathbf{v} = \int Q\mathbf{v}f_1d^3\mathbf{v}.$$

Integrál z  $\mathbf{v}f_0$  je nulový (jde o lichou funkci). Do vztahu dosadíme za  $f_1$  a integrujeme:

$$j_{Qk} = n \frac{Q^2 E_l}{\nu k_B T} \left( \frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} v_k v_l \exp \left[ -\frac{m(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2)}{2k_B T} \right] dv_1 dv_2 dv_3.$$

Všechny nediagonální integrály (ve  $v_k v_l$ ) jsou nulové, neboť jde vždy o lichou funkci některé z rychlostí. Diagonální členy jsou všechny stejné a tak můžeme vypočítat například první:

$$j_{Qk} = n \frac{Q^2 E_l}{\nu k_B T} \left( \frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} \delta_{kl} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} v_l^2 \exp \left[ -\frac{m(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2)}{2k_B T} \right] dv_1 dv_2 dv_3$$

Dvě z integrací dají Gaussův integrál (A.4) a zbývající určíme jako dvojnásobek vztahu (A.2). Výsledek je

$$\boxed{\mathbf{j}_Q = \sigma \mathbf{E} = -\sigma \vec{\nabla} \phi; \quad \sigma \equiv \frac{Q^2 n}{m\nu}}. \quad (2.57)$$

Hnací silou toku náboje je elektrické pole (záporně vzatý gradient skalárního potenciálu). Koeficient úměrnosti  $\sigma$  se nazývá *diferenciální vodivost*. Vztah (2.57) je znám jako Ohmův zákon a je pojmenován podle německého fyzika George Simona Ohma (1789–1854). Stejný vztah můžeme získat i z jednoduché Drudeho teorie elementární vodivosti, kterou navrhl v roce 1900 Paul Drude (1863–1906). Představme si, že na nabitou částici v prostředí působí síla způsobená elektrickým polem a síla „tření“ způsobená srážkami, která je úměrná ztrátě hybnosti částice a koeficientem úměrnosti je srážková frekvence:

$$m \frac{d\mathbf{u}}{dt} = Q\mathbf{E} - \nu m \mathbf{u}$$

V ustáleném stavu má částice rychlost  $\mathbf{u} = Q\mathbf{E}/m\nu$  a tok náboje (proudová hustota) bude

$$\mathbf{j}_Q = Qn\mathbf{u} = \frac{Q^2 n}{m\nu} \mathbf{E},$$

což je stejný výsledek jako (2.57). Poznamenejme, že v případě anizotropního prostředí je vodivost tenzorem a Ohmův zákon má tvar

$$j_{Q,k} = \sigma_{kl} E_l = -\sigma_{kl} \frac{\partial \phi}{\partial x_l}. \quad (2.58)$$

### 2.3.2 Transport částic (Fickův zákon)

Opět budeme předpokládat rovnovážné, původně homogenní plazma. Jako poruchu zavedme nyní do plazmatu malý spád jeho koncentrace, který bude hnací silou přesunu částic. Lokální rovnovážné Maxwellovo rozdělení bude tyto změny koncentrace sledovat:

$$f_{LE} \equiv n(\mathbf{x}) \left( \frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} \exp \left[ -\frac{m \mathbf{v}^2}{2k_B T} \right]$$

Na plazma nebudou působit žádná silová pole. V okolí libovolného místa plazmatu bude koncentrace splňovat

$$n(\mathbf{x}) = n(\mathbf{x}_0) + \varepsilon \left. \frac{\partial n}{\partial x_l} \right|_{\mathbf{x}_0} (x_l - x_{0l}) \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla} n \sim \varepsilon$$

a prostorovou derivaci ( $\nabla$ ) proto musíme chápat jako operaci prvního řádu poruchové teorie ( $\nabla f_{LE}$  je prvního řádu,  $\nabla f_1$  druhého řádu,  $\nabla f_2$  třetího řádu, atd.). Je to tím, že v Maxwellově rozdělení se prostorová závislost normálně nevyskytuje. V BGK rovnici zůstane po dosažení  $f = f_{LE} + f_1 + \dots$  v prvním řádu poruchové teorie:

$$(\mathbf{v} \cdot \vec{\nabla}) f_{LE} = -\nu f_1.$$

Poruchu  $f_1$  tedy získáme ihned ve tvaru

$$f_1 = -\frac{(\mathbf{v} \cdot \vec{\nabla} n)}{\nu} \left( \frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} \exp \left[ -\frac{m \mathbf{v}^2}{2k_B T} \right] \quad (2.59)$$

Tok částic získáme obdobně jako v minulém případě:

$$\mathbf{j}_N = n\mathbf{u} = \int \mathbf{v} (f_{LE} + f_1) d^3 \mathbf{v} = \int \mathbf{v} f_1 d^3 \mathbf{v}$$

Integrace se provede stejným způsobem, jako v případě transportu náboje. Jednotlivé části integrálu budou nenulové jen v diagonálních členech  $v_k v_l$ , k jejichž integraci využijeme vztah (A.2):

$$\mathbf{j}_N = -D \vec{\nabla} n; \quad D \equiv \frac{k_B T}{m\nu}. \quad (2.60)$$

Hnací silou toku částic je záporně vzatý gradient koncentrace. Koeficient úměrnosti se nazývá *koeficient difúze*. Vztah (2.60) je znám jako Fickův zákon difúze a je pojmenován podle německého fyziologa Adolfa Eugena Ficka (1821–1901).

#### Poznámky:

1. Dosadíme-li tok částic do rovnice kontinuity, dostaneme rovnici difúze

$$\left. \begin{aligned} \partial n / \partial t + \operatorname{div} \mathbf{j}_N &= 0, \\ \mathbf{j}_N &= -D \vec{\nabla} n \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\partial n}{\partial t} = D \Delta n. \quad (2.61)$$

Z matematického hlediska jde o parciální diferenciální rovnici parabolického typu. Fyzikálně jde o prototyp rovnice popisující difúzi nějaké veličiny do okolí. Obdobnou rovnici splňuje například teplota [2] nebo magnetické pole, jak uvidíme později.

2. Z rozměrové analýzy lze koeficient difúze chápat jako součin kvadrátu střední volné dráhy a frekvence srážek:

$$D \sim \lambda^2 \nu \quad (2.62)$$

### 2.3.3 Transport tepla (Fourierův zákon)

Předpokládejme opět původně homogenní rovnovážné plazma a jako poruchu zavedme nyní do plazmatu malý spád jeho teploty, který bude hnací silou tepelného toku. Lokální rovnovážné Maxwellovo rozdělení bude tyto změny teploty sledovat:

$$f_{\text{LE}} \equiv n(\mathbf{x}) \left( \frac{m}{2\pi k_B T(\mathbf{x})} \right)^{3/2} \exp \left[ -\frac{m \mathbf{v}^2}{2k_B T(\mathbf{x})} \right].$$

V rozdělení jsme zavedli i prostorovou závislost koncentrace částic, neboť ta je provázána s prostorovým průběhem teploty. Pokud budeme počítat tepelný přenos za konstantního tlaku  $p = nk_B T$ , budeme po derivování mít

$$T \nabla n + n \nabla T = 0. \quad (2.63)$$

Obdobně jsou obě veličiny provázány i u polytropního plazmatu ( $p = Kn^\gamma$ ). Lokální rovnovážné rozdělení budeme považovat obdobně jako u toku částic za nulté řešení. Prostorový gradient se opět chová jako operace prvního řádu v poruchové teorii. Po dosazení  $f = f_{\text{LE}} + f_1 + \dots$  do BGK rovnice dostaneme:

$$v_l \frac{\partial}{\partial x_l} \left[ n(\mathbf{x}) \left( \frac{m}{2\pi k_B T(\mathbf{x})} \right)^{3/2} \exp \left[ -\frac{m \mathbf{v}^2}{2k_B T(\mathbf{x})} \right] \right] = -\nu f_1$$

Po provedení derivace součinu všech tří funkcí s využitím (2.63) získáme

$$f_1 = -n \frac{(\mathbf{v} \cdot \vec{\nabla} T)}{\nu} \frac{1}{T} \left[ \frac{m \mathbf{v}^2}{2k_B T} - \frac{5}{2} \right] \left( \frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} \exp \left[ -\frac{m \mathbf{v}^2}{2k_B T} \right]. \quad (2.64)$$

Nyní již zbývá „jen“ určit tepelný tok

$$\mathbf{q} \equiv mn \frac{1}{2} \langle \mathbf{w}^2 \mathbf{w} \rangle = \frac{1}{2} \int m(\mathbf{v} - \mathbf{u})^2 (\mathbf{v} - \mathbf{u}) f_1 d^3 \mathbf{v} = \frac{1}{2} \int m \mathbf{v}^2 \mathbf{v} f_1 d^3 \mathbf{v}.$$

Do výrazu dosadíme za  $f_1$  ze vztahu (2.64) a integrujeme přes rychlosti jako v minulých případech. Integrace je přímočará, i když zdlouhavá. Nejvyšší mocnina rychlosti je šestá. K integraci je vhodné využít některý standardní program (MATHEMATICA, MATHLAB) nebo použít vztahy z dodatku A. Výsledek je

$$\mathbf{q} = -\kappa \vec{\nabla} T; \quad \kappa \equiv \frac{5nk_B^2 T}{2m\nu}. \quad (2.65)$$

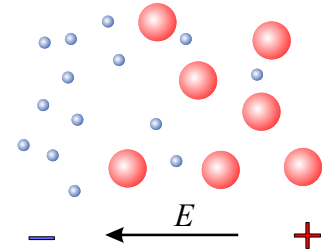
Hnací silou tepelného toku je záporně vzatý gradient teploty. Koeficient úměrnosti se nazývá *tepelná vodivost*. Vztah (2.65) je znám jako Fourierův zákon. Je pojmenován podle francouzského fyzika a matematika Jeana Baptista Josepha Fouriera (1768–1830).

Ve středoškolských učebnicích je často zmiňována jednodušší varianta Fourierova zákona pro homogenní tyč průřezu  $\Delta S$  a délky  $l$  popisující prostup tepla tyčí nebo deskou za dobu  $\Delta t$ :

$$\frac{\Delta Q}{\Delta S \cdot \Delta t} = \kappa \frac{T_2 - T_1}{l} \quad \Rightarrow \quad \Delta Q = \kappa \frac{\Delta S}{l} \cdot (T_2 - T_1) \Delta t$$

### 2.3.4 Ambipolární difúze

Elektrony v plazmatu mají výrazně menší hmotnost a tak na jakékoli silové podněty reagují rychleji a mají tendenci plazma opustit. Tím ovšem vzniká elektrické pole, které působí na ionty. Toto pole přibrzdí elektrony a urychlí ionty takovým způsobem, aby obě složky zachovávaly při difúzi kvazineutralitu, tj. celkový náboj v jakémkoli makroskopickém objemu byl nulový. Takovou vázanou difúzi elektronů a iontů nazýváme *ambipolární difúze*.



Velice důležitou veličinou při ambipolární difúzi je *mobilita* neboli *pohyblivost* částic. Jde o koeficient úměrnosti mezi průměrnou rychlostí jejich pohybu a elektrickým polem, tedy

$$\mathbf{u}_\alpha = \mu_\alpha \mathbf{E} \quad (2.66)$$

V této kapitole se zabýváme jak tekutinou elektronů, tak tekutinou iontů a proto musíme psát indexy  $\alpha$  určující příslušnost k danému druhu částic. Je zřejmé, že pomocí mobility můžeme zapsat tok náboje (proudovou hustotu) i tok částic způsobený pouze elektrickým polem:

$$\mathbf{j}_{Q,\alpha} = Q_\alpha n_\alpha \mathbf{u}_\alpha = Q_\alpha n_\alpha \mu_\alpha \mathbf{E}, \quad (2.67)$$

$$\mathbf{j}_{N,\alpha} = n_\alpha \mathbf{u}_\alpha = n_\alpha \mu_\alpha \mathbf{E}. \quad (2.68)$$

Výraz pro mobilitu snadno určíme ze vztahu pro proudovou hustotu (2.57):

$$\mu_\alpha = \frac{Q_\alpha}{m_\alpha \nu_\alpha}. \quad (2.69)$$

Mobilita elektronů je záporná, elektrony se pohybují proti směru elektrického pole.

Pohyb elektronů a iontů při ambipolární difúzi bude způsobený jak elektrickým polem, tak gradientem koncentrace částic (difúzí):

$$\begin{aligned} \mathbf{j}_{N,e} &= n_e \mu_e \mathbf{E} - D_e \vec{\nabla} n_e, \\ \mathbf{j}_{N,i} &= n_i \mu_i \mathbf{E} - D_i \vec{\nabla} n_i. \end{aligned} \quad (2.70)$$

Požadavek kvazineutrality a shodné rychlosti obou složek plazmatu lze pro  $Z$ -násobnou ionizaci vyjádřit takto:

$$\begin{aligned} Q_e &= -e, & Q_i &= Ze; \\ n_e &\equiv n = Zn_i, & n_i &= n/Z; \\ \mathbf{j}_{N,e} &\equiv \mathbf{J}, & \mathbf{j}_{N,i} &\equiv \mathbf{J}/Z. \end{aligned}$$

Po dosazení koncentrací a toků do (2.70) získáme

$$\mathbf{J} = n\mu_e \mathbf{E} - D_e \vec{\nabla} n,$$

$$\mathbf{J}/Z = n\mu_i \mathbf{E}/Z - D_i \vec{\nabla} n/Z.$$

Z obou rovnic vyloučíme elektrické pole a získáme finální vztah pro ambipolární difúzi:

$$\mathbf{J} = -D_a \vec{\nabla} n; \quad D_a \equiv \frac{\mu_i D_e - \mu_e D_i}{\mu_i - \mu_e}. \quad (2.71)$$

Ve vztahu (2.71) platí  $|\mu_e| \gg |\mu_i|$  a proto můžeme psát

$$D_a \approx D_i - \frac{\mu_i}{\mu_e} D_e. \quad (2.72)$$

Za pomoci mobility (2.69) lze zapsat vztah pro koeficient difúze (2.60) takto:

$$D_\alpha \equiv \frac{k_B T_\alpha}{m_\alpha \nu_\alpha} = \mu_\alpha \frac{k_B T_\alpha}{Q_\alpha} \quad (2.73)$$

Uvedený vztah se nazývá Einsteinův vztah a přesouvá srážkovou frekvenci ve výrazu pro koeficient difúze do mobility dané částice. Budeme-li předpokládat stejnou teplotu obou složek, můžeme z Einsteinova vztahu (2.73) odvodit  $D_e = -(Z\mu_e/\mu_i) D_i$  a vztah (2.72) pro ambipolární difúzi získá tvar

$$D_a \approx (1 + Z) D_i. \quad (2.74)$$

Výslednou ambipolární difúzi určují podle očekávání hmotnější ionty.

### 2.3.5 Difúze v magnetickém poli

Předpokládejme, že v plazmatu je malý gradient koncentrace a homogenní magnetické pole  $(0, 0, B_0)$ . Pripustíme gradient koncentrace jak ve směru pole (v ose  $z$ ), tak ve směru kolmém na pole (zvolíme osu  $x$ ), abychom mohli prozkoumat difúzi částic podél pole a kolmo na něho, tedy  $n = n(x, z)$ . Magnetické pole vnáší do plazmatu anizotropii, a proto budeme předpokládat, že chaotické složky rychlosti, resp. teplota částic mohou být různé ve směru magnetického pole a ve směru na něho kolmém. Za lokální rovnovážné rozdělení proto připustíme tvar

$$f_{LE} \equiv n(x, z) \left( \frac{m}{2\pi k_B T_\perp} \right) \left( \frac{m}{2\pi k_B T_\parallel} \right)^{1/2} \exp \left[ -\frac{m(v_x^2 + v_y^2)}{2k_B T_\perp} - \frac{m(v_z^2)}{2k_B T_\parallel} \right]. \quad (2.75)$$

V BGK rovnici v prvním řádu poruchové teorie zůstanou členy (prostorové derivace opět vnáší první řád poruchové teorie)

$$\left( \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f_{LE}}{\partial \mathbf{x}} \right) + \left( \frac{Q \mathbf{v} \times \mathbf{B}_0}{m} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{v}} \right) = -\nu f_1;$$

Lokální rovnovážné rozdělení obsahuje poruchu v souřadnicích a prosto vystupuje jako první poruchový člen v prostorových derivacích. Neobsahuje ovšem poruchu v rychlostech a proto je v rychlostním členu jako lineární porucha až člen  $f_1$ . Tok částic zjistíme tak, že poslední rovnici přenásobíme rychlostí a vystředujeme přes rychlosti:

$$\int \mathbf{v} \left( \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f_{LE}}{\partial \mathbf{x}} \right) d^3 \mathbf{v} + \int \mathbf{v} \left( \frac{Q \mathbf{v} \times \mathbf{B}_0}{m} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{v}} \right) d^3 \mathbf{v} = -\nu \int \mathbf{v} f_1 d^3 \mathbf{v};$$

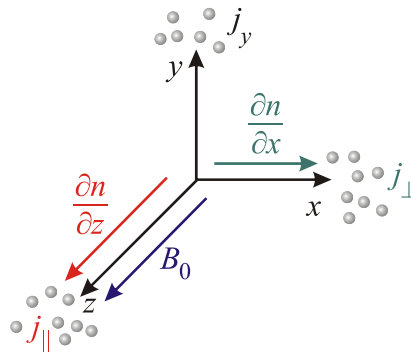
Na pravé straně má integrál přímo význam toku částic. První integrál nalevo je možné snadno dopočítat přímo. Druhý integrál napíšeme ve složkách a upravíme per partes. Výsledkem je

$$\begin{aligned} \frac{k_B T_{\perp}}{m} \frac{\partial n}{\partial x} - \frac{QB_0}{m} j_{N,y} &= -\nu j_{N,x}, \\ \frac{QB_0}{m} j_{N,x} &= -\nu j_{N,y}, \\ \frac{k_B T_{\parallel}}{m} \frac{\partial n}{\partial z} &= -\nu j_{N,z}. \end{aligned}$$

Veličina  $QB_0/m$  je tzv. gyrační (cyklotronní, Larmorova) frekvence, se kterou nabitě částice krouží kolem silokřivek. Z prvních dvou rovnic dopočteme oba hledané toky:

$$\begin{aligned} j_{N\perp} = j_{N,x} = -D_{\perp} \frac{\partial n}{\partial x}, \quad j_{N,y} = -\frac{\omega_c}{\nu} j_{N\perp}, \quad j_{N\parallel} = j_{N,z} = -D_{\parallel} \frac{\partial n}{\partial z}; \\ D_{\perp} \equiv \frac{k_B T_{\perp}}{m\nu} \left[ \frac{1}{1 + (\omega_c/\nu)^2} \right]; \quad D_{\parallel} \equiv \frac{k_B T_{\parallel}}{m\nu}; \quad \omega_c \equiv \frac{QB_0}{m}. \end{aligned} \quad (2.76)$$

Výsledek je mimořádně zajímavý. Ve směru magnetických silokřivek je koeficient difúze stejný, jako by pole neexistovalo. Difúze není magnetickým polem v tomto směru ovlivněna. Naopak napříč silokřivkám probíhá difúze obtížněji a koeficient difúze je modifikován faktorem v hranaté závorce. To je důvodem existence dvou typů slunečního větru – pomalého a rychlého: v oblasti rovníku částice opouštějí Slunce napříč silokřivkám a rychlost slunečního větru je 300÷500 km/s. V polárních směrech se částice pohybují podél silokřivek a jejich rychlost je 700÷900 km/s.



V limitě extrémně slabých polí přechází vztah pro koeficient příčné difúze v normální difúzní koeficient. Naopak, v případě extrémně silných magnetických polí můžeme jednotku ve jmenovateli zanedbat a vztah pro koeficient příčné difúze bude

$$D_{\perp} \approx \frac{k_B T_{\perp} m \nu}{Q^2 B_0^2} = R_L^2 \nu; \quad \omega_c \gg \nu \quad (2.77)$$

Částice je v silném poli vázána na Larmorovu orbitu a úlohu střední volné dráhy  $\lambda$  ve vztahu (2.62) přejímá Larmorův poloměr  $R_L = m v_T / QB_0$  gyračního pohybu pro střední tepelnou rychlost  $v_T = (k_B T_{\perp} / m)^{1/2}$ . To je přirozené, neboť v plazmatu je střední volná dráha definována jako vzdálenost, na které se částice od původního směru odchýlí o 90°, což je v extrémně silném magnetickém poli právě na Larmorově poloměru.



Dalším novým jevem je difúze částic ve směru kolmém jak na gradient koncentrace (hnačí sílu), tak na pole samotné, tj. nenulový tok částic  $j_{N,y}$ . Jde o charakteristické driftování (pohyb částic kolmý na magnetické pole a další silové pole).

Pokud je pole prostorově nehomogenní, jako například v tokamaku, dochází k dalším driftům, z nichž nejvýznamnější je grad  $B$  drift způsobený změnou velikosti pole nebo drift zakřivení způsobený změnou směru silokřivek (viz kapitola 1.3.5). Tyto jevy zahrneme buď přímým výpočtem analogickým předchozím odvozením nebo odhadem střední volné dráhy a využitím vztahu (2.62). Získáme tak vztah pro tzv. *neoklasickou difúzi* uvažující zakřivení magnetických silokřivek. Difúze kolmo na magnetické pole se díky zakřivení silokřivek zněkolikanásobí.

### 2.3.6 Produkce entropie, Onsagerovy relace reciprocity

V minulých kapitolách jsme se zabývali jevy, které navrací systém do termodynamické rovnováhy. Malý gradient elektrického potenciálu, koncentrace či teploty způsobil makroskopické toky

$$\begin{aligned} \mathbf{j}_Q &= -\sigma \vec{\nabla} \phi, \\ \mathbf{j}_N &= -D \vec{\nabla} n, \\ \mathbf{q} &= -\kappa \vec{\nabla} T, \end{aligned}$$

kteří postupně slábnou, až v termodynamické rovnováze zaniknou. Systém opět dosáhne Maxwellova rozdělení. Záporně vzaté gradienty makroskopických veličin jsou jakýmsi hnačími silami transportních jevů a nazýváme je termodynamickými silami  $X_k$ . Jedna termodynamická síla zpravidla vytvoří několik typů makroskopických toků a naopak jeden druh makroskopického toku je často způsoben několika termodynamickými silami. Gradient koncentrace i gradient teploty mohou způsobit tok částic, náboje i tepla. Například tok náboje způsobený gradientem teploty nazýváme termoelektrickým jevem, tok částic způsobený gradientem teploty termodifúzí. Obecně může být každý tok lineární kombinací všech termodynamických sil (předpokládáme, že nejsme daleko od termodynamické rovnováhy a lineární vztah je proto dobrou aproximací):

$$J_i = c_{ik} X_k. \quad (2.78)$$

Proces návratu systému k termodynamické rovnováze je nevratný a proto je při něm vytvářena entropie (ta při nevratných procesech musí růst). Tento fakt má mimořádnou důležitost a podrobně se jím zabýval norský-americký chemik a teoretický fyzik Lars Onsager (1903–1976). Zkusme například zjistit produkci entropie  $dS \equiv dQ/T$  způsobenou tokem elektrického náboje (proudovou hustotou). Hustota Jouleova tepelného výkonu předávaná nabitým částicím je  $\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}$ . Právě tento člen se objevil s různým znaménkem na pravých stranách zákonů zachování energie pro částice a pole. Produkce entropie v tomto jednoduchém případě je

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{T} \frac{dQ}{dt} = \int \frac{\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}}{T} dV = \int \frac{\mathbf{j} \cdot (-\vec{\nabla} \phi)}{T} dV.$$

V obecném případě je produkce entropie při konkrétním procesu úměrná objemovému integrálu z toku a příslušné termodynamické síly. Pro více procesů bude úměrná součtu takových členů:

$$\frac{dS}{dt} \sim \int J_k X_k dV > 0. \quad (2.79)$$



Spojením vztahů (2.78) a (2.79) získáme obecný tvar zákona pro produkci entropie:

$$\frac{dS}{dt} = \int L_{ik} X_i X_k dV > 0. \quad (2.80)$$

Vidíme, že produkce entropie je pozitivně definitní kvadratickou formou termodynamických sil. Koeficienty úměrnosti  $L_{ik}$  nazýváme kinetické koeficienty. Lars Onsager ukázal na základě statistického výpočtu, že platí tzv. relace reciprocity

$$L_{ik} = L_{ki}. \quad (2.81)$$

V odvození relací je třeba využít mikroskopické reverzibility, tj. invariantnosti pohybových rovnic vzhledem k časové inverzi. Relace reciprocity jsou velmi důležité vztahy mezi kinetickými koeficienty, které nelze odvodit v rámci fenomenologické termodynamiky. Proto se někdy nazývají čtvrtou větou termodynamickou a termodynamika je chápána jako nezávislý princip. Za objev relací reciprocity byla Larsu Onsagerovi udělena Nobelova cena za chemii pro rok 1968. Sylvestrovo kritérium aplikované na pozitivně definitní formu (2.80) dává

$$L_{11} > 0; \quad \begin{vmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{vmatrix} > 0; \quad \dots \quad (2.82)$$

Z Onsagerových relací reciprocity ihned plyne symetrie tenzoru elektrické vodivosti, neboť

$$\frac{dS}{dt} = \int \frac{j_k E_k}{T} dV = \int \frac{\sigma_{kl} E_k E_l}{T} dV = \int L_{kl} E_k E_l dV = \int L_{kl} X_k X_l dV.$$

Obdobně musí být v anizotropním prostředí symetrický tenzor tepelné vodivosti. Uvedme na závěr obecný tvar rovnice difúze. Vyjděme z rovnice kontinuity

$$\frac{\partial \rho_k}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j}_k = 0.$$

Předpokládejme, že

$$\mathbf{j}_k = c_{kl} \mathbf{X}_l = -c_{kl} \vec{\nabla} \psi_l; \quad \rho_k = a_{kl} \psi_l.$$

Potom má obecná rovnice difúze tvar

$$a_{kl} \frac{\partial \psi_l}{\partial t} = \vec{\nabla} \cdot c_{kl} \vec{\nabla} \psi_l \quad (2.83)$$

## 2.4. Coulombická interakce

### 2.4.1 Debyeova stínící vzdálenost

Předpokládejme plazma složené z několika různých druhů částic. Pokud budeme sledovat průběh potenciálu v okolí vybraného bodového zdroje (ať již konkrétní částice nebo nějaké poruchy), bude ovlivněn ostatními nabitými částicemi. Pokud není plazma daleko od termodynamické rovnováhy, přesunou se k vybranému zdroji částice opačné polaritě a budou ho stínit. Výsledkem je exponenciální úbytek pole našeho zdroje s charakteristickou vzdáleností  $\lambda_D$ , na které potenciál i pole poklesne na  $1/e$  hodnoty dané Coulombovým zákonem. Tato vzdálenost se nazývá *Debyeova stínící vzdálenost* a je pojmenována podle holandského fyzika a chemika Petera Debyeho (1884–1966). Elektrický potenciál  $\phi(r)$  v okolí zdroje určíme kombinací Maxwellovy rovnice  $\text{div } \mathbf{D} = \rho_Q$  s definicí potenciálu  $\mathbf{E} = -\nabla \phi$ , což vede na Poissonovu rovnici pro elektrický potenciál

$$\Delta \phi = -\frac{\rho_Q}{\varepsilon_0}. \quad (2.84)$$

Pravou stranu určíme z definice hustoty náboje, do které za koncentraci dosadíme rovnovážné Maxwellovo rozdělení a vzhledem k tomu, že předpokládáme plazma blízké rovnovážnému, provedeme rozvoj exponenciely do prvního řádu:

$$\begin{aligned} \frac{\rho_Q}{\varepsilon_0} &= \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{\alpha} Q_{\alpha} n_{\alpha}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{\alpha} Q_{\alpha} n_{\alpha 0} \exp\left[-\frac{Q_{\alpha} \phi(\mathbf{x})}{k_B T_{\alpha}}\right] \approx \\ &\approx \frac{1}{\varepsilon_0} \left( \sum_{\alpha} Q_{\alpha} n_{\alpha 0} \right) - \left( \sum_{\alpha} \frac{Q_{\alpha}^2 n_{\alpha 0}}{\varepsilon_0 k_B T_{\alpha}} \right) \phi(\mathbf{x}) \pm \dots \end{aligned}$$

První člen je nulový díky kvazineutralitě plazmatu, kterou předpokládáme přímo v definici plazmatu. Druhý člen je úměrný hledanému potenciálu a rovnice (2.84) má proto tvar

$$\Delta \phi = \alpha \phi; \quad \alpha \equiv \sum_{\alpha} \frac{Q_{\alpha}^2 n_{\alpha 0}}{\varepsilon_0 k_B T_{\alpha}}.$$

Rovnici budeme řešit ve sférických souřadnicích se středem v námi vybraném zdroji:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} [r\phi(r)] &= \alpha \phi \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2 \psi}{dr^2} = \alpha \psi; \quad \psi(r) \equiv r\phi(r) \quad \Rightarrow \\ \psi(r) &= C_1 e^{\sqrt{\alpha} r} + C_2 e^{-\sqrt{\alpha} r} \quad \Rightarrow \quad \phi(r) = \frac{C_1}{r} e^{\sqrt{\alpha} r} + \frac{C_2}{r} e^{-\sqrt{\alpha} r}. \end{aligned}$$

Vzhledem k tomu, že potenciál bodového zdroje nemůže divergovat v nekonečné vzdálenosti, je  $C_1 = 0$ . Konstantu  $C_2$  určíme tak, aby potenciál v limitě malé vzdálenosti od zdroje přešel v klasický Coulombův potenciál zdroje s nábojem  $Q_0$ :

$$\boxed{\phi(r) = \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0 r} e^{-\frac{r}{\lambda_D}}; \quad \lambda_D \equiv \sqrt{\frac{1}{\sum_{\alpha} \frac{Q_{\alpha}^2 n_{\alpha 0}}{\varepsilon_0 k_B T_{\alpha}}}}.} \quad (2.85)$$

Ve speciálním případě Z násobně ionizovaného plazmatu složeného jen z elektronů a iontů je

$$Q_e = -e, \quad Q_i = Ze, \quad n_{i0} = n_{e0}/Z,$$

a pro Debyeovu vzdálenost máme jednoduchý a často používaný vztah

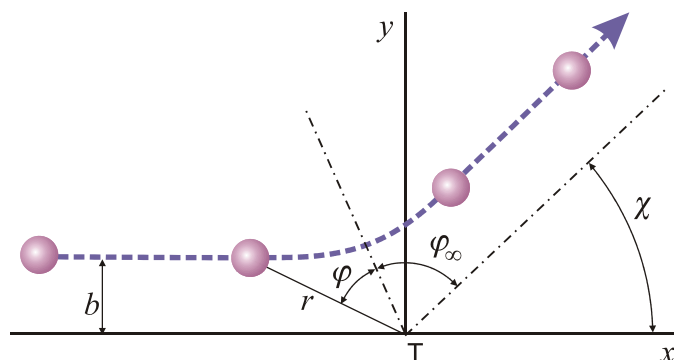
$$\lambda_D = \sqrt{\frac{\epsilon_0 k_B T}{(1+Z)n_{e0}e^2}}. \quad (2.86)$$

Důležitým parametrem je také počet částic v Debyeově sféře, což je oblast, ve které částice „vnímá“ své sousedy jako bodové částice. Nad touto hranicí je potenciál odstíněný a částice pocítují jen spojitě kontinuum:

$$N_D = \frac{4}{3}\pi\lambda_D^3 \sum_{\alpha} n_{\alpha 0}. \quad (2.87)$$

### 2.4.2 Coulombický rozptyl (Rutherfordova formule)

Předpokládejme, že svazek nabitých částic nalétává na nepohyblivý terč. Vybereme si jednu částici ze svazku (na obrázku je fialová) a jednu z terče. V těžišťové soustavě můžeme interakci s částicí terče řešit jako pohyb v centrálním poli, pokud za kinetickou energii částice budeme brát  $\mu g^2/2$ , kde  $\mu \equiv m_{\alpha}m_{\beta}/(m_{\alpha}+m_{\beta})$  je tzv. redukovaná hmotnost částice a  $g$  je velikost relativní rychlosti obou částic (viz kapitola 2.1.2). Plyne to okamžitě z rozkladu (2.13), ve kterém je těžišťová rychlost v těžišťové soustavě nulová. Velikost relativní rychlosti  $g$  se při srážce zachovává. Budeme se zabývat výsledným stavem po rozptylu a určíme vztah mezi úhlem rozptylu  $\chi$ , záměrným parametrem  $b$  a relativní rychlostí  $g$  nalétávající částice vzhledem k částici terče. Jako poslední krok vypočteme účinný průřez pro Coulombovu interakci.



Celý problém budeme chápat jako rovinný, Lagrangeova funkce pro nalétávající částici je

$$L = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\mu r^2\dot{\phi}^2 - \frac{Q_{\alpha}Q_{\beta}}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

Vzhledem k tomu, že Lagrangova funkce nezávisí na polárním úhlu  $\phi$ , zachovává se moment hybnosti  $p_{\phi}$ . Lagranžián dále nezávisí explicitně na čase, a proto se bude také zachovávat celková energie systému. Namísto řešení pohybových rovnic proto můžeme využít oba zákony zachování:

$$p_{\phi} \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = \mu r^2 \dot{\phi} = \text{const} = \mu b g,$$

$$E = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\mu r^2\dot{\phi}^2 + \frac{Q_{\alpha}Q_{\beta}}{4\pi\epsilon_0 r} = \text{const} = \frac{1}{2}\mu g^2.$$

Z první rovnice určíme časovou změnu úhlu a z druhé časovou změnu radiální vzdálenosti (za časovou změnu úhlu dosadíme z první rovnice):

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{bg}{r^2},$$

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{g^2 - \frac{Q_\alpha Q_\beta}{2\pi\epsilon_0\mu r} - \frac{b^2 g^2}{r^2}}.$$

Vzhledem k tomu, že nám postačí zjistit stav v limitě  $t \rightarrow \infty$ , nemusíme počítat časový průběh trajektorie. Vydělením obou rovnic se zbavíme parametrizace a po separaci proměnných máme

$$\int \frac{\frac{b}{r^2}}{\sqrt{1 - \frac{Q_\alpha Q_\beta}{2\pi\epsilon_0\mu b g^2} \frac{b}{r} - \frac{b^2}{r^2}}} dr = \int d\varphi,$$

Zavedeme substituci

$$\xi = \frac{b}{r} + \xi_0; \quad \xi_0 \equiv \frac{Q_\alpha Q_\beta}{4\pi\epsilon_0\mu b g^2}$$

a po elementárních úpravách získáme

$$-\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - \xi^2}} d\xi = \varphi + \varphi_0; \quad a^2 \equiv 1 + \xi_0^2.$$

Integrace je nyní přímočará a vede na

$$\arccos\left(\frac{\xi}{a}\right) = \varphi + \varphi_0 \Rightarrow \xi = a \cos(\varphi + \varphi_0) \Rightarrow \frac{b}{r} + \xi_0 = \sqrt{1 + \xi_0^2} \cos \varphi$$

Integrační konstanta je nulová, pokud budeme úhel odečítat od nejkratšího průvodiče, jak je to běžné v laboratorní soustavě (viz obrázek). Po rozptylu ( $r \rightarrow \infty$ ) máme vztah

$$\xi_0 = \sqrt{1 + \xi_0^2} \cos \varphi_\infty \Rightarrow \cos \varphi_\infty = \frac{1}{\sqrt{1 + (1/\xi_0)^2}} \Rightarrow \operatorname{tg} \varphi_\infty = \frac{1}{\xi_0}$$

Námi získaný úhel  $\varphi_\infty$  souvisí z úhlem rozptylu  $\chi$  vztahem (viz obrázek)  $\chi + 2\varphi_\infty = \pi$ , proto

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\chi}{2}\right) = \frac{1}{\xi_0} \Rightarrow \operatorname{cotg} \frac{\chi}{2} = \frac{4\pi\epsilon_0\mu b g^2}{Q_\alpha Q_\beta} \Rightarrow$$

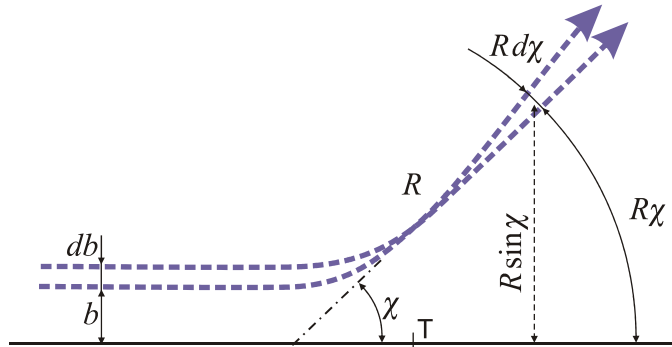
$$\boxed{b(\chi) = b_0 \operatorname{cotg} \frac{\chi}{2}; \quad b_0 \equiv \frac{Q_\alpha Q_\beta}{4\pi\epsilon_0\mu g^2}; \quad g = |\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v}_\beta|; \quad \mu \equiv \frac{m_\alpha m_\beta}{m_\alpha + m_\beta}. \quad (2.88)}$$

Význam parametru  $b_0$  je zřejmý. Jde o záměrný parametr, při kterém bude úhel rozptylu  $90^\circ$ , tedy o spodní hranici srážek braných v úvahu v Landauově rovnici. Parametr  $b_0$  se nazývá *kritický záměrný parametr*. Nyní zbývá určit diferenciální účinný průřez Coulombovy interakce. Uvažujme část nalétávajícího svazku ve tvaru prstencového mezikruží se záměrným parametrem z intervalu  $(b, b+db)$ , která se rozptýlí do úhlu  $(\chi, \chi+d\chi)$ . Pro účinný průřez máme:

$$d\sigma = 2\pi b db = 2\pi b \left| \frac{db}{d\chi} \right| d\chi = \pi b_0^2 \frac{\cos \frac{\chi}{2}}{\sin^3 \frac{\chi}{2}} d\chi$$

Absolutní hodnota je ve výrazu proto, že s rostoucí záměrnou vzdáleností úhel rozptylu klesá a derivace ve vztahu je záporná. Standardně se formule pro diferenciální účinný průřez zapisuje pomocí elementu prostorového úhlu (viz obrázek)

$$d\Omega \equiv \frac{dS}{R^2} = \frac{2\pi R \sin \chi R d\chi}{R^2} = 2\pi \sin \chi d\chi \quad \Rightarrow \quad d\chi = \frac{d\Omega}{2\pi \sin \chi} = \frac{d\Omega}{4\pi \sin \frac{\chi}{2} \cos \frac{\chi}{2}}$$



Výsledná formule pro diferenciální účinný průřez proto bude

$$d\sigma = \frac{b_0^2}{4 \sin^4 \frac{\chi}{2}} d\Omega; \quad b_0 \equiv \frac{Q_\alpha Q_\beta}{4\pi \epsilon_0 \mu g^2}; \quad g = |\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v}_\beta|; \quad \mu \equiv \frac{m_\alpha m_\beta}{m_\alpha + m_\beta}. \quad (2.89)$$

Jde o slavnou Rutherfordovu formuli, kterou odvodil skotský fyzik a chemik Ernest Rutherford (1871–1937) při zkoumání rozptylu alfa částic na atomárních jádrech v tenké zlaté fólii. Při těchto experimentech bylo objeveno atomové jádro. Povšimněte si, že výsledná formule nezáleží na znaménku náboje srážejících se částic, je shodná pro přitažlivou i odpudivou interakci.

### 2.4.3 Fokkerova-Planckova rovnice

Nalezneme nyní srážkový člen pro Coulombovu interakci v limitě slabých, ale mnohonásobně opakovaných srážek. Pokud to nebude nezbytně nutné, budeme vynechávat index příslušnosti k částicím druhu  $\alpha$ . Při odvození využijeme následující předpoklady:

- 1) Každá částice v plazmatu prodělá za malý časový interval  $\Delta t$  velmi mnoho srážek, při nichž se ale směr její rychlosti mění pomalu, tj. celková změna rychlosti částice  $\Delta \mathbf{v} = \mathbf{v}' - \mathbf{v}$  za sledovaný malý časový interval  $\Delta t$  bude malá.
- 2) Srážky jsou pružné, tj. energie se nemění při srážce na jiné formy energie.
- 3) Pole u sledované částice je superpozicí polí částic v Debyeově sféře. Tyto částice vnímá sledovaná částice jako bodové. Interakci pro částice za hranicí Debyeovy sféry neuvažujeme. Tímto předpokladem se v jistém smyslu omezujeme jen na párové srážky.
- 4) Neuvažujeme srážky, při kterých je úhel rozptylu příliš veliký. Takové srážky jsou v plazmatu málo pravděpodobné a velká změna vektoru relativní rychlosti by byla v rozporu s prvním předpokladem. V Landauově přiblížení se uvažují například jen srážky s úhlem rozptylu menším než  $90^\circ$  (záměrným parametrem  $b$  větším než  $b_0$ ).

- 5) Srážky tvoří markovský řetězec, tj. proces srážení si nepamatuje historii, a proto pravděpodobnost  $\mathcal{P}(\mathbf{v}, \Delta\mathbf{v})d(\Delta\mathbf{v})$ , že částice za čas  $\Delta t$  změní svou rychlost z hodnoty  $\mathbf{v}$  na hodnotu  $\mathbf{v}+\Delta\mathbf{v}$  nezávisí na čase. Jde samozřejmě jen o jisté přiblížení realitě, které výpočetně situaci značně zjednoduší.

Za těchto předpokladů nejdeme srážkový člen na pravé straně Boltzmannovy rovnice, tj. změnu hustoty pravděpodobnosti danou srážkovými procesy:

$$S = \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{col}} = \frac{f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) - f(t - \Delta t, \mathbf{x}, \mathbf{v})}{\Delta t} \quad (2.90)$$

Standardně u markovovských řetězců můžeme psát pro pravděpodobnosti psát

$$w_k = \sum_l w_l P_{lk},$$

kde  $w_k$  je pravděpodobnost konfigurace  $k$  a  $P_{lk}$  je pravděpodobnost přechodu z konfigurace  $l$  do konfigurace  $k$ . Obdobně v našem případě запиšeme výslednou hustotu pravděpodobnosti v čase  $t$  jako superpozici všech možných přechodů z času  $t-\Delta t$ :

$$f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) = \int f(t - \Delta t, \mathbf{x}, \mathbf{v} - \Delta\mathbf{v}) \mathcal{P}(\mathbf{v} - \Delta\mathbf{v}, \Delta\mathbf{v}) d^3(\Delta\mathbf{v}). \quad (2.91)$$

Funkci  $\mathcal{P}(\mathbf{v}, \Delta\mathbf{v})$  přechodu ze stavu  $\mathbf{v}$  do stavu  $\mathbf{v}+\Delta\mathbf{v}$  nalezneme pro Coulombovu interakci v příští kapitole. Její základní vlastností je normovací podmínka vyjadřující, že vždy k nějakému přechodu dojde, tj.

$$\int \mathcal{P}(\mathbf{v}, \Delta\mathbf{v}) d^3(\Delta\mathbf{v}) = 1. \quad (2.92)$$

Integrand výrazu (2.91) nyní rozvineme do druhého řádu Taylorovy řady v argumentu  $\mathbf{v}$  (k tomu je podstatný první předpoklad zajišťující, že za sledovaný úsek  $\Delta t$  bude změna rychlosti malá):

$$f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) = \int \left[ f(t - \Delta t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) \mathcal{P}(\mathbf{v}, \Delta\mathbf{v}) - \Delta v_l \frac{\partial(f\mathcal{P})}{\partial v_l} + \frac{1}{2} \Delta v_l \Delta v_k \frac{\partial^2(f\mathcal{P})}{\partial v_l \partial v_k} \right] d^3(\Delta\mathbf{v})$$

Integrace prvního členu je triviální,  $f$  vytkneme před integrál a využijeme normování (2.92). Poté převedeme výsledek na levou stranu rovnosti:

$$f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) - f(t - \Delta t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) = \int \left[ -\Delta v_l \frac{\partial(f\mathcal{P})}{\partial v_l} + \frac{1}{2} \Delta v_l \Delta v_k \frac{\partial^2(f\mathcal{P})}{\partial v_l \partial v_k} \right] d^3(\Delta\mathbf{v}).$$

Na pravé straně bychom nyní měli ještě Taylorovsky rozvinout hustotu pravděpodobnosti v čase jako  $f(t - \Delta t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) = f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) - \Delta t \partial f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) / \partial t \pm \dots$ . Vzhledem k tomu, že jsme považovali, aby  $\Delta t$  bylo malé, postačí nám v lineárním přiblížení se omezit jen na první člen  $f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})$ . Důvodem je to, že při markovských procesech jsou střední odchylka rychlosti i kvadrát odchylky rychlosti lineárně závislé na časovém úseku  $\Delta t$ ! Je to dáno tím, že jak střední odchylka, tak střední kvadratická odchylka pro náhodné procesy roste lineárně s časem. Vyšší odchylky už ovšem rostou s vyšší mocninou  $\Delta t$ . Pokud tedy na pravé straně poslední rovnosti ponecháme oba dva členy a  $f$  uvažujeme v čase  $t$ , ponechali jsme napravo všechny členy lineární v časovém úseku  $\Delta t$ . Po triviální úpravě máme srážkový člen ve Fokkerově-Planckově přiblížení (pravou stranu Fokkerovy-Planckovy rovnice):

$$\frac{f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) - f(t - \Delta t, \mathbf{x}, \mathbf{v})}{\Delta t} = -\frac{1}{\Delta t} \frac{\partial}{\partial v_l} f \int \Delta v_l \mathcal{P} d^3(\Delta\mathbf{v}) + \frac{1}{2} \frac{1}{\Delta t} \frac{\partial^2}{\partial v_l \partial v_k} f \int \Delta v_l \Delta v_k \mathcal{P} d^3(\Delta\mathbf{v}).$$

Zapišme nyní celkový výsledek, tj. Fokkerovu-Planckovu rovnici:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \vec{\nabla}_{\mathbf{x}}) f + \left( \frac{\mathbf{F}}{m} \cdot \vec{\nabla}_{\mathbf{v}} \right) f = -\frac{1}{\Delta t} \frac{\partial f \langle \Delta v_l \rangle}{\partial v_l} + \frac{1}{2\Delta t} \frac{\partial^2 f \langle \Delta v_l \Delta v_k \rangle}{\partial v_l \partial v_k};$$

$$\langle \Delta v_l \rangle \equiv \int \Delta v_l \mathcal{P} d^3(\Delta \mathbf{v}),$$

$$\langle \Delta v_l \Delta v_k \rangle \equiv \int \Delta v_l \Delta v_k \mathcal{P} d^3(\Delta \mathbf{v}).$$
(2.93)

Častý je i zápis v invariantním tvaru s vynechanými znaky diadického součinu:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \vec{\nabla}_{\mathbf{x}}) f + \left( \frac{\mathbf{F}}{m} \cdot \vec{\nabla}_{\mathbf{v}} \right) f = -\frac{1}{\Delta t} \vec{\nabla}_{\mathbf{v}} \cdot (f \langle \Delta \mathbf{v} \rangle) + \frac{1}{2\Delta t} \vec{\nabla}_{\mathbf{v}} \vec{\nabla}_{\mathbf{v}} : (f \langle \Delta \mathbf{v} \Delta \mathbf{v} \rangle);$$

$$\langle \Delta \mathbf{v} \rangle \equiv \int \Delta \mathbf{v} \mathcal{P} d^3(\Delta \mathbf{v}),$$

$$\langle \Delta \mathbf{v} \Delta \mathbf{v} \rangle \equiv \int \Delta \mathbf{v} \Delta \mathbf{v} \mathcal{P} d^3(\Delta \mathbf{v}).$$
(2.94)

Operace dvojtečka znamená dvojí skalární součin podle předpisu (2.93). Znak diadického součinu se někdy vynechává. Srážkový člen Fokkerovy-Planckovy rovnice má tedy dvě části. Výraz  $\langle \Delta \mathbf{v} \rangle$  se nazývá *dynamický třecí člen*, neboť vypovídá o brzdění nalétávajícího svazku částic vlivem srážek s částicemi terče. Výraz  $\langle \Delta \mathbf{v} \Delta \mathbf{v} \rangle$  se nazývá *difúzní člen*, neboť vypovídá o rozptylu nalétávajícího svazku částic vlivem interakce s částicemi terče. V příští kapitole určíme oba dva členy pro Coulombovu interakci a ukážeme, že je lze zapsat pomocí tzv. Rosenbluthových potenciálů. Víme, že podle předpokladů můžeme uvažovat jen srážky s malým rozptylovým úhlem, kterých je většina. Pokud budeme záměrný parametr uvažovat v intervalu  $(b_{\min}, b_{\max})$ , kde za  $b_{\min}$  zvolíme záměrný parametr  $b_0$ , při kterém dojde ke srážce s úhlem rozptylu  $90^\circ$  a za  $b_{\max}$  Debyeovu vzdálenost, přejde Fokkerova-Planckova rovnice na tzv. Landauovu rovnici.

#### 2.4.4 Rosenbluthovy potenciály

Pro konkrétní výpočet hodnot  $\langle \Delta \mathbf{v} \rangle$  a  $\langle \Delta \mathbf{v} \Delta \mathbf{v} \rangle$  bude již nutné rozlišovat nalétávající částici a částici terče. Ve shodě s předchozími kapitolami budeme označovat nalétávající částici  $\alpha$  a částici terče  $\beta$ . Rychlosti před srážkou budou  $\mathbf{v}_\alpha, \mathbf{v}_\beta$  a po srážce  $\mathbf{v}'_\alpha, \mathbf{v}'_\beta$ . Vzájemnou rychlost částic označíme  $\mathbf{g} \equiv \mathbf{v}_{\alpha\beta} = \mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v}_\beta$ . Z (2.14) víme, že při srážce se zachovává velikost vzájemné rychlosti  $g = |\mathbf{g}|$ , veličina  $g$  je proto pro srážku charakteristická. Směr vzájemné rychlosti  $\mathbf{k} \equiv \mathbf{g}/g$  se při srážce mění. Z (2.88) známe také závislost mezi záměrným parametrem  $b$  a úhlem rozptylu  $\chi$  pro Coulombovu interakci:

$$b(\chi) = b_0 \cotg \frac{\chi}{2}; \quad b_0 \equiv \frac{Q_\alpha Q_\beta}{4\pi\epsilon_0 \mu g^2}; \quad g \equiv |\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v}_\beta|; \quad \mu \equiv \frac{m_\alpha m_\beta}{m_\alpha + m_\beta}. \quad (2.95)$$

Ze vztahů je zřejmé, že parametr  $b_0$  je takový záměrný parametr, při kterém je úhel rozptylu  $90^\circ$ , tedy dolní mez námi uvažovaného intervalu záměrných parametrů.

Přístupme nyní k samotnému výpočtu třecího a difúzního členu ve Fokkerově-Planckově rovnici. K tomu budeme nejprve potřebovat rychlost nalétávající částice vyjádřenou pomocí těžišťové a relativní rychlosti, viz vztah (2.12)

$$\mathbf{v}_\alpha = \mathbf{v}_{(\alpha\beta)} + \frac{m_\beta}{m_\alpha + m_\beta} \mathbf{v}_{\alpha\beta} .$$

Odečteme-li hodnoty po srážce a před srážkou a označíme-li relativní rychlost  $\mathbf{g}$ , dostaneme

$$\Delta \mathbf{v}_\alpha = \frac{m_\beta}{m_\alpha + m_\beta} \Delta \mathbf{g} .$$

Těžišťová rychlost se při srážce nemění, a proto v rozdílu vymizí. Hledané výrazy tedy jsou:

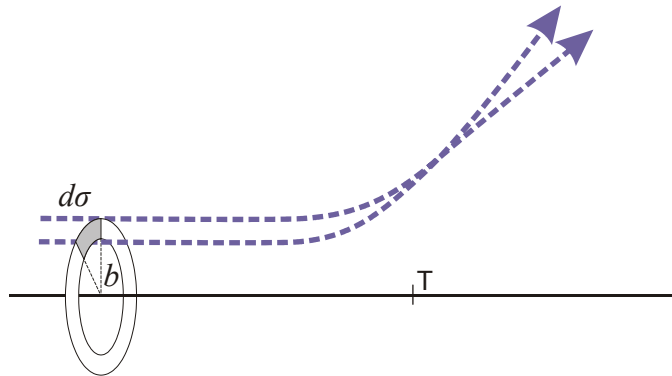
$$\langle \Delta \mathbf{v}_\alpha \rangle \equiv \frac{m_\beta}{m_\alpha + m_\beta} \int \Delta \mathbf{g} \mathcal{P} d(\Delta \mathbf{v}) .$$

$$\langle \Delta \mathbf{v}_\alpha \Delta \mathbf{v}_\alpha \rangle \equiv \left( \frac{m_\beta}{m_\alpha + m_\beta} \right)^2 \int \Delta \mathbf{g} \Delta \mathbf{g} \mathcal{P} d(\Delta \mathbf{v}) .$$

Pravděpodobnostní element vyjádříme analogicky jako v (2.19), tj. bude úměrný velikosti vzájemné rychlosti nalétávajících částic a částic terče (čím je větší, tím s vyšší frekvencí bude docházet ke srážkám), hustotě pravděpodobnosti výskytu částic terče a samozřejmě účinnému průřezu Coulombovy interakce:

$$\langle \Delta \mathbf{v}_\alpha \rangle \equiv \frac{m_\beta}{m_\alpha + m_\beta} \Delta t \int \Delta \mathbf{g} g d\sigma f_\beta d^3 \mathbf{v}_\beta .$$

$$\langle \Delta \mathbf{v}_\alpha \Delta \mathbf{v}_\alpha \rangle \equiv \left( \frac{m_\beta}{m_\alpha + m_\beta} \right)^2 \Delta t \int \Delta \mathbf{g} \Delta \mathbf{g} g d\sigma f_\beta d^3 \mathbf{v}_\beta .$$



Z obrázku je zřejmé, že  $d\sigma = b db d\varphi$  a integrace přes element účinného průřezu znamená integraci přes všechny hodnoty uvažovaných záměrných parametrů a přes azimutální úhel. Tím je pokryt průřez celého nabíhajícího svazku částic. Integrace přes účinný průřez se týká jen veličin  $g$ , proto nejprve určíme koeficienty

$$\gamma_k \equiv \int \Delta g_k g d\sigma = \int \Delta g_k g b db d\varphi ; \quad (2.96)$$

$$\gamma_{kl} \equiv \int \Delta g_k \Delta g_l g d\sigma = \int \Delta g_k \Delta g_l g b db d\varphi . \quad (2.97)$$

Pokud se nám podaří tyto koeficienty určit, budou třecí a dynamický člen dány výrazy



$$\langle \Delta \mathbf{v}_\alpha \rangle \equiv \frac{m_\beta}{m_\alpha + m_\beta} \Delta t \int \tilde{\gamma} f_\beta(\mathbf{v}_\beta) d^3 \mathbf{v}_\beta . \quad (2.98)$$

$$\langle \Delta \mathbf{v}_\alpha \Delta \mathbf{v}_\alpha \rangle \equiv \left( \frac{m_\beta}{m_\alpha + m_\beta} \right)^2 \Delta t \int \tilde{\gamma} f_\beta(\mathbf{v}_\beta) d^3 \mathbf{v}_\beta .$$

Klíčem k určení pravé strany Fokkerovy-Planckovy rovnice tedy je výpočet koeficientů  $\gamma_k$  a  $\gamma_{kl}$ . Ze symetrie koeficientů je zřejmé, že mohou být jen následujícími funkcemi vektoru  $\mathbf{g}$ :

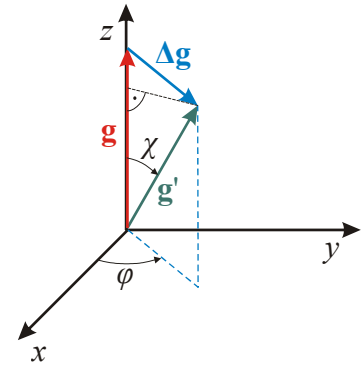
$$\gamma_k = A \frac{g_k}{g}; \quad \gamma_{kl} = B \delta_{kl} + C \frac{g_k g_l}{g^2} . \quad (2.99)$$

Stačí tedy určit konstanty  $A$ ,  $B$  a  $C$ . Tyto konstanty mohou záviset maximálně na velikosti vzájemné rychlosti  $g$ , neboť ta se při srážce nemění. Hodnoty konstant  $A$ ,  $B$  a  $C$  můžeme bez újmy na obecnosti určit v jakékoli souřadnicové soustavě. Budeme proto volit soustavu, ve které vektor  $\mathbf{g} = \mathbf{v}_{\alpha\beta}$  před srážkou míří v ose  $z$  (viz obrázek napravo). Nezapomeňte, že vektory  $\mathbf{g}$ ,  $\mathbf{g}'$  mají stejnou velikost  $g$ . Z obrázku jsou zřejmé složky vektoru  $\Delta \mathbf{g}$ , který vystupuje v integracích (2.96) a (2.97):

$$\Delta g_x = g \sin \chi \cos \varphi ;$$

$$\Delta g_y = g \sin \chi \sin \varphi ;$$

$$\Delta g_z = -g(1 - \cos \chi) .$$



Vzhledem k tomu, že integrace (2.96) a (2.97) budeme provádět přes záměrný parametr  $b$ , je nutné vyjádřit závislost na úhlu rozptylu  $\chi$  pomocí záměrného parametru  $b$ :

$$\sin \chi = 2 \sin \frac{\chi}{2} \cos \frac{\chi}{2} = 2 \sqrt{\frac{1}{1 + \left(\frac{b}{b_0}\right)^2}} \sqrt{\frac{1}{1 + \left(\frac{b_0}{b}\right)^2}} = \frac{2bb_0}{b^2 + b_0^2},$$

$$b = b_0 \cotg \frac{\chi}{2} \quad \Rightarrow \quad 1 - \cos \chi = 2 \sin^2 \frac{\chi}{2} = 2 \frac{1}{1 + \left(\frac{b}{b_0}\right)^2} = \frac{2b_0^2}{b^2 + b_0^2} .$$

Výsledné vztahy pro složky vektoru  $\Delta \mathbf{g}$  tedy jsou:

$$\Delta g_x = g \frac{2bb_0}{b^2 + b_0^2} \cos \varphi ;$$

$$\Delta g_y = g \frac{2bb_0}{b^2 + b_0^2} \sin \varphi ; \quad (2.100)$$

$$\Delta g_z = -g \frac{2b_0^2}{b^2 + b_0^2} .$$

Ve shodě s (2.99) bude mít integrál (2.96) v naší souřadnicové soustavě jediný nenulový člen, a to v ose  $z$ . Jeho hodnota bude rovna konstantě  $A$ . Konstantu  $B$  určíme z (2.99) jako složku  $\gamma_{xx}$ . Integrály přes polární úhel z funkcí  $\cos \varphi$  a  $\sin \varphi$  dají nulu, integrály z kvadrátů  $\cos^2 \varphi$

nebo  $\sin^2 \varphi$  dají  $\pi$ . V úpravách po integraci budeme předpokládat, že  $\lambda_D \gg b_0$  a zanedbáme i  $\ln 1/2$  proti  $\ln(\lambda_D/b_0)$ :

$$\begin{aligned} A = \gamma_z &\equiv \int \Delta g_z g b db d\varphi = \int \left( -g \frac{2b_0^2}{b^2 + b_0^2} \right) g b db d\varphi = -2\pi b_0^2 g^2 \int_{b_0}^{\lambda_D} \frac{2b}{b^2 + b_0^2} db = \\ &= -2\pi b_0^2 g^2 \ln \left[ b^2 + b_0^2 \right]_{b_0}^{\lambda_D} = -2\pi b_0^2 g^2 \ln \frac{\lambda_D^2 + b_0^2}{2b_0^2} \approx -4\pi b_0^2 g^2 \ln \frac{\lambda_D}{b_0}. \end{aligned}$$

Obdobný postup zvolíme pro konstantu  $B$ :

$$\begin{aligned} B = \gamma_{xx} &\equiv \int \Delta g_x \Delta g_x g b db d\varphi = \int g^2 \left( \frac{2bb_0}{b^2 + b_0^2} \right)^2 \cos^2 \varphi g b db d\varphi = \\ &= 2\pi g^3 b_0^2 \int_{b_0}^{\lambda_D} \frac{2b^3}{(b^2 + b_0^2)^2} db = 2\pi g^3 b_0^2 \left[ \frac{b_0^2}{b^2 + b_0^2} + \ln(b^2 + b_0^2) \right]_{b_0}^{\lambda_D} \approx 4\pi g^3 b_0^2 \ln \frac{\lambda_D}{b_0}. \end{aligned}$$

Nyní zbývá určit poslední konstantu  $C$ . V námi zvolené souřadnicové soustavě z rozkladu (2.99) vidíme, že

$$\begin{aligned} B + C = \gamma_{zz} &= \int \Delta g_z \Delta g_z g b db d\varphi = \int \left( -g \frac{2b_0^2}{b^2 + b_0^2} \right)^2 g b db d\varphi = \\ &= \pi g^3 4b_0^4 \int_{b_0}^{\lambda_D} \frac{2b}{(b^2 + b_0^2)^2} db = \left[ -\frac{1}{b^2 + b_0^2} \right]_{b_0}^{\lambda_D} \approx 0. \end{aligned}$$

Poslední integrál neobsahuje podstatný logaritmický člen a je tedy řádově  $\ln(\lambda_D/b_0)$  krát menší než  $A$  a  $B$ . Proto bude v našem přiblížení platit  $C = -B$ . Celkový výsledek tedy je

$$A \approx -4\pi b_0^2 g^2 \ln \left( \frac{\lambda_D}{b_0} \right); \quad B = -C = 4\pi g^3 b_0^2 \ln \left( \frac{\lambda_D}{b_0} \right). \quad (2.101)$$

Poznamenejme ještě, že příspěvek k integracím od 0 do  $b_0$  je nepodstatný a proto bylo možné integrace provádět od nuly se stejným výsledkem. Naopak oříznutí integrálu shora Debyeovou vzdáleností je podstatné, integrál by bez oříznutí shora divergoval. Nyní máme vše potřebné pro určení třetího a dynamického členu (2.98). Konstanty  $A$ ,  $B$ ,  $C$  dosadíme do rozkladu (2.99) a ten do vztahu pro třetí a dynamický člen (2.98). Výsledný výraz upravíme pomocí definice záměrného parametru  $b_0$  a redukované hmotnosti  $\mu$ . Logaritmickou závislost  $\ln(\lambda_D/b_0)$  na rychlosti považujeme za natolik pomalou, že ji z integrace vytkneme:

$$\begin{aligned} \langle \Delta v_{\alpha k} \rangle &\approx -\Delta t \frac{m_\alpha + m_\beta}{m_\beta} K_{\alpha\beta} \ln \Lambda_{\alpha\beta} \int \frac{g_k}{g^3} f_\beta d^3 \mathbf{v}_\beta; \\ \langle \Delta v_{\alpha k} \Delta v_{\alpha l} \rangle &\approx \Delta t K_{\alpha\beta} \ln \Lambda_{\alpha\beta} \int \frac{g^2 \delta_{kl} - g_k g_l}{g^3} f_\beta d^3 \mathbf{v}_\beta, \end{aligned} \quad (2.102)$$

kde jsme označili

$$K_{\alpha\beta} \equiv 4\pi \left( \frac{Q_\alpha Q_\beta}{4\pi\epsilon_0 m_\alpha} \right)^2; \quad \ln \Lambda_{\alpha\beta} \equiv \ln \left( \frac{\lambda_D}{b_0} \right). \quad (2.103)$$

Pomalu se měnící funkce  $\ln \Lambda$  se nazývá Coulombův logaritmus a budeme ji nadále považovat vzhledem k derivacím i integracím za konstantní. Jako integrand zde vystupují složky relativní rychlosti  $g_{kl}$  a konstantní velikost relativní rychlosti  $g = (g_k g_k)^{1/2}$ . Integrandy lze snadno upravit za pomoci relací

$$\frac{\partial}{\partial g_k} \left( \frac{1}{g} \right) = -\frac{g_k}{g^3}; \quad \frac{\partial^2 g}{\partial g_k \partial g_l} = \frac{g^2 \delta_{kl} - g_k g_l}{g^3}. \quad (2.104)$$

Vzhledem k tomu, že  $g_k = v_{\alpha k} - v_{\beta k}$ , platí  $\partial/\partial v_{\alpha k} = \partial/\partial g_k$  a třetí a difúzní člen můžeme přepsat jako

$$\begin{aligned} \langle \Delta v_{\alpha k} \rangle &\approx \frac{m_\alpha + m_\beta}{m_\beta} K_{\alpha\beta} \ln \Lambda_{\alpha\beta} \frac{\partial H_{\alpha\beta}(\mathbf{v}_\alpha)}{\partial v_{\alpha k}} \Delta t, \\ \langle \Delta v_{\alpha k} \Delta v_{\alpha l} \rangle &\approx K_{\alpha\beta} \ln \Lambda_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 G_{\alpha\beta}(\mathbf{v}_\alpha)}{\partial v_{\alpha k} \partial v_{\alpha l}} \Delta t, \end{aligned} \quad (2.105)$$

kde jsme zavedli Rosenbluthovy potenciály ve tvaru

$$H_{\alpha\beta}(\mathbf{v}_\alpha) \equiv \int \frac{1}{g} f_\beta d^3 \mathbf{v}_\beta; \quad G_{\alpha\beta}(\mathbf{v}_\alpha) \equiv \int g f_\beta d^3 \mathbf{v}_\beta. \quad (2.106)$$

Tyto potenciály jsou pojmenovány po významném americkém plazmovém fyzikovi Marshallu Nicholasi Rosenbluthovi (1927–2003) a vyjadřují vliv rozptylového centra  $\beta$  na rozptylovanou částici  $\alpha$ . Napišme nyní pravou stranu Fokkerovy-Planckovy rovnice pro srážky částic druhu  $\alpha$  s částicemi druhu  $\beta$  (srážkový člen)

$$S_{\alpha\beta} = -\frac{1}{\Delta t} \frac{\partial f_\alpha \langle \Delta v_{\alpha l} \rangle_{\mathbf{v}_\beta}}{\partial v_{\alpha l}} + \frac{1}{2\Delta t} \frac{\partial^2 f_\alpha \langle \Delta v_{\alpha l} \Delta v_{\alpha k} \rangle_{\mathbf{v}_\beta}}{\partial v_{\alpha l} \partial v_{\alpha k}}$$

a přepíšme ji za pomoci Rosenbluthových potenciálů:

$$S_{\alpha\beta} = K_{\alpha\beta} \ln \Lambda_{\alpha\beta} \left[ -\frac{m_\alpha + m_\beta}{m_\beta} \frac{\partial}{\partial v_{\alpha l}} \left( f_\alpha \frac{\partial H_{\alpha\beta}(\mathbf{v}_\alpha)}{\partial v_{\alpha k}} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial v_{\alpha l} \partial v_{\alpha k}} \left( f_\alpha \frac{\partial^2 G_{\alpha\beta}(\mathbf{v}_\alpha)}{\partial v_{\alpha k} \partial v_{\alpha l}} \right) \right].$$

V invariantním zápise máme

$$S_{\alpha\beta} = K_{\alpha\beta} \ln \Lambda_{\alpha\beta} \left[ -\frac{m_\alpha + m_\beta}{m_\beta} \vec{\nabla}_v \cdot (f_\alpha \vec{\nabla}_v H_{\alpha\beta}) + \frac{1}{2} \vec{\nabla}_v \vec{\nabla}_v : (f_\alpha \vec{\nabla}_v \vec{\nabla}_v G_{\alpha\beta}) \right]. \quad (2.107)$$

Diadické součiny nejsou v zápise pro přehlednost značeny, způsob zúžení tenzorů je patrný ze složkového zápisu. Rychlostní gradienty působí na rychlost nalétávající částice, přes rychlosti terče je v Rosenbluthových potenciálech již zintegrováno. Rosenbluthovy potenciály se ve fyzice plazmatu často využívají. Známe-li hustotu pravděpodobnosti částic terče, lze pro Rosenbluthovy potenciály odvodit rovnice, které jsou analogií známé Poissonovy rovnice. Proto lze snadno rozvinout do kulových funkcí a řešit pomocí nich sféricky symetrické

problémy. Porovnejme elektrický potenciál dvou nábojů v elektrostatice s definicí Rosenbluthova potenciálu  $H$ :

$$\phi_{\alpha\beta}(\mathbf{r}_\alpha) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho_\beta}{|\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_\beta|} d^3\mathbf{r}_\beta; \quad H_{\alpha\beta}(\mathbf{v}_\alpha) \equiv \int \frac{f_\beta}{|\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v}_\beta|} d^3\mathbf{v}_\beta;$$

$$\bar{\nabla}^2 \phi_{\alpha\beta} = -\frac{\rho_\beta}{\epsilon_0} \quad \bar{\nabla}_v^2 H_{\alpha\beta} = ?$$

Elektrický potenciál splňuje Poissonovu rovnici. Z analogie je jasné, že bude platit

$$\boxed{\bar{\nabla}_v^2 H_{\alpha\beta} = -4\pi f_\beta}. \quad (2.108)$$

Přímo z definice lze ukázat, že  $\nabla_v^2 G_{\alpha\beta} = 2H_{\alpha\beta}$ . Druhý potenciál proto bude splňovat rovnici

$$\boxed{\bar{\nabla}_v^2 \bar{\nabla}_v^2 G_{\alpha\beta} = -8\pi f_\beta}. \quad (2.109)$$

Známe-li tedy hustotu pravděpodobnosti částic v terči, můžeme z posledních dvou rovnic určit Rosenbluthovy potenciály interakce nalétávajícího svazku s terčem.

Napišme na závěr přehledně výsledek této kapitoly – Fokkerovu Planckovu rovnici pro svazek částic  $\alpha$  nalétávajících na terč  $\beta$  za pomoci Rosenbluthových potenciálů:

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + (\mathbf{v}_\alpha \cdot \bar{\nabla}_x) f_\alpha + \left( \frac{\mathbf{F}_\alpha}{m_\alpha} \cdot \bar{\nabla}_v \right) f_\alpha = S_{\alpha\beta};$$

$$S_{\alpha\beta} \equiv K_{\alpha\beta} \ln \Lambda_{\alpha\beta} \left[ -\frac{m_\alpha + m_\beta}{m_\beta} \bar{\nabla}_v \cdot (f_\alpha \bar{\nabla}_v H_{\alpha\beta}) + \frac{1}{2} \bar{\nabla}_v \bar{\nabla}_v : (f_\alpha \bar{\nabla}_v \bar{\nabla}_v G_{\alpha\beta}) \right];$$

$$H_{\alpha\beta}(\mathbf{v}_\alpha) \equiv \int \frac{1}{g} f_\beta d^3\mathbf{v}_\beta,$$

$$G_{\alpha\beta}(\mathbf{v}_\alpha) \equiv \int g f_\beta d^3\mathbf{v}_\beta. \quad (2.110)$$

#### 2.4.5 Brzděná a ubíhající testovací částice

Uvažujme nyní velmi jednoduchou situaci, kdy částice  $\alpha$  nalétává do homogenního izotropního maxwellovského plazmatu a je v něm brzděna na rychlost  $\mathbf{v}(t)$ . V plazmatu nepředpokládáme působení nějakého silového pole. Hustota pravděpodobnosti testovací částice bude dána Diracovou distribucí (viz dodatek B) a hustota pravděpodobnosti terče Maxwellovým rozdělením:

$$f_\alpha = \delta(\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v}(t));$$

$$f_\beta = n_\beta \left( \frac{m_\beta}{2\pi k_B T_\beta} \right)^{3/2} e^{-\frac{m v_\beta^2}{2k_B T_\beta}}. \quad (2.111)$$

Uvažujme nyní Fokkerovu-Planckovu rovnici ve tvaru (2.110) a určíme nejprve vliv potenciálu  $H$  (třetího členu) na pohyb částice. Postupem shodným s následujícím lze ukázat, že pro jednu částici je příspěvek difúzního členu nulový. Nejprve vypočteme potenciál  $H$  pro Maxwellovo rozdělení terče:

$$H \equiv \int \frac{1}{g} f_{\beta} d^3 \mathbf{v}_{\beta} = n_{\beta} \left( \frac{m_{\beta}}{2\pi k_B T_{\beta}} \right)^{3/2} \int \frac{1}{|\mathbf{v}_{\alpha} - \mathbf{v}_{\beta}|} e^{-\frac{m v_{\beta}^2}{2k_B T_{\beta}}} d^3 \mathbf{v}_{\beta}.$$

Integrand má singularitu pro  $\mathbf{v}_{\beta} = \mathbf{v}_{\alpha}$ , proto je nutné integraci rozdělit na dvě části. Po delším výpočtu dostaneme (viz dodatek A5)

$$H = n_{\beta} \frac{1}{v_{\alpha}} \phi \left( \frac{v_{\alpha}}{v_{0\beta}} \right); \quad (2.112)$$

$$\phi(x) \equiv \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\xi^2} d\xi, \quad v_{0\beta}^2 \equiv \frac{2k_B T_{\beta}}{m_{\beta}}.$$

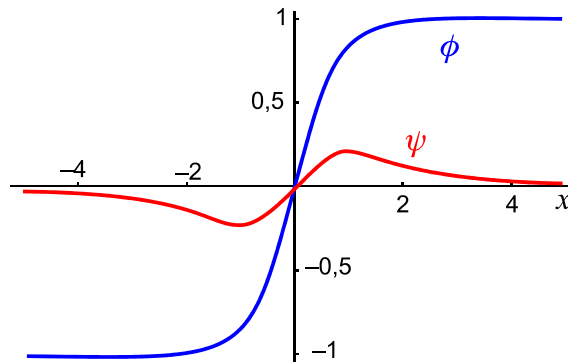
Rosenbluthův potenciál  $H$  pro Maxwellovo rozdělení lze tedy zapsat za pomoci chybové funkce  $\phi$ . Příbuznou funkcí, která se nám v budoucnosti hodí, je Chandrasekharova funkce definovaná vztahem

$$\psi(x) \equiv \frac{\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \xi^2 e^{-\xi^2} d\xi}{x^2}. \quad (2.113)$$

Nalezněme limity obou dvou funkcí pro malé a velké argumenty:

$$\begin{aligned} x \ll 1 &\Rightarrow \psi(x) \equiv \frac{2}{\sqrt{\pi} x^2} \int_0^x \xi^2 (1 \pm \dots) d\xi \approx \frac{2}{3\sqrt{\pi}} x, & \phi(x) &\approx \frac{2}{\sqrt{\pi}} x, \\ x \gg 1 &\Rightarrow \psi(x) \approx \frac{2}{\sqrt{\pi} x^2} \int_0^{\infty} \xi^2 e^{-\xi^2} d\xi = \frac{1}{2x^2}. & \phi(x) &\approx 1. \end{aligned} \quad (2.114)$$

Průběh obou funkcí je na následujícím obrázku. Chandrasekharova funkce je pojmenována podle indického fyzika Subramanyana Chandrasekhary (1910–1995).



Funkce  $\phi$  a  $\psi$  spolu souvisí jednoduchým vztahem

$$\psi(x) = \frac{\phi - x\phi'}{2x^2} \quad (2.115)$$

Důkaz je jednoduchý. Dosadíme do levé strany definici Chandrasekharovy funkce a do pravé strany definici chybové funkce a na obou stranách vynecháme jmenovatel  $x^2$ :

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \xi^2 e^{-\xi^2} d\xi = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\xi^2} d\xi - x \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$$

Na obou stranách zkrátíme číselné koeficienty a výrazy budeme derivovat podle  $x$ :

$$2x^2 e^{-x^2} = e^{-x^2} - \left( e^{-x^2} - 2x^2 e^{-x^2} \right).$$

Obě strany jsou si rovny a tak se původní funkce mohly lišit jen o konstantu. Snadno zjistíme, že je nulová. Přepis Chandrasekharovy funkce pomocí chybové funkce je tedy správný.

Vynásobme nyní Fokkerovu-Planckovu rovnici rychlostí  $\mathbf{v}_\alpha$  a integrujme ji přes  $\mathbf{v}_\alpha$ , tedy nalezneme první moment FP rovnice. Díky homogenitě plazmatu na levé straně vypadne druhý člen, díky nepřítomnosti polí člen třetí. Na pravé straně budeme zkoumat jen vliv prvního Rosenbluthova potenciálu:

$$\int \mathbf{v}_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} d^3 \mathbf{v}_\alpha = - \frac{m_\alpha + m_\beta}{m_\beta} K_{\alpha\beta} \ln \Lambda_{\alpha\beta} \int \mathbf{v}_\alpha \bar{\nabla}_{\mathbf{v}} \cdot (f_\alpha \bar{\nabla}_{\mathbf{v}} H) d^3 \mathbf{v}_\alpha \quad (2.116)$$

Za hustotu pravděpodobnosti nalétávající částice nyní dosadíme Diracovu distribuci  $\delta(\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v}(t))$  a provedeme středování přes rychlost nalétávající částice. Upravme nejprve levou stranu rovnice (2.116):

$$\begin{aligned} \mathbf{L}\mathbf{S} &= \int \mathbf{v}_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} d^3 \mathbf{v}_\alpha = \int \mathbf{v}_\alpha \frac{\partial \delta(\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v}(t))}{\partial t} d^3 \mathbf{v}_\alpha = \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{v}_\alpha \delta(\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v}(t)) d^3 \mathbf{v}_\alpha = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \end{aligned}$$

Nyní zbývá nalézt pravou stranu FP rovnice:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\mathbf{S} &= - \frac{m_\alpha + m_\beta}{m_\beta} K_{\alpha\beta} \ln \Lambda_{\alpha\beta} \int \mathbf{v}_\alpha \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_\alpha} \cdot \left( \delta(\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v}(t)) \frac{\partial H}{\partial \mathbf{v}_\alpha} \right) d^3 \mathbf{v}_\alpha \stackrel{(1)}{=} \\ &= \frac{m_\alpha + m_\beta}{m_\beta} K_{\alpha\beta} \ln \Lambda_{\alpha\beta} \int \left( \delta(\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v}(t)) \frac{\partial H}{\partial \mathbf{v}_\alpha} \right) d^3 \mathbf{v}_\alpha = \frac{m_\alpha + m_\beta}{m_\beta} K_{\alpha\beta} \ln \Lambda_{\alpha\beta} \frac{\partial H(\mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}} \end{aligned}$$

Operace (1) označuje integraci per partes. Pokud bychom na pravé straně ponechali i druhý Rosenbluthův potenciál, provedla by se integrace per partes dvakrát, výsledek dá vzhledem k izotropii nulu. První moment FP rovnice pro naši testovací částici tedy dá

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \frac{m_\alpha + m_\beta}{m_\beta} K_{\alpha\beta} \ln \Lambda_{\alpha\beta} \frac{\partial H(\mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}}; \quad H(\mathbf{v}) = n_\beta \frac{1}{v} \phi \left( \frac{v}{v_{0\beta}} \right); \quad (2.117)$$

Vidíme, že potenciál  $H$  je zodpovědný za změnu rychlosti částice a označení tohoto členu jako dynamické tření bylo oprávněné. Provedme nyní derivaci na pravé straně

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \left( \frac{1}{v} \phi \left( \frac{v}{v_{0\beta}} \right) \right) = \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{1}{v} \phi \left( \frac{v}{v_{0\beta}} \right) \right) \frac{\partial v}{\partial \mathbf{v}} = \frac{\phi' \frac{v}{v_{0\beta}} - \phi}{v^2} \frac{\mathbf{v}}{v} = -2v_{0\beta}^{-2} \psi \left( \frac{v}{v_{0\beta}} \right) \frac{\mathbf{v}}{v},$$

kde jsme využili vztah (2.115) pro Chandrasekharovu funkci

Rovnost obou vyjádření dokážeme později v této kapitole. Středovanou FP rovnici (2.117) lze nyní přepsat do jednoduchého tvaru

$$\boxed{\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = - \frac{m_\alpha + m_\beta}{m_\beta} K_{\alpha\beta} \ln \Lambda_{\alpha\beta} 2n_\beta v_{0\beta}^{-2} \frac{\psi \left( \frac{v}{v_{0\beta}} \right)}{v} \mathbf{v}.} \quad (2.118)$$

Výsledek jsme záměrně upravili do tvaru  $\partial \mathbf{v} / \partial t = -\nu_{\alpha\beta} \mathbf{v}$ , ze kterého lze odečíst srážkovou frekvenci částice prolétávající plazmatem s Maxwellovým rozdělením:

$$\nu_{\alpha\beta} \equiv 2 \frac{m_\alpha + m_\beta}{m_\beta} K_{\alpha\beta} \ln \Lambda_{\alpha\beta} n_\beta v_{0\beta}^{-2} \frac{\psi(v/v_{0\beta})}{v}. \quad (2.119)$$

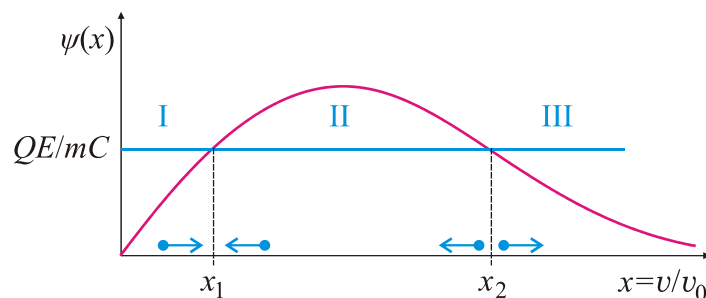
### Poznámky:

- 1) Uvedený postup je zcela obecným postupem ke zjištění srážkové frekvence pro určitý děj. Převrácená hodnota této frekvence je relaxačním časem daného děje. Do plazmatu vyšleme testovací částici a středujeme FP rovnici přes určitý moment rychlosti (při sledování přenosu hybnosti přes první, při sledování přenosu energie přes druhý). Poté FP upravíme na tvar  $\partial A / \partial t = -\nu A$ , kde  $A$  je sledovaná veličina. Z pravé strany zjistíme frekvenci  $\nu$ , její převrácená hodnota je relaxační čas pro příslušný děj.
- 2) Relaxační časy a příslušné frekvence samozřejmě závisí na ději. Jinou rychlostí systém vyrovnává hybnost s okolím a jinou svou energií.
- 3) Obecně dá příspěvek i druhý Rosenbluthův potenciál, který souvisí s difúzí nalétávajícího svazku. Tenzor difúze lze zavést vztahem  $D_{kl} = A \partial^2 G / \partial v_k \partial v_l$ .
- 4) V našem případě závisí srážková frekvence na rychlosti částice jako  $\psi(v/v_0)/v$ . Pro malé rychlosti (například tečení elektrického proudu) je  $\psi(x) \approx 2x/3\pi^{1/2}$  a srážková frekvence na rychlosti nezávisí. Naopak pro velmi vysoké rychlosti je  $\psi(x) \approx 1/2x^2$  a s rostoucí rychlostí srážková frekvence prudce klesá.
- 5) Obecně se srážkové frekvence počítají numericky, zejména v přítomnosti polí a v plazmatu, které nemá Maxwellovo rozdělení.
- 6) Pro Maxwellovo rozdělení je analytický výpočet potenciálů v dodatku A5.

Je-li v plazmatu přítomné slabé elektrické pole urychlující částici, lze pro ni napsat pohybovou rovnici

$$\frac{dv}{dt} = \frac{QE}{m} - \nu(v)v \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{dt} = \frac{QE}{m} - C\psi(v/v_0). \quad (2.120)$$

Zda bude částice urychlována nebo brzděna závisí na tom, který člen napravo převládne.



Pro malé rychlosti v oblasti I dochází k urychlování částic polem (modrá křivka je nad Chandrasekharovou funkcí). V oblasti II jsou částice naopak brzděny. Rovnováha je v bodě  $x_1$  a je stabilní. Zde je vyrovnán vliv urychlení polem brzdění třecím členem. Částice se pohybují konstantní rychlostí, prostředí vede elektrický proud. Naopak pro rychlosti vyšší, než odpovídá průsečíku  $x_2$ , (oblast III) dojde k nekontrolovatelnému urychlování částic. Interakce s prostředím klesá na zanedbatelnou míru a částice je urychlována polem na stále vyšší a vyšší rychlosti. Takové částice se nazývají *ubíhající* (runaway). Rovnováha v bodě  $x_2$  je nestabilní. K tomu, aby částice byla nekontrolovatelně urychlována, postačí, aby v daném poli byla její rychlost vyšší než hodnota daná průsečíkem  $x_2$ . Například elektrony vzniklé interakcí kosmického záření s atmosférou mohou mít počáteční rychlost vyšší, než je mez pro nekontrolovatelné urychlení v elektrickém poli mraků. Takové elektrony získávají snadno

relativistické rychlosti, jsou zodpovědné za gama záblesky pozorované v atmosféře při bouřkách a mohou pronikat do van Allenových pásů, kde je nazýváme *zabijácké elektrony*, neboť jsou nebezpečné pro přístroje kosmických lodí i pro jejich posádky.

### 2.4.6 Relaxační časy a srážkové frekvence

Relaxační časy či srážkové frekvence se počítají způsobem naznačeným v minulé kapitole, většinou numericky. Analytická řešení jsou vždy jen určitým přiblížením, zpravidla pro malé rychlosti nebo malé předané energie, kdy lze Chandrasekharovu nebo jinou obdobnou funkci nahradit rozvojem pro malý argument. Vždy jde o výpočet momentů Fokkerovy-Planckovy rovnice pro určitý typ přenosu. Zpravidla se počítají čtyři typy srážkových frekvencí:

- 1) brzdění testovací částice o okolní prostředí,
- 2) difúze testovací částice kolmo na magnetické pole,
- 3) difúze testovací částice podél magnetického pole,
- 4) energetické ztráty testovací částice.

Získané hodnoty se uvádějí v limitě pomalých nebo v limitě vysokých rychlostí a čtenář je nalezne v každoročně aktualizované publikaci NRL Plasma Formulary [10]. Uvedme zde pro ilustraci výsledek srážkové frekvence pro brzdění částice  $\alpha$  o prostředí částic  $\beta$ . Při výpočtu typu 1) se počítá přenos kolmé složky rychlosti, neboť je doba mezi srážkami definována časovým intervalem, při kterém se změnil směr rychlosti částice o  $90^\circ$ . Výsledkem je výraz

$$\nu_{\alpha\beta} = n_{\beta} \frac{Q_{\alpha}^2 Q_{\beta}^2 \ln \Lambda}{2\pi \varepsilon_0^2 m_{\alpha}^2} \left( \frac{\phi(v/v_{0\beta}) - \psi(v/v_{0\beta})}{v^3} \right) \quad (2.121)$$

Je zřejmé, že  $\nu_{ei} \sim Z\nu_{ee} \gg \nu_{ii} \gg \nu_{ie}$ . Je to především dáno různými hmotnostmi a různými tepelnými rychlostmi elektronů a iontů. Ve vztahu je rychlost  $v$  nejpravděpodobnější rychlostí nalétávající částice při dané teplotě,  $v_{0\beta}$  nejpravděpodobnější rychlostí částic prostředí.

**Příklad:** Určete vztah pro elektronovou vodivost pro malé rychlosti elektronů.

Vyjdeme ze vztahu pro vodivost (2.57), do kterého dosadíme výraz (2.121):

$$\sigma_{ee} \approx \frac{2m_e \pi \varepsilon_0^2}{e^2 \ln \Lambda [\phi(1) - \psi(1)]} \left( \frac{k_B T_e}{m_e} \right)^{3/2}; \quad \phi(1) - \psi(1) \doteq 0.6 \quad \Rightarrow$$

$$\sigma_{ee} \approx \frac{10\pi}{3} \frac{m_e \varepsilon_0^2}{\ln \Lambda e^2} \left( \frac{k_B T_e}{m_e} \right)^{3/2} \propto T_e^{3/2}. \quad (2.122)$$

Elektronová vodivost plazmatu nezávisí na koncentraci. S rostoucí koncentrací roste počet nosičů elektrického proudu a tak by se měla vodivost zvětšovat. Roste ovšem i srážková frekvence, což vodivost plazmatu zmenšuje. Oba faktory se právě vyrovnají. Proto vodivost plazmatu závisí jen na teplotě plazmatu. Formule (2.122) se nazývá Spitzerova formule a je pojmenována podle amerického teoretického fyzika Lymana Spitzera (1914–1997). ♦



### 3. TEKUTINOVÝ PŘÍSTUP – MAGNETOHYDRODYNAMIKA

#### 3.1. Odvození rovnic nerelativistické magnetohydrodynamiky

Popis plazmatu v rámci teorie kontinua poprvé použil švédský fyzik a astrofyzik Hannes Alfvén (1908–1995). Za práce v oblasti magnetohydrodynamiky získal Nobelovu cenu za fyziku pro rok 1970. Základní rovnice MHD jsme již odvodili ze středování Boltzmannovy rovnice přes různé momenty rychlosti. Spolu s Maxwellovými rovnicemi pro elektrické a magnetické pole máme výchozí soustavu pro popis plazmatu v rámci teorie kontinua. Pokud je v plazmatu dominantní magnetické pole, lze provést celou řadu dalších zjednodušení, která umožní soustavu upravit do podoby vhodné pro další výpočty. Na plazma budeme pohlížet jako na vodivou tekutinu (nebo více prolínajících se tekutin), jejíž chování dominantně ovlivňuje magnetické pole. Existuje několik možných variant výchozích předpokladů teorie, v tomto textu budeme využívat následující předpoklady:

##### – Plazma lze považovat za kontinuum

Plazma je srážkově dominantní a na prostorových i časových škálách jsou srážky podstatným jevem. Střední volné dráhy částic jsou mnohem kratší než rozměry  $L$  sledovaného plazmatu a střední kolizní čas pro jednotlivé částice je mnohem kratší než doba  $T$ , po kterou plazma sledujeme:

$$\lambda_e, \lambda_i, \lambda_n \ll L; \quad \tau_e, \tau_i, \tau_n \ll T. \quad (3.1)$$

##### – Plazma je kvazineutrální

V plazmatu jsou volné nosiče náboje, ovšem v každém makroskopickém objemu je stejný počet kladných a záporných nábojů. Prostorová hustota náboje je nulová

$$\rho_Q = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum Q_\alpha n_\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad -en_e + Zen_i = 0. \quad (3.2)$$

kde  $Z$  je stupeň ionizace plazmatu a  $n$  koncentrace částic.

##### – Jednotekutinový model

Plazma lze považovat navenek za jedinou tekutinu. Uniknou-li ze systému lehčí elektrony, táhnou za sebou pomocí Coulombova pole těžší ionty (ambipolární difúze). Rychlosti elektronové i iontové složky jsou zhruba vyrovnané:

$$\mathbf{u}_e \approx \mathbf{u}_i \quad (3.3)$$

Obě rychlosti jsou přibližně rovny těžišťové rychlosti

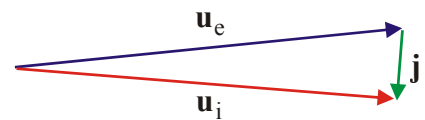
$$\mathbf{u} = \frac{\sum m_\alpha \mathbf{u}_\alpha}{\sum m_\alpha}. \quad (3.4)$$

Nepatrný rozdíl rychlostí elektronů a iontů souvisí s proudovou hustotou tekoucí plazmatem

$$\mathbf{j} = \sum Q_\alpha n_\alpha \mathbf{u}_\alpha. \quad (3.5)$$

Pro jedenkrát zcela ionizované plazma je  $n_e = n_i$  a  $\mathbf{j} = en(\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_e)$ . V jednotekutinovém modelu používáme namísto elektronové a iontové rychlosti těžišťovou rychlost a proudovou hustotu

$$\mathbf{u}_e, \mathbf{u}_i \rightarrow \mathbf{u}, \mathbf{j}$$



Odvoďme vztah pro hustotu Lorentzovy síly

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_\alpha &= Q_\alpha \mathbf{E} + Q_\alpha \mathbf{v}_\alpha \times \mathbf{B}; \\ \mathbf{f}_\alpha &= Q_\alpha n_\alpha \mathbf{E} + Q_\alpha n_\alpha \mathbf{u}_\alpha \times \mathbf{B}; \\ \mathbf{f} &= \sum (Q_\alpha n_\alpha \mathbf{E} + Q_\alpha n_\alpha \mathbf{u}_\alpha \times \mathbf{B}) = \mathbf{j} \times \mathbf{B}.\end{aligned}$$

První člen je nulový z důvodu požadavku kvazineutrality.

### – Nerelativistické plazma

Ve všech výpočtech budeme požadovat nerelativistické rychlosti všech druhů částic, tj.

$$\frac{u_\alpha}{c} \ll 1. \quad (3.6)$$

To s sebou nese relativně jednoduchou podobu Ohmova zákona (v pohybujícím se plazmatu je třeba transformovat elektrické pole  $\mathbf{E}$  z laboratorní soustavy na pole  $\mathbf{E}'$  v soustavě pohybující se s plazmatem, kde platí Ohmův zákon  $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}'$ ):

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}' = \sigma \frac{\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \doteq \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}). \quad (3.7)$$

### – Posuvný proud je zanedbatelný

V Maxwellově rovnici  $\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j} + \partial \mathbf{D} / \partial t$  zanedbáme Maxwellův posuvný člen oproti proudové hustotě. To je možné jen pro nízkofrekvenční děje, konkrétně pro rovinnou vlnu máme podmínku

$$\left| \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right| \ll |\mathbf{j}| \quad \Rightarrow \quad |i\omega \varepsilon \mathbf{E}| \ll \sigma E \quad \Rightarrow \quad \sigma \gg \omega \varepsilon. \quad (3.8)$$

Podmínka je splněna pro vysoce vodivé plazma a nízké frekvence dějů.

### Substancionální derivace a rovnice proudnice

Pojem substancionální derivace a rovnice proudnice jsou v teorii kontinua užitečné, a proto se s nimi seznámme ještě před tím, než odvodíme základní sadu rovnic magnetohydrodynamiky.

#### ■ Substancionální derivace

Nalezneme úplnou časovou derivaci nějakého vektorového pole  $\mathbf{A}(t, \mathbf{x})$

$$\frac{d}{dt} A_k(t, \mathbf{x}) = \frac{\partial A_k}{\partial t} + \frac{\partial A_k}{\partial x_l} \frac{dx_l}{dt} = \frac{\partial A_k}{\partial t} + u_l \frac{\partial A_k}{\partial x_l} = \frac{\partial A_k}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) A_k.$$

Úplná derivace vektorového pole (tzv. substancionální derivace) se skládá ze dvou částí

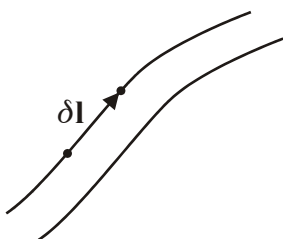
$$\frac{d}{dt} \mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{A} \quad (3.9)$$

První část odpovídá explicitním změnám polí, druhá souvisí s prouděním. Pro substancionální derivaci můžeme operátorově psát

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \quad (3.10)$$

### ■ Rovnice proudnice

Určeme nyní změnu elementu proudnice  $\delta \mathbf{l}$ :



$$\begin{aligned}
 d\delta \mathbf{l} &= \delta \mathbf{u} dt, \\
 \frac{d\delta \mathbf{l}}{dt} &= \delta \mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{r} + \delta \mathbf{l}) - \mathbf{u}(\mathbf{r}) = (\delta \mathbf{l} \cdot \nabla) \mathbf{u}, \\
 \frac{d\delta \mathbf{l}}{dt} &= (\delta \mathbf{l} \cdot \nabla) \mathbf{u}.
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

### 3.1.1 Rovnice pro magnetické pole a vektorový potenciál

Časový vývoj magnetického pole určíme z Maxwellových rovnic doplněných Ohmovým zákonem v pohyblivém prostředí (3.7)

$$\begin{aligned}
 \text{rot } \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}; & \rho_Q &= 0; \\
 \text{rot } \mathbf{H} &= \mathbf{j}; & \mathbf{j} &= \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}); \\
 \text{div } \mathbf{B} &= 0; & \mathbf{D} &= \varepsilon \mathbf{E}; \\
 \text{div } \mathbf{D} &= \rho_Q; & \mathbf{H} &= \mathbf{B}/\mu.
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

Z první rovnice určíme časovou změnu magnetického pole, za elektrické pole dosadíme z Ohmova zákona a za proudovou hustotu z druhé z Maxwellových rovnic:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\text{rot } \mathbf{E} = -\text{rot} \left( \frac{\mathbf{j}}{\sigma} - \mathbf{u} \times \mathbf{B} \right) = -\frac{1}{\sigma \mu} \text{rot rot } \mathbf{B} + \text{rot}(\mathbf{u} \times \mathbf{B}).$$

Dvojnou rotaci přepíšeme pomocí vztahu (A.15) a získáme výslednou rovnici

$$\boxed{\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{1}{\sigma \mu} \Delta \mathbf{B} + \text{rot}(\mathbf{u} \times \mathbf{B})}. \tag{3.13}$$

Rovnici pro časový vývoj magnetického pole lze upravit do tvaru se substancionální derivací. Použijeme k tomu přepis druhého členu pomocí výrazu (A.17)

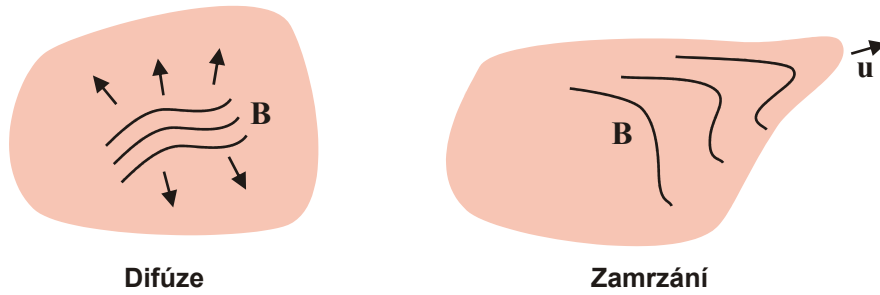
$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= \frac{1}{\sigma \mu} \Delta \mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \mathbf{B} \text{div } \mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{B}, \\
 \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{B} &= \frac{1}{\sigma \mu} \Delta \mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \mathbf{B} \text{div } \mathbf{u}.
 \end{aligned}$$

Alternativní tvar rovnice pro časový vývoj magnetického pole tedy je

$$\boxed{\frac{d\mathbf{B}}{dt} = \frac{1}{\sigma \mu} \Delta \mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \mathbf{B} \text{div } \mathbf{u}}. \tag{3.14}$$

Magnetické pole se může podle (3.13) změnit dvěma způsoby. První člen na pravé straně je klasická *difúze* – pomalé pronikání magnetického pole do okolního plazmatu. Druhý člen souvisí s pohybem plazmatu, říká se mu *člen zamrzání*. Magnetické silokřivky sledují pohyb plazmatu, jsou jakoby vmrznuty do plazmové tekutiny. Nyní zhruba odhadněme poměr příspěvků obou členů (tzv. Reynoldsovo magnetické číslo). Všechny vektory odhadneme jejich velikostmi a derivace převrácenou hodnotou rozměrů systému:

$$\#_{\text{Re,M}} = \frac{\text{člen zamrznání}}{\text{člen difúze}} \approx \frac{\frac{1}{L}uB}{\frac{1}{\sigma\mu} \frac{1}{L^2}B} = \sigma\mu u L. \quad (3.15)$$



Pro ideálně vodivé plazma ( $\sigma \rightarrow \infty$ ) dominuje člen zamrznání ( $R_M \gg 1$ ). Naopak pro pomalé pohyby plazmatu dominuje člen difúze ( $R_M \ll 1$ ). Limitní případy mají tvar

$$\begin{aligned} \sigma \rightarrow \infty: \quad & \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \text{rot}(\mathbf{u} \times \mathbf{B}). \\ \mathbf{u} \rightarrow 0: \quad & \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \eta_M \Delta \mathbf{B}; \quad \eta_M \equiv \frac{1}{\sigma\mu_0}, \end{aligned} \quad (3.16)$$

#### ■ Člen zamrznání

Zabývejme se nyní jen členem zamrznání

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \text{rot}(\mathbf{u} \times \mathbf{B}).$$

Rotaci na pravé straně upravíme pomocí dvojného vektorového součinu – viz (A.17)

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{B} - \mathbf{B} \text{div} \mathbf{u}.$$

Dosaďme za  $\text{div} \mathbf{u}$  z rovnice kontinuity

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \rho \mathbf{u} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \rho + \rho \text{div} \mathbf{u} = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{div} \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} - \frac{1}{\rho} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \rho.$$

Po elementárních úpravách máme (zanedbáváme člen difúze)

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{B} + \frac{\mathbf{B}}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\mathbf{B}}{\rho} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \rho.$$

Celou rovnici vydělme hustotou a přeskupme jednotlivé členy

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \frac{\mathbf{B}}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial t} = \left( \frac{\mathbf{B}}{\rho} \cdot \nabla \right) \mathbf{u} - \frac{1}{\rho} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{B} + \frac{\mathbf{B}}{\rho^2} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \rho.$$

První dva členy na levé straně lze spojit do jednoho výrazu a druhé dva členy na pravé straně také:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\mathbf{B}}{\rho} \right) = \left( \frac{\mathbf{B}}{\rho} \cdot \nabla \right) \mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \frac{\mathbf{B}}{\rho}.$$

Substitucí  $\mathbf{b} \equiv \mathbf{B}/\rho$  rovnice přejde na

$$\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{b} = (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{u}.$$

Po zavedení substancionální derivace získáme rovnici proudnice (3.11)

$$\frac{d\mathbf{b}}{dt} = (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{u}. \quad (3.17)$$

Magnetické pole proto sleduje proudnice a je vmrzlé do plazmatu.

#### ■ Člen difúze

Zabývejme se nyní druhou alternativou, difúzním členem. Koeficient  $\eta_M$  se nazývá koeficient magnetické difúze. Rovnici difúze můžeme přepsat do tvaru

$$\hat{\mathcal{L}}\mathbf{B} = 0; \quad \hat{\mathcal{L}} \equiv \frac{\partial}{\partial t} - \eta_M \Delta. \quad (3.18)$$

Operátor  $\hat{\mathcal{L}}$  je lineární a proto můžeme hledat řešení jako superpozici Fourierových modů

$$\mathbf{B}(t, \mathbf{x}) = \int \mathbf{B}_{\mathbf{k}}(t, \mathbf{x}) d^3\mathbf{k} = \int \mathbf{c}_{\mathbf{k}}(t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d^3\mathbf{k}. \quad (3.19)$$

Každý z Fourierových modů  $\mathbf{B}_{\mathbf{k}}$  musí splňovat rovnici difúze:

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{L}}\mathbf{B}_{\mathbf{k}} &= 0; \quad \Rightarrow \\ \left( \frac{\partial}{\partial t} - \eta_M \Delta \right) \mathbf{c}_{\mathbf{k}}(t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} &= 0 \quad \Rightarrow \\ \frac{d\mathbf{c}_{\mathbf{k}}}{dt} + \eta_M k^2 \mathbf{c}_{\mathbf{k}} &= 0 \quad \Rightarrow \\ \mathbf{c}_{\mathbf{k}}(t) &= \mathbf{c}_{\mathbf{k}}(0) e^{-\eta_M k^2 t}. \end{aligned}$$

Celkové řešení tedy napíšeme ve tvaru

$$\mathbf{B}(t, \mathbf{x}) = \int \mathbf{c}_{\mathbf{k}}(0) e^{-\eta_M k^2 t} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d^3\mathbf{k}. \quad (3.20)$$

Dosadíme-li do vztahu  $t = 0$  a provedeme inverzní transformaci, získáme vztah pro počáteční hodnoty

$$\mathbf{c}_{\mathbf{k}}(0) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \mathbf{B}(0, \mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d^3\mathbf{x} \quad (3.21)$$

Povšimněte si vztahu (3.20). Každá Fourierova komponenta  $\exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})$  se v čase tlumí faktorem  $\exp(-\eta_M k^2 t)$ . Tedy fluktuace malých rozměrů (velkých  $k$ ) jsou utlumeny mnohem rychleji než fluktuace velkých rozměrů. To je pro difúzi charakteristické, difúzi zanikají nejprve drobné nepravidelnosti.

Najdeme nyní Greenovu funkci pro rovnici difúze v neomezeném prostředí, tj. za počáteční impulz budeme volit Diracovu distribuci lokalizovanou v bodě  $\mathbf{x}'$  a mířící ve směru  $\mathbf{B}_0$ :

$$\mathbf{B}(0, \mathbf{x}) = \mathbf{B}_0 \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad \Rightarrow$$

Také bychom mohli počítat Greenovu funkci pro každou složku magnetického pole zvlášť, všechny složky totiž splňují rovnici difúze.

Diracův impulz postupně dosadíme do (3.21) a (3.20), výsledné řešení označíme  $\mathbf{G}$

$$\mathbf{c}_{\mathbf{k}}(0) = \frac{\mathbf{B}_0}{(2\pi)^3} \int \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d^3\mathbf{x} = \frac{\mathbf{B}_0}{(2\pi)^3} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}'} \quad \Rightarrow$$

$$\mathbf{G}(t, \mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{\mathbf{B}_0}{(2\pi)^3} \int e^{-\eta_M k^2 t} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} d^3\mathbf{k}. \quad (3.22)$$

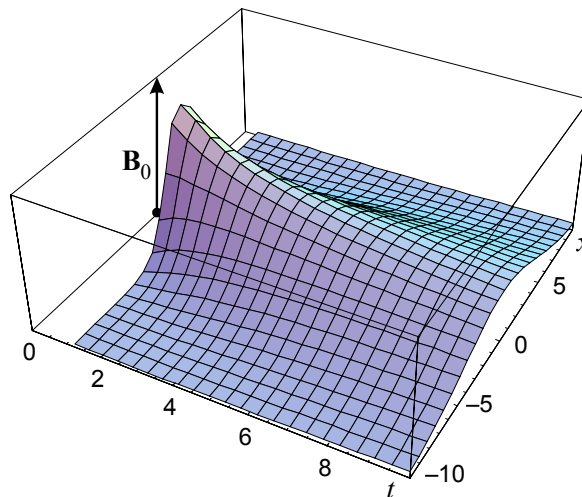
Jde o obecný zápis Greenovy funkce (řešení rovnice difúze pro Diracův impulz lokalizovaný v místě  $\mathbf{x}'$ , kde má pole směr  $\mathbf{B}_0$ ). Výsledek integrace samozřejmě závisí na okrajových podmínkách a volbě souřadnicové soustavy. Provedme integraci v jednoduchém případě neomezeného prostředí popisovaného v kartézské souřadnicové soustavě:

$$\begin{aligned} \mathbf{G}(t, \mathbf{x}, \mathbf{x}') &= \frac{\mathbf{B}_0}{(2\pi)^3} \int e^{-\eta_M k^2 t} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} d^3\mathbf{k} = \quad / \mathbf{x} - \mathbf{x}' \equiv \mathbf{a} \\ &= \frac{\mathbf{B}_0}{(2\pi)^3} \int e^{-\eta_M (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) t} e^{i(k_x a_x + k_y a_y + k_z a_z)} dk_x dk_y dk_z = \\ &= \frac{\mathbf{B}_0}{(2\pi)^3} \left( \int e^{-\eta_M k_x^2 t + i k_x a_x} dk_x \right) \left( \int \dots dk_y \right) \left( \int \dots dk_z \right) = \\ &= \frac{\mathbf{B}_0}{(2\pi)^3} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left[ -\eta_M t \left( k_x - \frac{i a_x}{2\eta_M t} \right)^2 - \frac{a_x^2}{4\eta_M t} \right] dk_x \right) \left( \int \dots dk_y \right) \left( \int \dots dk_z \right) = \\ &= \frac{\mathbf{B}_0}{(2\pi)^3} \left( e^{-\frac{a_x^2}{4\eta_M t}} \sqrt{\frac{\pi}{\eta_M t}} \right) (\dots)(\dots) = \frac{\mathbf{B}_0}{(4\pi\eta_M t)^{3/2}} e^{-\frac{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}{4\eta_M t}}, \end{aligned}$$

kde jsme argument doplnili na čtverec v  $k_x$ . V neomezeném prostředí máme tedy výsledek:

$$\mathbf{G}(t, \mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{\mathbf{B}_0}{(4\pi\eta_M t)^{3/2}} e^{-\frac{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^2}{4\eta_M t}}. \quad (3.23)$$

Je zřejmé, že Diracův impuls lokalizovaný v  $\mathbf{x}'$  je gaussovsky s časem „rozmyván“. V 1D problému je situace ukázána na obrázku:



Obecnou počáteční podmínku rozložíme na jednotlivé diracovské impulzy a výsledná řešení sečteme:

$$\mathbf{B}(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{(4\pi\eta_M t)^{3/2}} \int e^{-\frac{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^2}{4\eta_M t}} \mathbf{B}(0, \mathbf{x}') d^3 \mathbf{x}' . \quad (3.24)$$

Pole je tedy konvolucí počáteční podmínky a Greenovy funkce s Diracovým impulzem mířícím v každém bodě prostoru ve směru počáteční podmínky. Přímým dosazením do rovnice difúze lze snadno ukázat, že vztah (3.24) je jejím řešením.

#### Poznámky:

- 1) Alternativně lze při řešení využít shodného tvaru rovnice difúze se Schrödingerovou rovnicí a operátorově ihned napsat řešení

$$|\mathbf{B}(t)\rangle = e^{\eta_M \Delta (t-t_0)} |\mathbf{B}_0\rangle .$$

Dosazením do rovnice difúze okamžitě vidíme, že jde o řešení, které navíc splňuje počáteční podmínku. Standardními metodami popsanými v [2] je třeba najít spektrum Laplaceova operátoru a poté použít větu o spektrálním rozvoji:

$$|\mathbf{B}(t)\rangle = \sum_k e^{\eta_M \lambda_k (t-t_0)} |k\rangle \langle k | \mathbf{B}_0 \rangle ,$$

$$\Delta |k\rangle = \lambda_k |k\rangle .$$

- 2) Stejně řešení má i rovnice pro difúzi částic:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D \Delta n ;$$

$$G(t, \mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{1}{(4\pi D t)^{3/2}} e^{-\frac{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^2}{4D t}} ; \quad (3.25)$$

$$n(t, \mathbf{x}) = \int G(t, \mathbf{x}, \mathbf{x}') n(0, \mathbf{x}') d^3 \mathbf{x}'$$

- 3) V případě zdroje částic, který je v jedné dimenzi doplňuje tak, aby v počátku byla neustálá koncentrace  $n_0$ , je řešením rovnice difúze (lze snadno dokázat dosazením)

$$n(t, x) = n_0 \left[ 1 - \phi \left( \frac{x}{\sqrt{4Dt}} \right) \right] , \quad (3.26)$$

kde  $\phi$  je chybová funkce definovaná vztahem (A.33)

**Příklad:** Nalezněte střední polohu a střední kvadratickou fluktuaci polohy částic pro difúzi Diracova impulzu, tedy pro Greenovu funkci (3.25), pokud je zdroj v počátku ( $\mathbf{x}' = 0$ )

**Řešení:** Určeme například  $\langle x \rangle$  a  $\langle x^2 \rangle$ :

$$\langle x \rangle = \int G(t, \mathbf{x}, \mathbf{x}') x d^3 \mathbf{x} = \int \frac{1}{(4\pi D t)^{3/2}} e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{4Dt}} x dx dz dy = 0 ,$$

$$\langle x^2 \rangle = \int G(t, \mathbf{x}, \mathbf{x}') x^2 d^3 \mathbf{x} = \int \frac{1}{(4\pi Dt)^{3/2}} e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{4Dt}} x^2 dx dz dy = 2Dt.$$

Integrály se rozdělí na jednotlivé integrace a ty určíme ze vztahů (A.1) a (A.2). Je zřejmé, že střední poloha je v počátku (tam, kde byl lokalizován Diracův impuls) a platí:

$$\langle \mathbf{x} \rangle = (0, 0, 0),$$

$$\langle \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} \rangle = \langle x^2 + y^2 + z^2 \rangle = 6Dt,$$

$$l_{kv} \equiv \sqrt{\langle \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} \rangle - \langle \mathbf{x} \rangle \cdot \langle \mathbf{x} \rangle} = \sqrt{6Dt}.$$

Pro difúzi je charakteristické, že střední kvadratické fluktuace rostou s časem jako  $t^{1/2}$ .

◆

### ■ Rovnice pro vektorový potenciál

Někdy je výhodnější namísto magnetického pole používat vektorový potenciál splňující vlnovou rovnici a Lorentzovu podmínku

$$\Delta \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{j}, \quad (3.27)$$

$$\frac{\partial \phi}{c^2 \partial t} + \operatorname{div} \mathbf{A} = 0.$$

V magnetohydrodynamice zanedbáváme Maxwellův posuvný proud, což je ekvivalentní omezení se na nízké frekvence dějů, viz (3.8). Z rovnice pro vektorový potenciál potom zbude jen

$$\Delta \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{j}.$$

Za proudovou hustotu dosadíme z Ohmova zákona (3.7)

$$\Delta \mathbf{A} = -\mu_0 \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}).$$

V magnetohydrodynamice je elektrické a magnetické pole dáno vektorovým potenciálem:

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}; \quad \mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A},$$

což po dosazení do předchozí rovnice dá výslednou rovnici pro vektorový potenciál

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \frac{1}{\mu_0 \sigma} \Delta \mathbf{A} + \mathbf{u} \times \operatorname{rot} \mathbf{A}. \quad (3.28)$$

Rovnice pro vektorový potenciál má opět člen zamrzání a člen difúze. Rozepíšeme-li dvojný vektorový součin napravo, získáme snadno tvar se substancionální derivací

$$\frac{dA_i}{dt} = \frac{1}{\sigma \mu_0} \Delta A_i + u_k \frac{\partial A_k}{\partial x_i}. \quad (3.29)$$



### 3.1.2 Rovnice pro hustotu

Uvažujme proudění aditivní veličiny  $A$  (roste s množstvím látky, například hmotnost, náboj, energie). Proudění popisujeme čtyřmi veličinami

$$\rho_A \equiv \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta A}{\Delta V}; \quad \mathbf{j}_A \equiv \rho_A \mathbf{v}.$$

Tyto čtyři veličiny tvoří relativistický čtyřvektor a transformují se za pomoci Lorentzovy matice –  $\rho_A$  nazýváme hustotou;  $\mathbf{j}_A$  nazýváme tokem (množství  $A$  proteklé jednotkovou plochou za jednotku času). Jestliže se veličina  $A$  při proudění neztrácí ani nepřibývá, musí časový úbytek veličiny z libovolného objemu být roven toku veličiny přes plochu ohraničující tento objem:

$$-\frac{d}{dt} \int_V \rho_A dV = \int_{\partial V} \mathbf{j}_A d\mathbf{S}$$

Hranice objemu  $V$  je označena  $\partial V$ . Pomocí Gaussovy věty integrálního počtu převedeme plošný integrál na objemový a oba integrály spojíme:

$$\int_V \left( \frac{\partial \rho_A}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j}_A \right) dV = 0.$$

Uvedený vztah musí při proudění platit v libovolném objemu a to je možné jen, je-li argument integrálu roven nule:

$$\frac{\partial \rho_A}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j}_A = 0 \quad (3.30)$$

Odvozený vztah se nazývá rovnice kontinuity a na pravé straně je nula, pokud se veličina  $A$  při proudění zachovává. Nezachovává-li se, není na pravé straně nula. Pro hustotu hmoty budeme psát

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{u} = 0}, \quad (3.31)$$

kterou můžeme upravit do tvaru se substancionální derivací:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \partial_k (\rho u_k) &= 0 \quad \Rightarrow \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x_k} u_k + \rho \frac{\partial u_k}{\partial x_k} &= 0 \quad \Rightarrow \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \rho + \rho \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0. \end{aligned}$$

Výsledný tvar proto je

$$\boxed{\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{u} = 0}. \quad (3.32)$$

Z posledního výrazu je zřejmé, že nestlačitelná tekutina (kapalina) splňuje

$$\rho = \text{const} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = 0. \quad (3.33)$$

### 3.1.3 Rovnice pro rychlost

Rovnici pro rychlost odvodíme ve třech fázích. Nejprve pro ideální hydrodynamiku (bez viskozity), poté pro viskózní proudění a nakonec pro proudění za přítomnosti magnetického a gravitačního pole. Ve všech případech nalezneme jak konzervativní tvar (ve tvaru rovnice kontinuity) tak tvar se substancionální derivací. Výsledky budou kompatibilní se středováním Boltzmannovy rovnice přes rychlost ve statistice.

#### 1. Ideální hydrodynamika

Pro objekt o hmotnosti  $m$  platí Newtonova pohybová rovnice

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} .$$

Pro proudící prostředí zavedeme hustotu síly

$$\mathbf{f} \equiv \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{F}}{\Delta V} . \quad (3.34)$$

V hustotách bude Newtonova pohybová rovnice mít tvar

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{f} . \quad (3.35)$$

Po rozepsání substancionální derivace získáme rovnici

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \mathbf{f} . \quad (3.36)$$

Zbývá určit hustotu síly. Ta se liší podle procesů, které popisujeme. Může jít o hustotu Lorentzovy síly  $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$ , u zvukových vln v plynech půjde o tlakovou sílu. Standardně síla míří k minimu potenciální energie:

$$\mathbf{F} = -\nabla W_p \quad (3.37)$$

nebo v hustotách

$$\mathbf{f} = -\nabla w_p . \quad (3.38)$$

Tlaková energie je  $W_p = \int p dV$ , hustota tlakové energie proto je  $w_p = p$  a hustota síly způsobená tlakem vychází

$$\mathbf{f} = -\nabla p . \quad (3.39)$$

Pohybová rovnice (3.36) s hustotou síly způsobenou tlakem má proto tvar

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p . \quad (3.40)$$

Jde o hledanou rovnici pro časový vývoj rychlostního pole.

$$\boxed{\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\nabla p , \quad \text{neboli} \quad \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p .} \quad (3.41)$$

Nyní tuto rovnici přepíšeme do konzervativního tvaru, tj. budeme hledat zákon zachování rychlosti ve tvaru rovnice kontinuity. Nalezneme časový vývoj hustoty hybnosti

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_k) = \frac{\partial \rho}{\partial t} u_k + \rho \frac{\partial u_k}{\partial t}.$$

Za časovou změnu hustoty dosadíme z rovnice kontinuity (3.31) a za časovou změnu hybnosti z pohybové rovnice (3.41):

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_k) = -\partial_l(\rho u_l) u_k - \rho(u_l \partial_l) u_k - \partial_k p.$$

Všechny členy převedeme na levou stranu a upravíme:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_k) + \frac{\partial(\rho u_l)}{\partial x_l} u_k + (\rho u_l) \frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial p}{\partial x_k} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_k) + \frac{\partial}{\partial x_l}(\rho u_l u_k) + \frac{\partial p}{\partial x_k} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_k) + \frac{\partial}{\partial x_l}(p \delta_{kl} + \rho u_k u_l) = 0.$$

Získali jsme zákon zachování hybnosti. V závorce v prostorových derivacích je tok hybnosti neboli tenzor tlaku. Sama hybnost je vektorová veličina a proto její tok tvoří tenzor druhého řádu. Symetrie tenzoru tlaku zajišťuje zachování momentu hybnosti v proudící kapalině. Tenzor tlaku se skládá ze dvou částí – skalární části, kterou tvoří normální tlak působící ve všech směrech stejně. Druhou částí je tenzorová část souvisící s prouděním tekutiny. Zákon zachování hybnosti můžeme napsat ve složkovém zápise

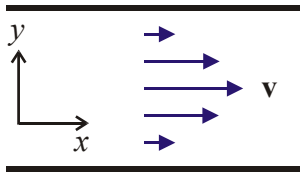
$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_k) + \frac{\partial}{\partial x_l}(T_{kl}^{(P)}) = 0; \quad T_{kl}^{(P)} \equiv p \delta_{kl} + \rho u_k u_l. \quad (3.42)$$

nebo v invariantním tvaru

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{u}) + \vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{T}}_P = 0; \quad \vec{\mathbf{T}}_P \equiv p \vec{\mathbf{1}} + \rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}. \quad (3.43)$$

Připomeňme, že tento vztah jsme již odvodili jako první moment Boltzmannovy rovnice (2.34). Index  $(P)$  označuje tlak, později přibude tenzor viskozity a Maxwellův tenzor pnutí.

## 2. Viskózní tekutina



Pro viskózní tekutiny jsou charakteristické nenulové prostorové derivace rychlosti. Například tekutina proudící mezi dvěma deskami má u povrchu desek rychlost nulovou a mezi deskami maximální:

$$\partial u_x / \partial y \neq 0.$$

Ztráty hybnosti způsobené viskózními procesy budou dány tenzorem viskozity závislým na prostorových derivacích rychlosti

$$V_{kl} = f_{kl}(\partial u_i / \partial x_j).$$

V nejjednodušším přiblížení bude tenzor lineární v derivacích rychlostí, případně provedeme Taylorův rozvoj do prvního řádu v derivacích rychlostí. Tenzor musí být symetrický tenzor druhého řádu (z důvodu zachování momentu hybnosti). Nejobecnější tvar symetrického tenzoru za našich předpokladů bude

$$V_{kl} = a \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right) + b \delta_{kl} \frac{\partial u_n}{\partial x_n} = a \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right) + b \delta_{kl} \operatorname{div} \mathbf{u}.$$

symetrický tenzor získáme pomocí součtu derivací v závorce nebo součtem všech diagonálních členů (divergence rychlosti). V matematice i ve fyzice se dobře pracuje s tenzory s nulovou stopou (součtem diagonálních členů). Stopa tenzoru se zachovává. Proto se část druhého (skalárního) výrazu přidá k prvnímu výrazu, tak aby měl nulovou stopu:

$$V_{kl} = \eta \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} - \frac{2}{3} \delta_{kl} \operatorname{div} \mathbf{u} \right) + \zeta \delta_{kl} \operatorname{div} \mathbf{u}. \quad (3.44)$$

Stopa tenzorové části v kulaté závorce je nulová:

$$\left( \frac{\partial u_k}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_k} - \frac{2}{3} \delta_{kk} \operatorname{div} \mathbf{u} \right) = \left( \operatorname{div} \mathbf{u} + \operatorname{div} \mathbf{u} - \frac{2}{3} \cdot 3 \cdot \operatorname{div} \mathbf{u} \right) = 0.$$

Koeficienty  $\eta$  a  $\zeta$  se nazývají *první a druhá vazkost*. Konzervativní tvar zákona zachování hybnosti potom má tvar

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho u_k) + \frac{\partial}{\partial x_l} (T_{kl}^{(P)} - V_{kl}) = 0. \quad (3.45)$$

nebo v invariantním tvaru

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{u}) + \vec{\nabla} \cdot (\vec{\mathbf{T}}_P - \vec{\mathbf{V}}) = 0. \quad (3.46)$$

U viskózního tenzoru píšeme znaménko minus, protože jde o ztráty toku hybnosti. S touto konvencí jsou oba viskózní koeficienty kladné. Odvoďme nyní pohybovou rovnici. Ve vztahu (3.45) dosadíme za oba tenzory a provedeme všechny derivace:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho u_k) + \frac{\partial}{\partial x_l} \left[ p \delta_{kl} + \rho u_k u_l - \eta \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} - \frac{2}{3} \delta_{kl} \operatorname{div} \mathbf{u} \right) - \zeta \delta_{kl} \operatorname{div} \mathbf{u} \right] = 0.$$

Po přímočarém výpočtu získáme pohybovou rovnici

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \eta \Delta \mathbf{u} + (\zeta + \eta/3) \nabla (\operatorname{div} \mathbf{u}). \quad (3.47)$$

Jde o slavnou *Naviereovu-Stokesovu rovnici* pro viskózní tekutinu. Je-li tekutina nestlačitelná (kapalina,  $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$ ) získá pohybová rovnice jednoduchý tvar

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \eta \Delta \mathbf{u} \quad (3.48)$$

a kapalinu lze popsat jediným viskózním koeficientem  $\eta$ .

### 3. Vodivá tekutina

V případě magnetohydrodynamiky se v rovnici (3.47) objeví na pravé straně ještě hustota Lorentzovy síly:

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \eta \Delta \mathbf{u} + (\zeta + \eta/3) \nabla(\operatorname{div} \mathbf{u}) + \mathbf{j} \times \mathbf{B}. \quad (3.49)$$

Pro odvození konzervativního tvaru stačí upravit jen hustotu Lorentzovy síly, konzervativní podobu všech ostatních členů známe:

$$\begin{aligned} (\mathbf{j} \times \mathbf{B})_k &= (\operatorname{rot} \mathbf{H} \times \mathbf{B})_k = \varepsilon_{klm} (\operatorname{rot} \mathbf{H})_l B_m = \varepsilon_{klm} \varepsilon_{lno} \partial_n (H_o) B_m = \\ &= -\varepsilon_{lkm} \varepsilon_{lno} \partial_n (H_o) B_m = (-\delta_{kn} \delta_{mo} + \delta_{ko} \delta_{mn}) \frac{\partial H_o}{\partial x_n} B_m = -\frac{\partial H_m}{\partial x_k} B_m + \frac{\partial H_k}{\partial x_m} B_m = \\ &= -\frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{\mathbf{H} \cdot \mathbf{B}}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_m} (H_k B_m) - H_k \frac{\partial B_m}{\partial x_m}. \end{aligned}$$

Poslední člen je nulový a v prostředním členu zaměníme sčítací index:

$$(\mathbf{j} \times \mathbf{B})_k = -\frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{\mathbf{H} \cdot \mathbf{B}}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_l} (H_k B_l) = -\frac{\partial}{\partial x_l} \left[ \frac{\mathbf{H} \cdot \mathbf{B}}{2} \delta_{kl} - H_k B_l \right]$$

Výraz v hranaté závorce je Maxwellův tenzor pnutí pro magnetické pole. Má stejně jako tenzor tlaku skalární a vektorovou část. Po převedení na levou stranu pohybové rovnice dostaneme vztah

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho u_k) + \frac{\partial}{\partial x_l} \left( T_{kl}^{(P)} + T_{kl}^{(M)} - V_{kl} \right) = 0. \quad (3.50)$$

Jednotlivé tenzory mají složky

$$\begin{aligned} T_{kl}^{(P)} &\equiv p \delta_{kl} + \rho u_k u_l, \\ T_{kl}^{(M)} &\equiv \frac{\mathbf{H} \cdot \mathbf{B}}{2} \delta_{kl} - H_k B_l, \\ V_{kl} &\equiv \eta \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} - \frac{2}{3} \delta_{kl} \operatorname{div} \mathbf{u} \right) + \zeta \delta_{kl} \operatorname{div} \mathbf{u}. \end{aligned} \quad (3.51)$$

Skalární část Maxwellova tenzoru pnutí se někdy nazývá magnetický tlak a je rovna hustotě energie magnetického pole

$$p_M = \frac{\mathbf{H} \cdot \mathbf{B}}{2} = \frac{B^2}{2\mu_0}. \quad (3.52)$$

Tenzorová část souvisí se silovým působením daným zakřivením magnetických silokřivek.

**Poznámka 1:** Uvedený vztah jsme již odvodili dříve jako první moment Boltzmannovy rovnice.

**Poznámka 2:** Magnetické pole přítomné ve slunečních skvrnách je zodpovědné za jejich nižší teplotu

$$p_{\text{out}} = p_{\text{in}} \quad \Rightarrow \quad nkT_{\text{out}} = \frac{B^2}{2\mu_0} + nkT_{\text{in}}$$

Tlak ve skvrně je dán magnetickou i hydrodynamickou částí.

**Poznámka 3:** Lorentzova síla má dvě části:

$$\mathbf{j} \times \mathbf{B} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{T}}_M = -\nabla p_M + \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} . \quad (3.53)$$

První část je gradientem magnetického tlaku, druhá část souvisí se zakřivením magnetických siločar. Síla se buď snaží siločarvy napřímit a nebo pokud jde o siločarvy uzavřené, snaží se z nich udělat kružnice.

### 3.1.4 Uzavření soustavy

Ve statistice jsme si ukázali, jak středování Boltzmannovy rovnice přes rychlostní část fázového prostoru vede na rovnice kontinua. Jedná se o rovnici kontinuity, rovnici pro rychlost, rovnici pro energii (teplotu, tlak), rovnici pro tepelný tok, atd. Nekonečnou soustavu parciálních diferenciálních rovnic získanou středováním přes mocniny rychlosti je třeba v určité fázi ukončit algebraickým vztahem. My tak učiníme u rovnice pro tlak a budeme předpokládat, že tlak splňuje algebraický vztah (může jít o polytropní či jinou závislost)

$$p = p(\rho) . \quad (3.54)$$

Na závěr zapišme přehledně získanou sadu MHD rovnic v konzervativním tvaru

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= \frac{1}{\sigma \mu_0} \Delta \mathbf{B} + \text{rot}(\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \rho \mathbf{u} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} (\rho u_k) + \frac{\partial}{\partial x_l} (T_{kl}^{(P)} + T_{kl}^{(M)} - V_{kl}) &= 0 , \\ p &= p(\rho) . \end{aligned}$$

a v tvaru s úplnými časovými derivacemi:

$$\begin{aligned} \frac{d \mathbf{B}}{dt} &= \frac{1}{\sigma \mu_0} \Delta \mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \mathbf{B} \text{div } \mathbf{u} . \\ \frac{d \rho}{dt} + \rho \text{div } \mathbf{u} &= 0 \\ \rho \frac{d \mathbf{v}}{dt} &= -\nabla p - \nabla p_m + \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} + \eta \Delta \mathbf{u} + (\zeta + \eta/3) \nabla(\text{div } \mathbf{u}) \\ p &= p(\rho) . \end{aligned}$$

Existují různé modifikace uvedené soustavy rovnic, rovnice kontinuity a pohybové rovnice mohou být například uvažovány pro elektronovou a iontovou složku odděleně, soustavu můžeme uzavřít až po rovnici pro energii algebraickým vztahem pro vedení tepla, rovnice lze zobecnit i pro dominantní vliv elektrického pole.

K nejčastěji používaným uzavřením soustavy MHD rovnic patří:

- **Uzavření nestlačitelnou tekutinou** ( $\rho = \text{const}$ ). Úplná časová derivace hustoty je nulová

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \rho = 0 \quad (3.55)$$

a z rovnice kontinuity lze ukázat, že  $\text{div } \mathbf{u} = 0$ .

- **Uzavření polytropou** ( $p\rho^{-\gamma} = \text{const}$ ). Po úpravě

$$\frac{d}{dt}(p\rho^{-\gamma}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial t}(p\rho^{-\gamma}) + v_k \frac{\partial}{\partial x_k}(p\rho^{-\gamma}) = 0.$$

Provedeme obě derivace jako derivace součinu funkcí a za parciální derivaci hustoty podle času dosadíme z rovnice kontinuity. Po jednoduchých úpravách získáme

$$\frac{\partial p}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) p + \gamma p \text{div } \mathbf{u} = 0. \quad (3.56)$$

- **Uzavření CGL** (Chew – Goldberg – Low). Zohledňuje anizotropní chování plazmatu:

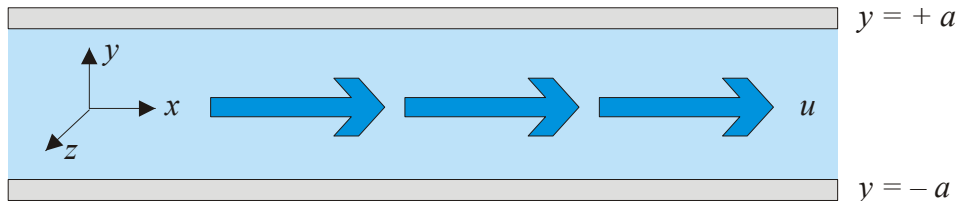
$$p\delta_{kl} \rightarrow p_{kl} = p_{\perp}\delta_{kl} + (p_{\parallel} - p_{\perp}) \frac{B_k B_l}{B^2}. \quad (3.57)$$

Toto anizotropní uzavření navrhli F. Chew, M. Goldberg a F. Low již v roce 1956.

### 3.2. Vybrané jevy z magnetohydrodynamiky

#### 3.2.1 Hartmannovo řešení

Z klasické hydrodynamiky je známo chování nestlačitelné viskózní kapaliny mezi dvěma vodorovnými deskami. Je-li na začátku a konci desek rozdílný tlak, může vzniknout jednoduché laminární proudění, které se řídí *Poiseuillovým zákonem*, který objevil francouzský fyzik a matematik Jean Louis Marie Poiseuille (1797–1869). Rychlost má parabolický průběh – v těsné blízkosti desek je rychlost nulová, uprostřed toku maximální. To je způsobeno viskózními procesy neboli vnitřním třením kapaliny. Okrajové efekty desek zanedbáváme.



Je-li kapalina vodivá, lze nalézt obdobné řešení z rovnic magnetohydrodynamiky, které poprvé odvodil dánský inženýr Julian Hartmann v roce 1937. Napišme nejprve výchozí soustavu rovnic magnetohydrodynamiky:

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0,$$

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \eta \Delta \mathbf{u} + \left[ \frac{\operatorname{rot} \mathbf{B}}{\mu} \times \mathbf{B} \right], \quad (3.58)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{1}{\sigma \mu} \Delta \mathbf{B} + \operatorname{rot} [\mathbf{u} \times \mathbf{B}].$$

První rovnice je rovnice kontinuity pro nestlačitelnou kapalinu, druhá rovnice je pohybová rovnice, napravo je postupně tlaková síla, viskózní síla a Lorentzova síla. Poslední rovnice je rovnice pro magnetické pole s difúzním členem a členem zamrzání.

**Poznámka:** Stavovou rovnici, kterou se běžně uzavírá MHD soustava, nemůžeme u nestlačitelné kapaliny použít, protože tlak není funkcí hustoty. Tlak klesá ve směru proudění lineárně, zatímco hustota kapaliny je konstantní. Soustavu lze uzavřít předpokladem konstantního gradientu tlaku ve směru proudění.

Souřadnicovou soustavu zvolíme podle obrázku (tak, abychom maximálně využili symetrii problému). Budeme předpokládat stacionární proudění, tj. časové derivace v (3.58) budou nulové. Proudění předpokládáme jen podél desek, tj. rychlostní pole bude mít jen složku  $u_x(y)$  závislost na  $y$  je dána symetrií problému, u desek (pro  $y = \pm a$ ) je rychlost nulová, uprostřed oblasti maximální. Nenulové magnetické pole budeme předpokládat v řezu proudění podle obrázku, tj. nenulové  $B_x(y)$  a  $B_y(y)$ . Z Maxwellovy rovnice  $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$  plyne, že  $B_y$  musí být konstantní. Tlak musí klesat podél proudění a může být stejně jako ostatní veličiny závislý na souřadnici  $y$ . Hledané řešení má tedy tvar:

$$\mathbf{u} = [u(y), 0, 0]; \quad \mathbf{B} = [B(y), B_0, 0]; \quad p = p(x, y). \quad (3.59)$$

Po dosazení do sedmi rovnic (3.58) zbudou netriviální vztahy

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \frac{d^2 u}{dy^2} + \frac{B_0}{\mu} \frac{dB}{dy}, \quad 0 = -\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{B}{\mu} \frac{dB}{dy}, \quad 0 = \frac{1}{\sigma \mu} \frac{d^2 B}{dy^2} + B_0 \frac{du}{dy}. \quad (3.60)$$



Řešení získané soustavy není složité. Předpokládejme, stejně jako v Poiseuillově zákoně, lineární úbytek tlaku ve směru proudění, tj.  $\partial p/\partial x = \text{const}$ . Lze ukázat, že jiný průběh ani není možný. Potom první a třetí rovnice dává soustavu pro rychlost a magnetické pole, z druhé rovnice je třeba dopočítat tlak. Pro  $u$  a  $B$  tedy máme:

$$\eta \frac{d^2 u}{dy^2} + \frac{B_0}{\mu} \frac{dB}{dy} = \text{const}, \quad \frac{1}{\sigma \mu} \frac{d^2 B}{dy^2} + B_0 \frac{du}{dy} = 0.$$

První rovnici derivujeme podle  $y$  a z rovnic vyloučíme druhé derivace magnetického pole:

$$\frac{d^3 u}{dy^3} - \frac{1}{D^2} \frac{du}{dy} = 0; \quad \text{kde} \quad \frac{1}{D^2} \equiv \frac{\sigma B_0^2}{\eta}.$$

Po první integraci máme

$$\frac{d^2 u}{dy^2} - \frac{1}{D^2} u = C_1.$$

Jde o lineární diferenciální rovnici s pravou stranou. Řešení nalezneme jako součet homogenního a partikulárního řešení (lze ho hledat ve tvaru konstanty):

$$u(y) = u_H(y) + u_P(y) = C_2 \text{ch}\left[\frac{y}{D}\right] + C_3 \text{sh}\left[-\frac{y}{D}\right] - C_1 D^2.$$

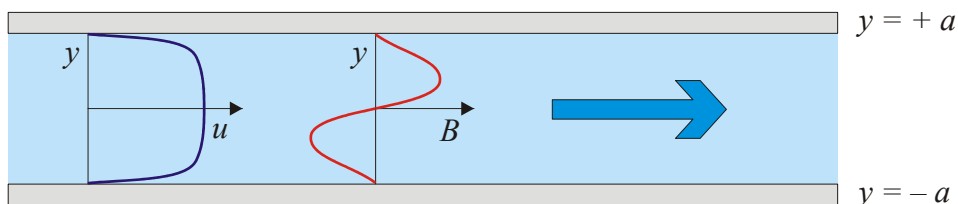
Namísto exponencií jsme zvolili bázi homogenního řešení z funkcí  $\text{ch}$  a  $\text{sh}$ . Konstanty integrace určíme z podmínek  $u(\pm a) = 0$ ;  $u(0) = u_0$ . Výsledné řešení je

$$u(y) = u_0 \frac{\text{ch}\left(\frac{a}{D}\right) - \text{ch}\left(\frac{y}{D}\right)}{\text{ch}\left(\frac{a}{D}\right) - 1}; \quad D \equiv \sqrt{\frac{\eta}{\sigma B_0^2}}. \quad (3.61)$$

Nyní již snadno z první nebo třetí rovnice (3.60) dopočteme magnetické pole. Integrační konstanty určíme z podmínky spojitosti tečných složek vektoru magnetické intenzity  $\mathbf{H}$  na rozhraní ( $B_{1t}/\mu_1 = B_{2t}/\mu_2$ ), odkud plyne  $B(\pm a) = 0$ . Výsledek je

$$B(y) = \mu u_0 \sqrt{\sigma \eta} \frac{\text{sh}\left(\frac{y}{D}\right) - \frac{y}{a} \text{sh}\left(\frac{a}{D}\right)}{\text{ch}\left(\frac{a}{D}\right) - 1}; \quad D \equiv \sqrt{\frac{\eta}{\sigma B_0^2}}. \quad (3.62)$$

Nalezený profil rychlostního a magnetického pole je na následujícím obrázku. Přítomnost magnetického pole způsobuje zploštění rychlostního pole v blízkosti centra proudění a jeho rychlý pokles v blízkosti desek. Nenulová konstantní složka pole ve směru  $y$  (napříč proudění) způsobuje existenci složky pole ve směru proudění, jejíž profil je také na obrázku.



Polohu maxima a minima magnetického profilu je možné získat derivací vztahu (3.62)

$$y_{1,2} = \pm D \operatorname{arcch} \left[ \frac{D}{a} \operatorname{sh} \left( \frac{a}{D} \right) \right]. \quad (3.63)$$

Zajímavá je limita rychlostního profilu pro slabé ( $a/D \ll 1$ ) a silné ( $a/D \gg 1$ ) magnetické pole.

#### ■ Slabá pole

Pro slabé pole provedeme rozvoj exponenciál do prvního řádu a dostaneme známý Poiseuillův parabolický profil, magnetické pole nemá na proudění podstatný vliv:

$$u \approx u_0 \left[ 1 - \left( \frac{y}{a} \right)^2 \right].$$

#### ■ Silná pole

Pro silné pole musíme řešit případ  $y > 0$  a  $y < 0$  odděleně. Ve výsledku ponecháme vždy kladnou exponenciálu, vyjde

$$u \approx u_0 \left[ 1 - \exp \left( - \frac{|y| - a}{D} \right) \right].$$

Rychlostní pole v tomto případě exponenciálně ubývá u stěn. Veličina  $D$  charakterizuje tloušťku hraniční vrstvy. Někdy se zavádí bezrozměrné, tzv. Hartmannovo číslo  $H$  vztahem

$$\#_{\text{Ha}} \equiv \frac{a}{D} = B_0 a \sqrt{\frac{\sigma}{\eta}}. \quad (3.64)$$

Kvadrát Hartmannova čísla je poměrem hustot magnetické a viskózní síly.

$$\#_{\text{Ha}}^2 \approx \frac{jB_0}{\eta \Delta u} \approx \frac{\sigma E B_0}{\eta u / a^2} \approx \frac{\sigma u B_0^2}{\eta u / a^2} = \frac{\sigma B_0^2 a^2}{\eta}.$$

### 3.2.2 Vlny konečné amplitudy

Soustava MHD rovnic je nelineární a velmi složitá. Při provádění linearizace sice dostáváme řešení ve tvaru rovinných vln, ze kterých můžeme složit vlny komplikovanější, ale vždy s infinitezimální amplitudou. Podstatnou část řešení ale vůbec nenacházíme. V této části ukážeme, že existují speciální řešení, která splňují obyčejnou vlnovou rovnici. Řešením je pak postupující vlna libovolného tvaru a libovolné amplitudy.

Uvažme MHD soustavu pro nestlačitelnou, neviskózní, ideálně vodivou kapalinu ( $\rho = \text{const}$ ,  $\eta = \zeta = 1/\sigma = 0$ ):

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \frac{1}{\mu} (\operatorname{rot} \mathbf{B}) \times \mathbf{B};$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \operatorname{rot} [\mathbf{u} \times \mathbf{B}]; \quad (3.65)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0;$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0.$$

Jde o rovnici pro rychlostní pole (pohybovou rovnici s tlakovou a Lorentzovou silou) a rovnici pro pole magnetické se členem zamrznání. Doplňkové jsou rovnice pro nestlačitelnost a Gaussova věta pro magnetické pole.

Předpokládejme nyní, že veličiny se mění jen v jednom určitém směru. Volme osu  $z$  souřadnicové soustavy v tomto směru. Potom hledáme řešení ve tvaru

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(t, z); \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}(t, z); \quad p = p(t, z). \quad (3.66)$$

Z doplňkových rovnic (divergencí) v (3.65) okamžitě plyne

$$u_z = u_0(t); \quad B_z = B_0(t).$$

Předpokládejme, že chceme nalézt řešení v podobě přesouvajícího se vlnového balíku, který je lokalizovaný v prostoru, proto nemůže rychlost plazmatu být nenulová v nekonečnu a musíme položit  $u_0 = 0$ . V uvedené geometrii tedy máme

$$\mathbf{u} = (u_x, u_y, 0), \quad \mathbf{B} = (B_x, B_y, B_0), \quad \nabla \rightarrow (0, 0, \partial/\partial z).$$

Napišme nyní netriviální členy v prvních dvou rovnicích (3.65):

$$\begin{aligned} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} &= [0, 0, 0]; \\ \text{rot } \mathbf{B} \times \mathbf{B} &= \left[ B_0 \frac{\partial B_x}{\partial z}, B_0 \frac{\partial B_y}{\partial z}, -\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{B_x^2 + B_y^2}{2} \right) \right]; \\ \nabla p &= \left[ 0, 0, \frac{\partial p}{\partial z} \right]; \\ \text{rot}(\mathbf{u} \times \mathbf{B}) &= \left[ B_0 \frac{\partial u_x}{\partial z}, B_0 \frac{\partial u_y}{\partial z}, 0 \right]. \end{aligned}$$

Vidíme, že rozpisy jednotlivých veličin se liší ve směru osy  $z$  a v rovině  $(x, y)$ . Naše výchozí rovnice dají:

#### ■ Podélný směr (v ose $z$ )

$$0 = \frac{\partial}{\partial z} \left[ p + \frac{B_x^2 + B_y^2}{2\mu} \right]; \quad \frac{\partial B_0}{\partial t} = 0.$$

Z první rovnice plyne nezávislost celkového tlaku na souřadnici  $z$ , složku  $B_z = B_0$  můžeme do pravé strany první rovnice klidně přidat, protože  $B_0$  nezávisí na  $z$ . Podle druhé rovnice  $B_0$  nezávisí ani na  $t$  a jde o skutečnou konstantu v čase i v prostoru. Pro celkový tlak platí

$$\Pi \equiv p + \frac{\mathbf{B}^2}{2\mu} = \Pi(t).$$

#### ■ Kolmý směr (v rovině $xy$ )

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} &= \frac{1}{\mu\rho} B_0 \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial z}; \\ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= B_0 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z}. \end{aligned} \quad (3.67)$$

V kolmém směru je soustava rovnic lineární, aniž bychom byli nuceni linearizaci provádět. Obě rovnice jsou navíc triviálně splněny i ve směru osy  $z$ , protože zde jsou veličiny konstantní. Lze je tedy chápat jako výchozí soustavu rovnic pro vlnění v obou směrech. Jednoduchým vyloučením proměnných získáváme pro rychlostní i magnetické pole vlnové

rovnice (stačí první rovnici derivovat podle času a za  $\partial \mathbf{B} / \partial t$  dosadit z druhé rovnice nebo naopak derivovat podle času druhou rovnici a dosadit za  $\partial \mathbf{u} / \partial t$  z rovnice první. Výsledek je

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{v_A^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{u} = 0; \quad \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{v_A^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{B} = 0; \quad v_A \equiv \frac{B_0}{\sqrt{\mu \rho}}. \quad (3.68)$$

Jde o vlnovou rovnici s charakteristickou rychlostí rovnou Alfvénově rychlosti. Nelineární MHD soustava rovnic pro případ ideálně vodivé nestlačitelné kapaliny bez tření poskytuje řešení ve tvaru obecné vlny libovolné amplitudy. Poznamenejme, že hodnotu Alfvénovy rychlosti snadno určíme z rovnosti hustoty kinetické a magnetické energie  $\rho v_A^2 / 2 \approx B^2 / 2 \mu_0$ .

### 3.2.3 Helicita

V plazmových vláknech se často pozorují typické šroubovicové útvary. Nacházejí se v laboratorním i kosmickém plazmatu, v pinčích i v kometárních ohonech. V matematice se pro podobně strukturovaná pole zavádí pojem helicity.

#### ■ Helicita a Beltramova podmínka

Hustota helicity vektorového pole  $\mathbf{V}$  se definuje jako

$$\mathcal{H}(t, \mathbf{x}) \equiv \mathbf{V} \cdot \text{rot } \mathbf{V}, \quad (3.69)$$

celkovou helicitou potom rozumíme integrál

$$K(t) = \int_V \mathcal{H}(t, \mathbf{x}) dV. \quad (3.70)$$

Helicita je skalární veličina charakterizující helikálnost (šroubovitost) silokřivek pole. Je nulová pro všechna pole splňující podmínku nevířivosti ( $\text{rot } \mathbf{V} = 0$ ) a také pro všechny víry s kruhovými proudnicemi. Pole s helikální strukturou mají helicitu úměrnou  $\cos \beta$  ( $\beta$  – úhel stoupání šroubovice). Pro plazmová vlákna popisovaná v rámci MHD teorie může být důležitá hustota helicity vektorového potenciálu  $\mathbf{A}$ , magnetického pole  $\mathbf{B}$ , proudové hustoty  $\mathbf{j}$ , elektrického pole  $\mathbf{E}$  a rychlostního pole  $\mathbf{u}$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_A &= \mathbf{A} \cdot \text{rot } \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}, \\ \mathcal{H}_B &= \mathbf{B} \cdot \text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} \cdot \mathbf{B}, \\ \mathcal{H}_j &= \mathbf{j} \cdot \text{rot } \mathbf{j} = -\frac{1}{\mu_0} \mathbf{j} \cdot \Delta \mathbf{B}, \\ \mathcal{H}_E &= \mathbf{E} \cdot \text{rot } \mathbf{E} = -\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \mathcal{H}_u &= \mathbf{u} \cdot \text{rot } \mathbf{u} = \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega}. \end{aligned} \quad (3.71)$$

Zabývejme se nyní poli, která splňují Beltramovu podmínku (tzv. Beltramova pole), pro která je rotace pole úměrná samotnému poli

$$\text{rot } \mathbf{V} = \alpha \mathbf{V}, \quad \text{neboli} \quad \mathbf{V} \times \text{rot } \mathbf{V} = 0. \quad (3.72)$$

Jde o pole pojmenovaná podle italského matematika Eugenia Beltramiho (1835–1899). Koeficient úměrnosti mezi rotací pole a polem samotným se může měnit v čase i v prostoru. Beltramovo pole je vždy helikální, protože platí

$$\mathcal{H} \equiv \mathbf{V} \cdot \text{rot } \mathbf{V} = \alpha \mathbf{V} \cdot \mathbf{V} = \alpha V^2. \quad (3.73)$$

Koeficient úměrnosti  $\alpha$  je helicity pole dělená kvadrátem jeho velikosti. Je-li navíc koeficient  $\alpha$  konstantní a pole je nezřídlové ( $\text{div } \mathbf{V} = 0$ ), potom pole splňuje Helmholtzovu rovnici

$$\Delta \mathbf{V} + \alpha^2 \mathbf{V} = 0. \quad (3.74)$$

To je vidět po aplikaci rotace na rovnici (3.72). Vektor  $\mathbf{V}$  je v tomto případě vlastním vektorem Laplaceova operátoru v odpovídající geometrii.

Typickým matematickým příkladem Beltramových polí jsou tzv. ABC toky:

$$\mathbf{V} = (A \cos y + B \sin z, B \cos z + C \sin x, C \cos x + A \sin y). \quad (3.75)$$

Pro pole tohoto typu platí  $\text{rot } \mathbf{V} = \mathbf{V}$  a  $\Delta \mathbf{V} = -\mathbf{V}$ . V ABC tocích existují chaotické oblasti.

Ve fyzice plazmatu se často uvažují bezsilové konfigurace, ve kterých míří proudová hustota ve směru magnetického pole  $\mathbf{j} \parallel \mathbf{B}$  (tzv. Birkelandovy proudy). V tomto případě je hustota Lorentzovy síly  $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$  nulová. Konfigurace má nejnižší možnou energii a disipativní plazma se k této konfiguraci vždy postupně blíží. Magnetické pole v bezsilové konfiguraci splňuje Beltramovu podmínku. Snadno to ukážeme z Ampérova zákona:

$$\mathbf{j} \sim \mathbf{B} \quad \Rightarrow \quad \text{rot } \mathbf{B} \sim \mathbf{B} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{B} \times \text{rot } \mathbf{B} = 0. \quad (3.76)$$

Magnetické pole v bezsilové konfiguraci je proto vždy helikální.

### ■ Zachování magnetické helicity

Nyní ukážeme, že integrální magnetická helicity se zachovává za těchto předpokladů:

1. *Difúze magnetického pole je zanedbatelná.* V rovnici pro časový vývoj tedy dominuje jen člen zamrznání. Plazma má nekonečnou vodivost a Ohmův zákon (3.7) získá tvar

$$\mathbf{E} = -\mathbf{u} \times \mathbf{B} \quad (3.77)$$

Člen zamrznání způsobí provázanost magnetických siločar s proudnicemi a z rovnice  $\text{div } \mathbf{B} = 0$  plyne nestlačitelnost plazmatu, tj.

$$\text{div } \mathbf{u} = 0 \quad (3.78)$$

2. *Nulová normálová složka magnetického pole na povrchu systému.* Tento předpoklad znamená uzavřené magnetické siločarvy. Na povrchu systému platí vztah

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad (3.79)$$

kde  $\mathbf{n}$  je vektor normály k ploše povrchu. Aby tento předpoklad byl pravdivý, musíme vzít za systém celou magnetickou trubici nebo musí být systém velmi rozsáhlý.

Integrální helicity pro vektorový potenciál magnetického pole je definována jako

$$K = \int \mathbf{A} \cdot \text{rot } \mathbf{A} dV = \int \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} dV \quad (3.80)$$

Úplná časová derivace vede na výraz

$$\frac{dK}{dt} = \int_V \left[ \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) + (\mathbf{u} \cdot \nabla) (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \right] dV,$$

První člen budeme derivovat jako součin, druhý upravíme do tvaru divergence (využijeme nestlačitelnost  $\text{div } \mathbf{u} = 0$ )

$$\frac{dK}{dt} = \int_V \left( \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) dV + \int_V [\text{div}(\mathbf{u}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}))] dV,$$

s využitím Gaussovy věty pro poslední člen dostaneme

$$\frac{dK}{dt} = \int_V \left( \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \cdot \mathbf{B} \right) dV + \int_V \left( \mathbf{A} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) dV + \int_S (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dS. \quad (3.81)$$

Nejprve upravíme prostřední člen získané rovnice. Za časový vývoj magnetického pole dosadíme člen zamrznání a upravíme ho pomocí vztahu (A.16):

$$\begin{aligned} \int_V \mathbf{A} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} dV &= \int_V \mathbf{A} \cdot \text{rot}(\mathbf{u} \times \mathbf{B}) dV = - \int_V \text{div}[\mathbf{A} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B})] dV + \int_V (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \cdot \text{rot} \mathbf{A} dV = \\ &= - \int_V \text{div}[(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{u} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{u})\mathbf{B}] dV + \int_V (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{B} dV = \\ &= - \int_V \text{div}[(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{u} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{u})\mathbf{B}] dV = \\ &= - \int_S [(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{u})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{n})] dS = \\ &= - \int_S (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dS. \end{aligned}$$

Pravý člen na předposledním řádku je nulový, protože na hranici systému je nulová dle předpokladu (2) normálová složka magnetického pole  $\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}$ . Zbylý nenulový člen se vyruší s posledním členem v rovnici (3.81), ze které proto zbude:

$$\frac{dK}{dt} = \int_V \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \cdot \mathbf{B} dV. \quad (3.82)$$

Časovou derivaci vektorového potenciálu určíme z rovnice pro elektrické pole

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (3.83)$$

a následně dosadíme do rovnice (3.82):

$$\frac{dK}{dt} = - \int_V (\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} + \nabla \phi \cdot \mathbf{B}) dV = - \int_V [(-\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{B} + \text{div}(\phi \mathbf{B})] dV = - \int_S \phi (\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}) dS = 0. \quad (3.84)$$

Integrální helicity se tedy za výše zmíněných předpokladů zachovává.

### ■ Stav s minimální magnetickou energií

Uvažujme nyní magnetickou trubici vyplněnou dokonale vodivým plazmatem. Na povrchu plazmatu je normálová složka pole nulová. Difúzní procesy jsou zanedbatelné, zachovává se magnetická helicity  $K$ . Hledejme proto extrém magnetické energie s vazbou danou zachováním magnetické helicity. Použijeme standardní metodu Lagrangeových multiplikátorů pro extrém s vazbou. Nutná podmínka extremálnosti je:

$$\begin{aligned} \delta(W_M + \lambda K) &= 0 \quad \Rightarrow \\ \delta \int \left( \frac{B^2}{2\mu_0} + \lambda \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \right) dV &= 0 \quad \Rightarrow \\ \int \left( \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \cdot \delta \mathbf{B} + \lambda \delta \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \lambda \mathbf{A} \cdot \delta \mathbf{B} \right) dV &= 0. \end{aligned}$$

Variace pole  $\delta\mathbf{B}$  je provázána s variací magnetického potenciálu  $\delta\mathbf{A}$ . Vzhledem k tomu, že  $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$ , platí  $\delta\mathbf{B} = \text{rot } \delta\mathbf{A}$  (derivace a variace jsou záměnné, viz [1])

$$\int \left( \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \cdot \text{rot } \delta\mathbf{A} + \lambda \delta\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \lambda \mathbf{A} \cdot \text{rot } \delta\mathbf{A} \right) dV = 0.$$

Členy s rotací převedeme na divergence za pomoci vztahu (A.16):

$$\int \left( -\frac{1}{\mu_0} \text{div}(\mathbf{B} \times \delta\mathbf{A}) + \frac{1}{\mu_0} \text{rot } \mathbf{B} \cdot \delta\mathbf{A} + \lambda \delta\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} - \lambda \text{div}(\mathbf{A} \times \delta\mathbf{A}) + \lambda \text{rot } \mathbf{A} \cdot \delta\mathbf{A} \right) dV = 0.$$

Nyní za pomoci Gaussovy věty převedeme integrály přes divergence na integrály přes povrch magnetické trubice, zbylé integrály ponecháme a dosadíme  $\text{rot } \mathbf{A} = \mathbf{B}$ :

$$-\int_{\partial V} \left[ \left( \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} + \lambda \mathbf{A} \right) \times \delta\mathbf{A} \right] \cdot d\mathbf{S} + \int_V \left[ \left( \frac{1}{\mu_0} \text{rot } \mathbf{B} + 2\lambda \mathbf{B} \right) \cdot \delta\mathbf{A} \right] dV = 0.$$

Variace vektorového potenciálu na povrchu oblasti musí být nulové, a proto první integrál vymizí:

$$\int_V \left[ \left( \frac{1}{\mu_0} \text{rot } \mathbf{B} + 2\lambda \mathbf{B} \right) \cdot \delta\mathbf{A} \right] dV = 0$$

Tento výsledek musí platit pro jakékoli variace vektorového potenciálu, a proto musí být nulový samotný integrand:

$$\frac{1}{\mu_0} \text{rot } \mathbf{B} + 2\lambda \mathbf{B} = 0.$$

Odtud ale okamžitě plyne nutná podmínka extrémnosti magnetické energie ve tvaru

$$\boxed{\text{rot } \mathbf{B} = \alpha \mathbf{B}.} \quad (3.85)$$

Ve stavu s minimální energií, za podmínky zachování magnetické helicity, je tedy magnetické pole Beltramovým polem. Proudová hustota míří ve směru pole, jde o bezsilovou konfiguraci, ve které tečou proudy podél magnetických silokřivek (tzv. Birkelandovy proudy). Stav s minimální magnetickou energií je nutně helikální. Magnetické pole splňuje Helmholtzovu rovnici, kterou získáme aplikováním operace rotace na rovnici (3.85):

$$\boxed{(\Delta + \alpha^2) \mathbf{B} = 0.} \quad (3.86)$$

Je třeba ovšem poznamenat, že ne všechna řešení rovnice (3.86) jsou řešeními rovnice (3.85), neboť derivováním jsme zvýšili řád rovnice. Helmholtzova rovnice (3.86) již tedy není nutnou podmínkou extrémnosti magnetické energie. Pokud má plazma konečnou vodivost, dochází k disipaci energie a přepojování magnetických silokřivek. Plazma se snaží zaujmout stav s co možná nejnižší magnetickou energií a dospět do stavu bezsilové konfigurace. Při těchto procesech se ovšem helicity mění.

### ■ Disipace magnetické helicity

Má-li systém uzavřené magnetické silokřivky (nulovou normálovou složku magnetického pole na povrchu), jsou jedinou cestou jak změnit helicitu pole disipativní procesy a přepojení silokřivek (rekonekce). Odhadněme nyní úlohu difúzního členu v rovnici (3.13). Provedeme-li krok za krokem odvození uvedené výše s nezanedbaným difúzním členem, dostaneme jednoduchý vztah

$$\frac{dK}{dt} = -\frac{1}{\sigma} \int_V \mathbf{j} \cdot \mathbf{B} dV \quad (3.87)$$

Energie magnetického pole je dána vztahem

$$W_M = \frac{1}{2\mu_0} \int_V B^2 dV. \quad (3.88)$$

Časová změna energie je dána Jouleovou disipací

$$\frac{dW_M}{dt} = -\frac{1}{\sigma} \int_V j^2 dV \quad (3.89)$$

K dalšímu výpočtu využijeme Schwartzovu nerovnost [2] na prostoru  $L^2$ :

$$|\langle \mathbf{j} | \mathbf{B} \rangle| \leq \|\mathbf{j}\| \cdot \|\mathbf{B}\| \quad \Rightarrow \quad \left| \int \mathbf{j} \cdot \mathbf{B} dV \right| \leq \sqrt{\int j^2 dV} \sqrt{\int B^2 dV}.$$

Okamžitě tak získáme odhad

$$\left| \frac{dK}{dt} \right| \leq \left( \frac{2\mu_0}{\sigma} W_M \left| \frac{dW_M}{dt} \right| \right)^{1/2}. \quad (3.90)$$

Vztah ještě upravíme pomocí dvou dalších rozměrových odhadů: Podíl magnetické energie a helicity je nepřímo úměrný rozměrům systému

$$\frac{W_M}{|K|} \sim \frac{(B^2/2\mu_0)\Delta V}{|AB|\Delta V} \sim \frac{B^2/2\mu_0}{BL \cdot B} \sim \frac{1}{2\mu_0 L} \quad \Rightarrow \quad W_M \sim \frac{|K|}{2\mu_0 L}. \quad (3.91)$$

Druhým odhadem je charakteristická doba difúze magnetického pole (tzv. rezistivní čas). Z rovnice difúze máme

$$\partial f / \partial t = \frac{1}{\sigma\mu_0} \Delta f \quad \Rightarrow \quad f / \tau_R \approx \frac{1}{\sigma\mu_0} f / L^2 \quad \Rightarrow \quad \tau_R \sim L^2 \sigma\mu_0. \quad (3.92)$$

Odhad (3.90) nyní můžeme upravit do používaného tvaru

$$\left| \frac{\Delta K}{\Delta t} \right| \lesssim \left( \frac{2\mu_0}{\sigma} \frac{|K|}{2\mu_0 L} \frac{|K|}{2\mu_0 L \Delta t} \right)^{1/2} = \left( \frac{K^2}{2\sigma\mu_0 L^2 \Delta t} \right)^{1/2} = \left( \frac{K^2}{2\tau_R \Delta t} \right)^{1/2}$$

a pro relativní změnu helicity platí odhad

$$\left| \frac{\Delta K}{K} \right| \lesssim \left( \frac{\Delta t}{2\tau_R} \right)^{1/2}. \quad (3.93)$$

Pro rychlé děje ( $\Delta t \ll \tau_R$ ) bude změna helicity  $\Delta K$  zanedbatelná. Například sluneční koronální erupce s dobou rekonekce  $\Delta t \sim 1000$  s, lineárními rozměry  $L \sim 5000$  km a koeficientem magnetické difúze  $\eta_M \sim 10^{-6} \text{ km}^2 \text{ s}^{-1}$  dají charakteristický čas difúze (rezistivní čas)  $\tau_R \sim 3 \times 10^{13}$  s a relativní změnu helicity  $\Delta K / K \lesssim 4 \times 10^{-6}$ . Opačná situace je v plazmatu tokamaku. Rezistivní čas je v řádu jednotek sekund a doba udržení v desítkách sekund. Změna helicity je pro tato zařízení podstatná.



### 3.2.4 Přepojení magnetických silokřivek

V přírodě je velmi časté, že magnetická pole různých zdrojů se vzájemně propojují a vytvářejí tak jakousi pavučinovou síť magnetických polí. Například pole střelky kompasu má jak uzavřené silokřivky, které se vracejí do druhého pólu, tak i otevřené silokřivky vyvěrající z oblasti pólů střelky, které se nikdy nevrátí zpět. Napojují se totiž na magnetické silokřivky pole Země. Právě proto střelka kompasu míří k severu.

V přírodě je velmi časté i náhlé přepojování magnetických silokřivek, tzv. rekonekce. Magnetické pole relativně rychle přejde do stavu s nižší energií tím, že změní topologii svých silokřivek. Silokřivky se uspořádají do jiné, energeticky výhodnější konfigurace. Uvolněná energie zahřeje okolní plazma. K přepojení dochází nejčastěji v oblastech, kde magnetické silokřivky míří opačným směrem. Tak tomu je například ve smyčkách magnetického pole ve sluneční koróně, na čelní straně magnetosféry Země nebo v magnetickém ohonu Země.

K popisu přepojení magnetických silokřivek již nelze použít ideální magnetohydrodynamiku, ve které má plazma nulový elektrický odpor, resp. nekonečnou vodivost. V takovém prostředí má rovnice pro časový vývoj jen člen zamrznání a plazma je dokonale provázané s magnetickým polem. Plazma se chová jako nestlačitelná kapalina, protože z rovnice  $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$  plyne rovnice pro nestlačitelnost  $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$ . V ideální magnetohydrodynamice není možné proudění plazmatu napříč magnetických silokřivek, neexistuje disipace energie, magnetický tok libovolnou uzavřenou plochou je konstantní, magnetická helicity magnetické trubice se zachovává a dvě částice ležící na jedné silokřivce budou na této silokřivce neustále. Jakákoli změna topologie magnetických silokřivek je v rámci ideální magnetohydrodynamiky nemožná.

Pro popis přepojení magnetických silokřivek je proto nutné použít tzv. rezistivní magnetohydrodynamiku, ve které má plazma konečný odpor. Energie nahromaděná v magnetickém poli se při přechodu do jiné topologie silokřivek musí uvolnit, a to je možné jedině v plazmatu s konečným odporem.

Pro rezistivní magnetohydrodynamiku je velmi významný *rezistivní čas* (3.92) odvozený rozměrovou analýzou z rovnice difúze. Jde o charakteristickou časovou konstantu magnetické difúze, za kterou je odpovědný nenulový odpor plazmatu.

Většina pohybů v plazmatu s magnetickým polem je charakterizována Alfvénovou rychlostí (3.68). Doba, za kterou rozruch projde touto rychlostí plazmatem, se nazývá *Alfvénův čas*. Oba charakteristické časy jsou dány relacemi

$$\tau_R \sim L^2 \sigma \mu_0; \quad \tau_A \sim \frac{L}{v_A} = \frac{L \sqrt{\mu_0 \rho}}{B_0}. \quad (3.94)$$

Z experimentů je známo, že typická doba rekonekce leží mezi oběma časy a je rovna přibližně geometrickému průměru těchto časů:

$$\tau_{\text{REC}} = \sqrt{\tau_R \tau_A}. \quad (3.95)$$

Důležitou charakteristikou plazmatu je Lundquistovo číslo  $S$ , které je poměrem rezistivního a Alfvénova času:

$$\#_{\text{Lu}} \equiv S \equiv \frac{\tau_R}{\tau_A} = L \sigma B_0 \sqrt{\frac{\mu_0}{\rho}} = L \sigma \mu_0 v_A. \quad (3.96)$$

Lundquistovo číslo je shodné s Reynoldsovým magnetickým číslem, pokud za rychlost plazmatu dosadíme Alfvénovu rychlost. Pro různé plazma přibližně platí [5]:

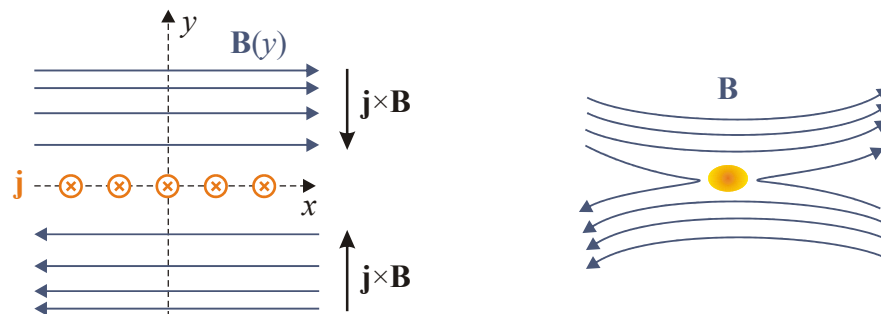
Plazma	$L$ (m)	$\tau_R$ (s)	$\tau_A$ (s)	$S$
oblouk	$10^{-1}$	$10^{-3}$	$10^{-3}$	1
tokamak	1	1	$10^{-8}$	$10^8$
jádro Země	$10^6$	$10^{12}$	$10^5$	$10^7$
sluneční skvrna	$10^7$	$10^{14}$	$10^5$	$10^9$
sluneční koróna	$10^9$	$10^{18}$	$10^6$	$10^{12}$

Vidíme, že s výjimkou obloukového plazmatu je Reynoldsovo (Lundquistovo) číslo velmi vysoké a jak pro fúzní, tak pro astrofyzikální plazma dominuje v rovnici pro časový vývoj člen zamrznání. Ve většině plazmatu lze proto použít ideální magnetohydrodynamiku. Oblasti přepojení silokřivek, kde jsou podstatné difúzní procesy, jsou prostorově omezené a nacházejí se jen v místech slabého nebo nulového magnetického pole. Těmto oblastem říkáme *difúzní region*. V něm musíme použít rovnice rezistivní magnetohydrodynamiky a na jeho hranicích navázat řešení na řešení ideální magnetohydrodynamiky. Základní sada rezistivní magnetohydrodynamiky může mít například tvar

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) &= 0, \\ \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} &= -\nabla p + \frac{1}{\mu_0} (\text{rot } \mathbf{B}) \times \mathbf{B}, \\ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= \frac{1}{\sigma \mu_0} \Delta \mathbf{B} + \text{rot}(\mathbf{u} \times \mathbf{B}); \\ \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\rho u^2}{2} + e \right) + \nabla \cdot \left( \frac{\rho u^2}{2} \mathbf{u} + e \mathbf{u} + \vec{\mathbf{P}} \cdot \vec{\mathbf{u}} + \mathbf{q} \right) &= \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}; \\ \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{B^2}{2\mu_0} + \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} \right) + \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) &= -\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}; \\ \text{rot } \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \end{aligned} \tag{3.97}$$

Vzhledem k disipaci energie je nutné uvažovat i rovnici pro energii a soustavu uzavřít nějakým vztahem pro tepelný tok  $\mathbf{q}$ , například Fourieovým zákonem.

#### ■ Samovolná 2D rekonekce v magnetické vrstvě



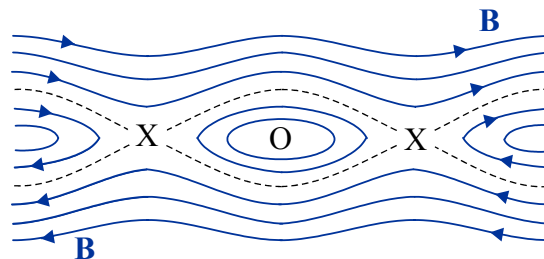
Nejjednodušší možná situace je zakreslena na obrázku. Ve směru osy  $y$  magnetické pole postupně slábne až na nulovou hodnotu pro  $y = 0$ . Zde pole obrací směr a opět roste. V oblasti nulového pole teče elektrický proud (rotace pole je nenulová). V rovině  $x$ - $y$  se vytváří tzv. *neutrální vrstva*, kde proud míří v ose  $z$ . Na plazma působí Lorentzova síla  $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$  a stlačuje ho

směrem k neutrální vrstvě. V plazmatu s nulovým odporem se vytvoří rovnováha mezi hustotou Lorentzovy síly a gradientem tlaku plazmatu, veškerý makroskopický pohyb ustane.

Má-li plazma ovšem nenulový, libovolně malý odpor, nejsou již magnetické siločivky vmrzuté do plazmatu a plazma se může pohybovat (driftovat) napříč siločivkám. Rychlost tohoto pohybu je dána obecným vztahem pro driftovou rychlost (viz 1. kapitolu nebo [1]):

$$\mathbf{u}_d = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2} = \frac{\mathbf{j} \times \mathbf{B}}{\sigma B^2} = \frac{\text{rot} \mathbf{B} \times \mathbf{B}}{\sigma \mu_0 B^2}. \quad (3.98)$$

Vzájemný pohyb plazmatu a siločivek v prostředí s nenulovým odporem způsobuje jejich přetrhávání a napojování na jiné siločivky. Uvolněná magnetická energie Jouleovskými zahřeje plazma. Podle tvaru siločivek se bod, ve kterém došlo k přepojení, nazývá *X* bod. Často je takových bodů v neutrální vrstvě celá řada a mezi nimi vznikají tzv. magnetické ostrovy (plazmoidy), v jejichž střezech jsou tzv. *O* body:



Čárkovanou čarou je označena *separatrix*, křivka oddělující různé topologie magnetického pole. V horní části míří siločivky magnetického pole jedním směrem, v dolní směrem opačným. V oblasti kolem neutrální vrstvy se vytvořily magnetické ostrovy. Podrobněji tento mechanismus probereme v části věnované rezistivním nestabilitám. Nestabilitu vedoucí ke vzniku magnetických ostrovů nazýváme *ostrůvkovou* (tearing) nestabilitou.

Pro posouzení rychlosti rekonekce se používá tzv. *index rekonekce* (Alfvénovo Machovo číslo). Index rekonekce je definován jako poměr rychlosti plazmatu a Alfvénovy rychlosti. Pro samovolnou (spontánní) 2D rekonekci máme

$$\#_{\text{sp}} = \frac{u_d}{v_A} \approx \frac{1/L\sigma\mu_0}{L/\tau_A} = \frac{\tau_A}{L^2\sigma\mu_0} = \frac{\tau_A}{\tau_R} = \frac{1}{S},$$

tedy platí

$$\boxed{\#_{\text{sp}} \approx \frac{1}{S}}. \quad (3.99)$$

Pro samovolnou 2D rekonekci je index rekonekce převrácenou hodnotou Lundquistova čísla, pro fúzní i astrofyzikální plazma je velmi malý, což znamená, že spontánní rekonekce probíhá velmi pomalu. V kapitole 3.3.2 ukážeme, že v radiálně rozlehlém plazmovém vlákne se neutrální vrstva nulového pole vytvoří samovolně. Na opačných stranách vrstvy má pole opačnou polaritu a dochází zde k samovolné 2D rekonekci.

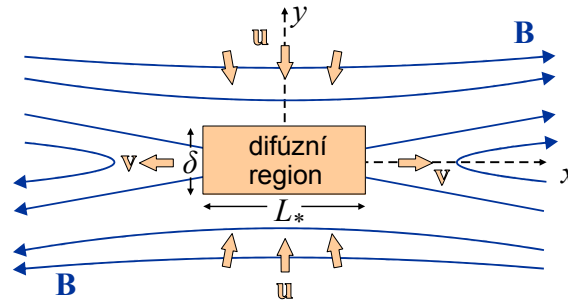
### ■ Řízená 2D rekonekce, Sweetův–Parkerův model

K přepojení siločivek nemusí docházet samovolně, jako v minulém případě, kdy se v plazmatu vytvořila neutrální vrstva (nulová vrstva, vrstva nulového pole, proudová vrstva) a plazma samotné se díky relaxačním procesům začalo pohybovat k neutrální vrstvě.

Často dochází v přírodě k situaci, že se dvě oblasti plazmatu srážejí, někdy dokonce i velkými rychlostmi. Při takové srážce se opět může vytvořit oblast opačně orientovaných siločivek

a nulová vrstva. Tentokrát ale nikoli v důsledku relaxačních procesů. Typickým příkladem jsou procesy ve sluneční koróně vedoucí na řízenou rekonekci a následné sluneční vzplanutí v důsledku uvolněné energie.

Jednoduchý model řízené rekonekce navrhl P. A. Sweet v roce 1958 a nezávisle americký astrofyzik Eugene Parker (1927) v roce 1957. Model předpokládá dvě oblasti plazmatu s opačně orientovanými silokřivkami, které jsou vtlačovány k neutrální vrstvě rychlostí  $u$ . Zde existuje malá oblast, ve které je uvažována rezistivní magnetohydrodynamika, tzv. *difúzní region*. Právě v této oblasti probíhá rekonekce silokřivek. Na bocích oblasti musí být plazma vytlačováno ven z difúzního regionu rychlostí  $v$ . Sweetův–Parkerův model předpokládá, že pro rozměry regionu platí  $L_* \gg \delta$ . Elektrický proud teče opět v rovině  $x$ - $z$  ve směru osy  $z$ .



Z rovnice kontinuity máme

$$u L_* = v \delta. \quad (3.100)$$

Dále předpokládejme, že energie přinášená do difúzního regionu v podobě vtékajících magnetických silokřivek je nějak konvertována na kinetickou energii vytékajícího plazmatu:

$$\frac{B^2}{2\mu_0} \approx \frac{1}{2} \rho v^2. \quad (3.101)$$

Ze vztahu (3.101) vidíme, že plazma z difúzního regionu vytéká Alfvénovou rychlostí:

$$v = v_A = \frac{B}{\sqrt{\mu_0 \rho}}. \quad (3.102)$$

Podstatná je disipace, magnetická energie proudící do difúzního regionu se mění na Jouleovo teplo, časová změna magnetické energie způsobená prouděním magnetického pole z ideální oblasti do difúzního regionu tedy bude rovna Jouleovu výkonu:

$$\frac{d}{dt} \frac{B^2}{2\mu_0} \approx jE \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{u} \cdot \nabla) \frac{B^2}{2\mu_0} \approx \sigma E^2.$$

Rozměrová analýza posledního vztahu dá ( $\nabla \approx 1/\delta$ ,  $E \approx uB$ ) pro tloušťku difúzního regionu

$$\delta \approx \frac{1}{\mu_0 \sigma u}. \quad (3.103)$$

Určeme na závěr ještě index řízené rekonekce, který je v tomto případě roven Machovu Alfvénovu číslu. Vyloučením  $\delta$  ze vztahů (3.100) a (3.103) získáme

$$\frac{u L_*}{v_A} \approx \frac{1}{\mu_0 \sigma u} \quad \Rightarrow \quad \frac{u^2}{v_A^2} \approx \frac{1}{L_* \mu_0 \sigma u} = \frac{1}{S}.$$

Odmocněním získáme index rekonekce

$$\#_{\text{dr}} = M_A \equiv \frac{u}{v_A} \approx \frac{1}{\sqrt{S}}. \quad (3.104)$$

### ■ Rychlá 2D rekonekce

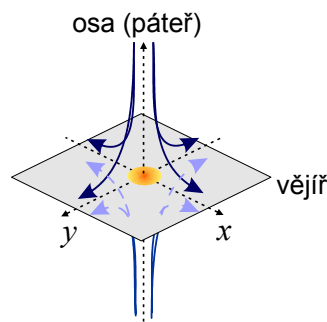
Index řízené rekonekce je větší než index samovolné rekonekce, řízená rekonekce proto probíhá rychleji. Nicméně některé děje, jako například koronální výrony hmoty, jsou ještě rychlejší, než by odpovídalo Sweetovu–Parkerovu modelu. Často se používá Petschekův model, ve kterém se plazma stýká jen ve velmi úzké oblasti a v blízkosti difúzního regionu se ještě vytváří rázová vlna, která proces rekonekce urychlí. V takovém modelu vychází pro index rekonekce

$$\#_P \approx \frac{1}{\ln S}. \quad (3.105)$$

Procesy rekonekce může dále urychlit přítomnost vln a turbulencí v plazmatu, separace elektronů a iontů, anomální rezistivita, Hallovo elektrické pole i další jevy.

### ■ 3D rekonekce

Pokud má magnetické pole i výraznou složku kolmou na neutrální vrstvu, hovoříme o 3D rekonekci. Situace může vypadat obdobně jako na následujícím obrázku:

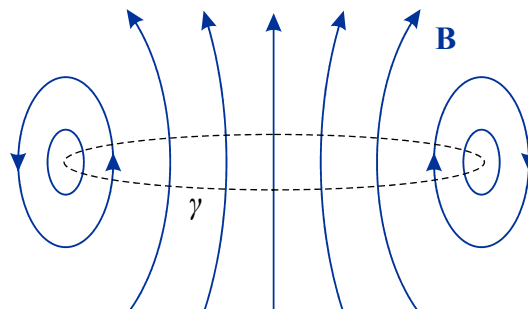


### 3.2.5 Tekutinové dynamo

Velmi důležitou částí magnetohydrodynamiky je problematika generování magnetických polí v nitru Slunce a planet. Současná teorie tekutinového dynamo nedokáže vysvětlit vznik těchto polí, ale úspěšně popisuje jejich udržování, zesilování a překlápění mezi dipólovou a azimutální složkou.

### ■ Cowlingův anti-dynamo teorém

Anglický astronom Thomas George Cowling (1906–1990) ukázal v roce 1934, že *stacionární osově symetrické magnetické pole nemůže vznikat osově symetrickým prouděním plazmatu*. Představme si jednoduché osově symetrické pole podle obrázku.



Elektrický proud generující pole teče podél neutrální linie, kde je rotace pole nenulová a samotné pole nulové. Na obrázku je neutrální linie vyznačena čárkovaně. Integrujme proudovou hustotu podél této neutrální linie s využitím Ohmova zákona (3.7):

$$\oint_{\gamma} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{l} = \oint_{\gamma} \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}$$

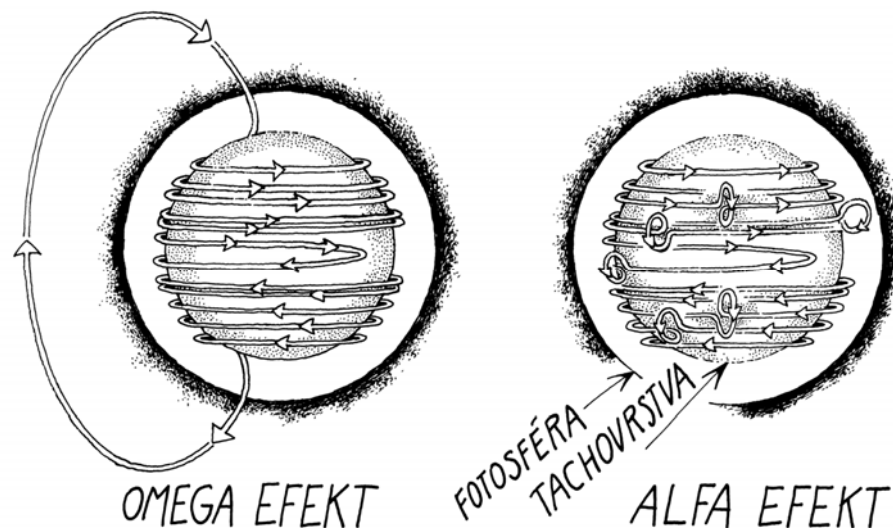
Magnetické pole je podél neutrální linie nulové, a proto je nulový i druhý člen integrace. První člen převedeme na plošný integrál ze Stokesovy věty a upravíme ho pomocí Maxwellových rovnic. Ze stacionarity plyne poté i nulovost prvního členu:

$$\oint_{\gamma} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{l} = \sigma \int_S (\text{rot } \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{S} = \sigma \int_S \left( -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S} = 0.$$

Dostali jsme se tak do sporu s předpokladem, že stacionární osově symetrické pole bylo generováno nenulovým proudem tekoucím podél neutrální linie. Generování magnetického pole je složitější záležitostí, dochází k přelévání mezi dipólovou a azimutální složkou.

### ■ Parkerův model tekutinového dynama

Kompletní teorii současného tekutinového dynama v rotujícím tělese rozpracoval americký astrofyzik Eugene Parker (1927). K teorii dynama ovšem přispěla i řada dalších fyziků, například významný sovětský teoretik Yakov Borisovich Zeldovich (1914–1987) nebo skotský astrofyzik Henry Keith Moffatt (1935). Původně dipólové pole má vytahovány magnetické silokřivky ve směru rotace, dochází k natahování magnetické silokřivky, tj. zvětšování její délky. Tomuto jevu říkáme *omega efekt* (podle písmene omega, kterým se zpravidla značí úhlová frekvence rotujícího tělesa). Při omega efektu se mění dipólová (tzv. poloidální) složka v azimutální (tzv. toroidální) složku. U Slunce k tomuto jevu dochází nejvýrazněji v blízkosti tzv. tachovrstvy, což je oblast přechodu mezi radiačním a konvektivním přenosem energie. Nachází se přibližně 220 000 km pod slunečním povrchem. Navinutí magnetické trubice kolem dokola Slunce trvá přibližně 8 měsíců. U Země dochází k obdobnému jevu ve vodivém plastickém prostředí na hranici jádra a pláště.



Druhým významným jevem je *alfa efekt*. Dochází při něm k vychýlení magnetické trubice vlivem Coriolisovy síly, k jejímu následné deformaci a překlopení do dipólové složky. Jev je nazván podle tvaru vychlípené silokřivky, který připomíná písmeno alfa řecké abecedy. Tyto jevy umožňují vzájemnou transformaci obou složek pole a udržování pole tekutinovým dynamem. Vždy je jedna složka postupně zesilována na úkor druhé a poté naopak. Magnetický dipól generovaný tímto mechanismem se proto pravidelně překlápí. Například

pro Slunce trvá celý cyklus (doba, po které je severní pól zpět na svém místě) 22 let. V období překlápění dipólu má pole výrazné vyšší momenty (kvadrupólový a oktupólový), pole připomíná *vlasatou kouli*, na jejímž povrchu se střídá více oblastí vystupujících a vstupujících silokřivek.

Při odvození omega a alfa efektu je podstatná jednak diferenciální rotace tělesa a jednak fluktuační magnetického a rychlostního pole. Rozložme obě pole na část středovanou přes krátkodobé fluktuační a na fluktuační část:

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= \bar{\mathbf{u}} + \delta\mathbf{u}; \\ \mathbf{B} &= \bar{\mathbf{B}} + \delta\mathbf{B}.\end{aligned}\tag{3.106}$$

Střední hodnoty fluktuačních částí jsou zjevně nulové:

$$\begin{aligned}\overline{\delta\mathbf{u}} &= 0; \\ \overline{\delta\mathbf{B}} &= 0.\end{aligned}\tag{3.107}$$

Dosaďme nyní rozklad (3.106) do rovnice pro magnetické pole (3.13):

$$\frac{\partial(\bar{\mathbf{B}} + \delta\mathbf{B})}{\partial t} = \frac{1}{\sigma\mu} \Delta(\bar{\mathbf{B}} + \delta\mathbf{B}) + \text{rot}\left[\left(\bar{\mathbf{u}} + \delta\mathbf{u}\right) \times \left(\bar{\mathbf{B}} + \delta\mathbf{B}\right)\right]\tag{3.108}$$

Středováním této rovnice zmizí členy lineární ve fluktuačních a získáme tak rovnici pro střední hodnotu magnetického pole:

$$\boxed{\frac{\partial\bar{\mathbf{B}}}{\partial t} = \frac{1}{\sigma\mu} \Delta\bar{\mathbf{B}} + \text{rot}\left(\bar{\mathbf{u}} \times \bar{\mathbf{B}}\right) + \text{rot}\left(\overline{\delta\mathbf{u} \times \delta\mathbf{B}}\right).}\tag{3.109}$$

Odečteme-li nyní od (3.108) rovnici pro střední hodnoty (3.109), získáme rovnici pro fluktuační magnetického pole:

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}(\delta\mathbf{B}) &= \frac{1}{\sigma\mu} \Delta(\delta\mathbf{B}) + \text{rot}\left[\bar{\mathbf{u}} \times \delta\mathbf{B} + \delta\mathbf{u} \times \bar{\mathbf{B}}\right] + \\ &+ \text{rot}\left[\delta\mathbf{u} \times \delta\mathbf{B} - \overline{\delta\mathbf{u} \times \delta\mathbf{B}}\right].\end{aligned}}\tag{3.110}$$

Chceme-li zjistit časovou změnu magnetického pole, musíme nalézt řešení rovnice (3.109), do které dosadíme řešení fluktuační magnetického pole z rovnice (3.110). Střední hodnota rychlostního pole je zpravidla dána dynamikou systému (například otáčením Slunce), fluktuační rychlostního pole je možné hledat z rovnice pro rychlostní pole (3.50) nebo jsou známy experimentálně (například z měřených turbulencí slunečního plazmatu). První člen na pravé straně rovnice (3.109) pro časový vývoj magnetického pole popisuje standardní difúzi pole, druhý člen je zodpovědný za  $\Omega$  efekt a třetí za  $\alpha$  efekt.

### Omega efekt

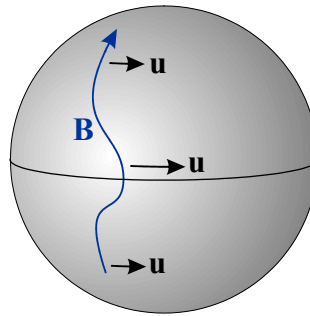
Pro  $\Omega$  efekt je podstatný druhý člen rovnice (3.109):

$$\boxed{\frac{\partial\bar{\mathbf{B}}}{\partial t} = \text{rot}\left[\bar{\mathbf{u}} \times \bar{\mathbf{B}}\right].}\tag{3.111}$$

Střední hodnota magnetického pole je zamrznutá do středního pole rychlostí, tedy je sleduje. Pokud těleso rotuje konstantní úhlovou rychlostí, tvar dipólového pole se nemění. Například



Slunce ale rotuje diferenciální rotací, na rovníku je úhlová rychlost o třetinu větší než na pólech.



Výsledkem diferenciální rotace je vznik azimutální (toroidální) složky magnetického pole. Pro úplnost uveďme, že na Slunci je v blízkosti tachovrstvy nenulová diferenciální rotace i v radiálním směru.

### Alfa efekt

Pro  $\alpha$  efekt je podstatný třetí člen rovnice (3.109):

$$\frac{\partial \overline{\mathbf{B}}}{\partial t} = \text{rot}(\overline{\delta \mathbf{u}} \times \delta \mathbf{B}). \quad (3.112)$$

Alfa efekt zajišťuje transformaci toroidální složky pole zpět na poloidální. Celá rezie alfa efektu je čistě ve fluktuacích rychlostního a magnetického pole. Z hlediska statistické fyziky představuje výraz

$$\varepsilon \equiv \overline{\delta \mathbf{u}} \times \delta \mathbf{B} \quad (3.113)$$

korelační funkci  $\langle ab \rangle$  mezi fluktuacemi rychlosti a magnetického pole. Pokud by byl výraz nulový, neexistovala by žádná korelace mezi rychlostním a magnetickým polem, to ale není případ námi popisované vodivé tekutiny. Pokud jsou fluktuace rychlostního pole helikální, stane se ve vodivém plazmatu automaticky helikálním i magnetické pole, u kterého se objeví složka kolmá na původní směr. Podstatnou podmínkou je vznik rychlostních fluktuací, které mají nenulovou střední hodnotu hustoty helicity:

$$\mathcal{H} = \overline{\delta \mathbf{u} \cdot \text{rot} \delta \mathbf{u}} = \overline{\delta \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega}} \neq 0 \quad (3.114)$$

Veličina  $\boldsymbol{\omega} \equiv \text{rot} \delta \mathbf{u}$  se nazývá vířivost fluktuace rychlostního pole. Ke vzniku helikálních fluktuací může dojít jen v plazmatu s konečným odporem. Za nenulovou helicitu rychlostních fluktuací je zodpovědná Coriolisova síla. Na jedné straně od rovníku vznikají fluktuace rychlostního pole s kladnou hodnotou hustoty helicity  $\mathcal{H} > 0$  a na druhé straně se zápornou hodnotou hustoty helicity  $\mathcal{H} < 0$ . Další oblastí je tachovrstva na spodní části konvektivní zóny, kde se obracejí sestupné proudy na vzestupné a helicity turbulentních fluktuací je opět nenulová.

**Příklad:** Představme si, že se v plazmatu vytvoří kruhově polarizovaná vlna šířící se ve směru osy  $x$  (lokálně může jít o toroidální směr):

$$\delta \mathbf{u} = (0, u_0 \cos(kx - \omega t), u_0 \sin(kx - \omega t))$$

Výsledkem takové poruchy je nenulová vířivost

$$\boldsymbol{\omega} = \text{rot} \delta \mathbf{u} = -k \delta \mathbf{u}$$

Rychlostní pole je Beltramovo a má hustotu helicity

$$\mathcal{H} = \delta \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega} = -ku_0^2.$$



Takový tok okamžitě povede k deformaci magnetického pole původně mířícího ve směru osy  $x$  do helikální struktury a pole tak získá i složku kolmou na původní směr.

◆

Výpočet korelační funkce (3.113) může být velmi komplikovaný, často se provádí jen numerickým řešením rovnice pro fluktuační magnetického pole (3.110). Odhadněme tento člen pro plazma s vysokou hodnotou Reynoldsova magnetického čísla. Taková situace je jak na Slunci, tak ve fúzním plazmatu. V rovnici (3.110) pro fluktuační magnetického pole bude na pravé straně dominovat třetí člen, neboť magnetické fluktuační jsou způsobeny především fluktuační rychlostního pole. První člen je vzhledem k předpokladu vysokého Reynoldsova čísla zanedbatelný, členy s kvadráty fluktuační jsou vyššího řádu. Proto v našem přiblížení máme pro fluktuační pole

$$\frac{\partial}{\partial t}(\delta\mathbf{B}) \approx \text{rot}[\delta\mathbf{u} \times \bar{\mathbf{B}}] \Rightarrow$$

$$\delta B_k \approx \int_0^t \varepsilon_{klm} \varepsilon_{mno} \partial_l \delta u_n(t') \bar{B}_o(t') dt',$$

kde jsme provedli integraci fluktuační podle času a rozepsali dvojný vektorový součin. V zápise vynecháváme zjevné prostorové závislosti. Nyní upravíme dvojí vektorový součin:

$$\delta B_k \approx \int_0^t \partial_n \delta u_k(t') \bar{B}_n(t') dt' - \int_0^t \partial_n \delta u_n(t') \bar{B}_k(t') dt',$$

V dalším kroku provedeme naznačené derivace součinu a budeme předpokládat, že plazma se chová jako nestlačitelná kapalina (divergence obou polí jsou nulové):

$$\delta B_k \approx \int_0^t \delta u_{k,n}(t') \bar{B}_n(t') dt' - \int_0^t \delta u_n(t') \bar{B}_{k,n}(t') dt',$$

Parciální derivace píšeme ve zkratce za čárku. Nyní již můžeme přistoupit k výpočtu korelační funkce (3.113), která je zodpovědná za  $\alpha$  efekt:

$$\varepsilon_i \equiv \varepsilon_{ijk} \overline{\delta u_j \delta B_k} =$$

$$= \overline{\int_0^t \varepsilon_{ijk} \delta u_j(t) \delta u_{k,n}(t') \bar{B}_n(t') dt'} - \overline{\int_0^t \varepsilon_{ijk} \delta u_j(t) \delta u_n(t') \bar{B}_{k,n}(t') dt'}$$

Výsledek lze napsat přehledně takto:

$$\varepsilon_i = \overline{\int_0^t \alpha_{in}(t, t') \bar{B}_n(t') dt'} - \overline{\int_0^t \eta_{ikn}(t, t') \bar{B}_{k,n}(t') dt'};$$

$$\alpha_{in}(t, t') \equiv \varepsilon_{ijk} \delta u_j(t) \delta u_{k,n}(t'), \quad (3.115)$$

$$\eta_{ikn}(t, t') \equiv \varepsilon_{ijk} \delta u_j(t) \delta u_n(t').$$

Lze předpokládat, že korelační koeficienty jsou funkcí časové odlehlosti, tj.

$$\alpha_{in}(t, t') \equiv \alpha_{in}(t - t'),$$

$$\eta_{ikn}(t, t') \equiv \eta_{ikn}(t - t') \quad (3.116)$$

a do minulosti rychle konvergují k nule. Pomalu se měnící střední hodnotu pole a jeho derivaci lze z integrace (3.115) potom vytknout:

$$\begin{aligned} \varepsilon_i(t) &= \tilde{\alpha}_{in}(t) \overline{B}_n(t) - \tilde{\eta}_{ikn}(t) \overline{B}_{k,n}(t); \\ \tilde{\alpha}_{in}(t) &\equiv \int_0^t \alpha_{in}(t-t') dt', \\ \tilde{\eta}_{ikn}(t) &\equiv \int_0^t \eta_{ikn}(t-t') dt'. \end{aligned} \quad (3.117)$$

Fluktuace magnetického pole je tedy v našem přiblížení úměrná střední hodnotě pole samotného a jeho derivacím. Koeficienty úměrnosti jsou dány integrály z fluktuací rychlostního pole. Pokud budeme pro jednoduchost předpokládat izotropii plazmatu (to ale nemusí platit vždy), musí platit

$$\begin{aligned} \alpha_{in} &\sim \delta_{in}, \\ \tilde{\eta}_{ikn} &\sim \varepsilon_{ikn}. \end{aligned} \quad (3.118)$$

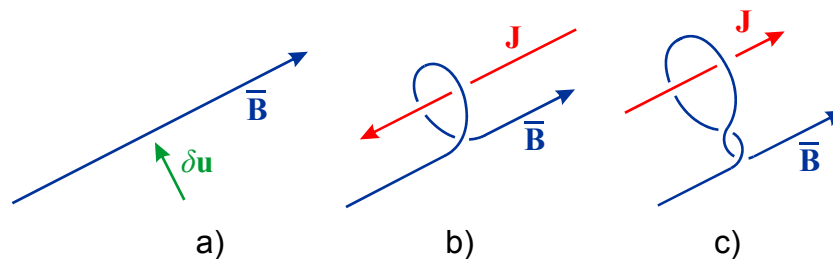
Za našich zjednodušujících předpokladů tedy pro korelační funkci (3.113) platí

$$\boxed{\boldsymbol{\varepsilon} = \alpha \overline{\mathbf{B}} - \eta \mathbf{J}}. \quad (3.119)$$

Korelační funkce má tedy člen úměrný střední hodnotě pole (tento člen je zodpovědný za  $\alpha$  efekt, proto má koeficient alfa) a člen úměrný proudové hustotě. Dosaďme korelační funkci do rovnice pro  $\alpha$  efekt (3.112):

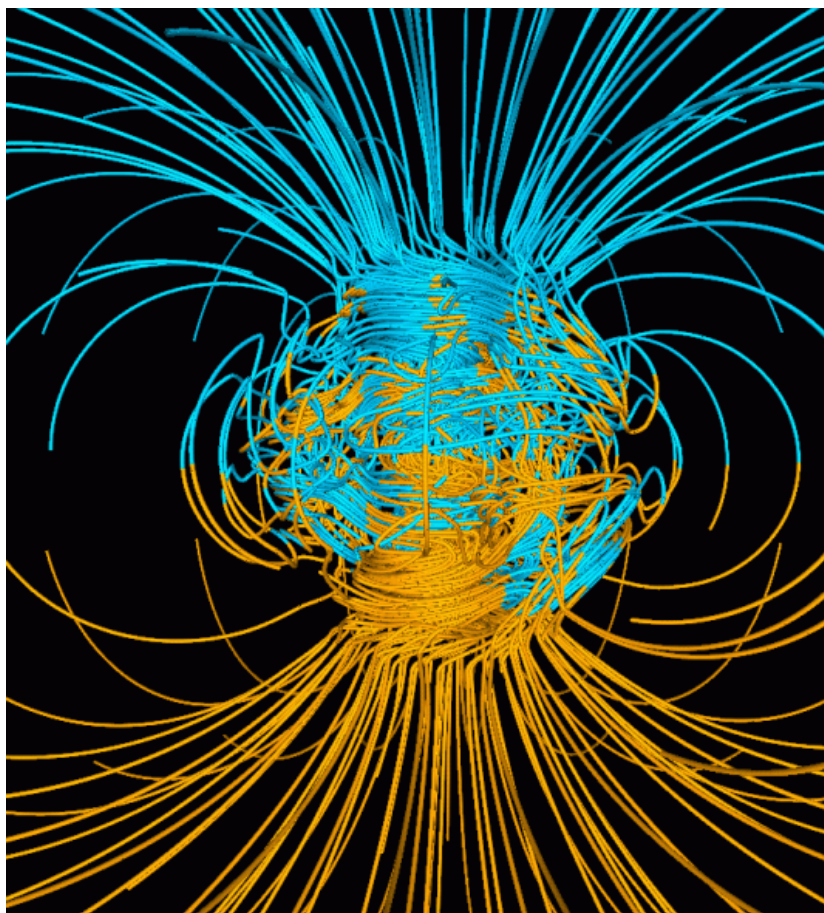
$$\frac{\partial \overline{\mathbf{B}}}{\partial t} = \text{rot}(\alpha \overline{\mathbf{B}} - \eta \mathbf{J}). \quad (3.120)$$

Je zjevné, že rotace prvního členu je úměrná proudu a změna magnetického pole má složku ve směru tekoucího proudu. Magnetické pole tak díky fluktuacím získává komponentu ve směru proudové hustoty, a nově vznikající část pole je nutně helikální (jde o Beltramovo pole). Tím se vytváří složka pole kolmá na pole původní. Pokud jsou rychlostní fluktuace periodické jako v příkladu s kruhově polarizovanou vlnou, mění se periodicky i směr indukovaného proudu a magnetické pole vytvoří překroucenou smyčku [17]:



Uvedme na závěr, že alfa efekt sám postačí k překlápění jak toroidální složky v poloidální, tak i poloidální v toroidální. Modelu postavenému jen na  $\alpha$  efektu se říká  $\alpha\alpha$  model. Mnohem účinnější mechanismus popsany výše se nazývá Parkerův neboli  $\alpha\Omega$  model.

V obecném případě jsou k určení složek pole potřebné numerické simulace výchozích rovnic alfa a  $\Omega$  efektu, které jsou mimořádně náročné. Na následujícím obrázku jsou výsledky takových simulací pro zemské dynamo na superpočítači v San Diegu.



Počítačová simulace tekutinového dynama uvnitř Země. Barvou jsou odlišeny vstupující a vystupující silokřivky. San Diego Supercomputer Centrum, 1999. Gary Glatzmaier, Paul Roberts.

### 3.3. Některé rovnovážné konfigurace v plazmatu

#### 3.3.1 Rovnováha v plazmatu

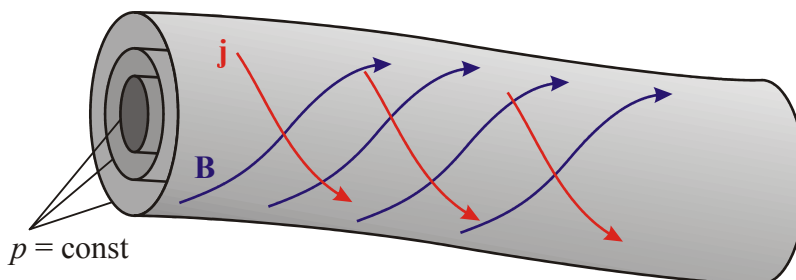
V ustáleném stavu, kdy je plazma v rovnováze a nepohybuje se, musí být pravá strana pohybové rovnice (3.49) nulová.

$$-\nabla p + \mathbf{j} \times \mathbf{B} = 0 \quad (3.121)$$

Viskózní procesy se v rovnováze neuplatňují, neboť se plazma nepohybuje. V rovnováze je gradient tlaku látky s hustotou Lorentzovy síly. Uděláme-li skalární součin rovnice rovnováhy (3.121) s proudovou hustotou nebo magnetickým polem, okamžitě dostaneme:

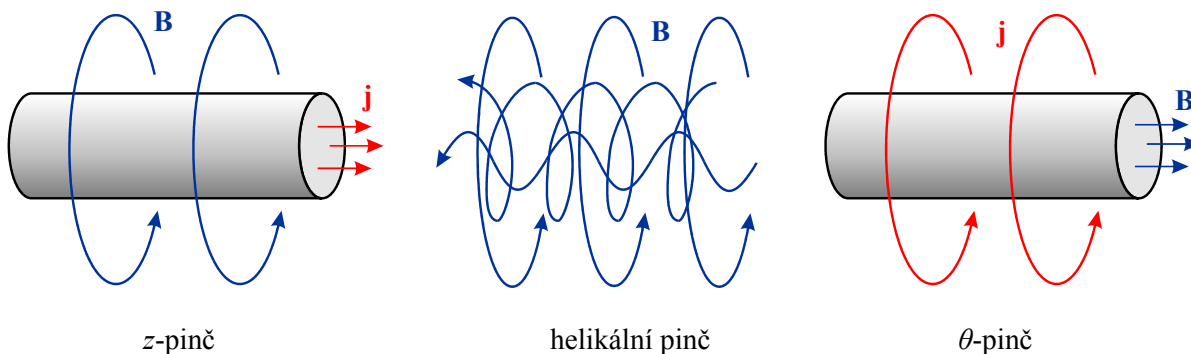
$$\begin{aligned} \mathbf{j} \cdot \nabla p &= 0, \\ \mathbf{B} \cdot \nabla p &= 0. \end{aligned} \quad (3.122)$$

Vzhledem k tomu, že gradient je kolmý na plochy konstantního tlaku, je zřejmé, že elektrické proudy v rovnováze tečou podél ploch konstantního tlaku. Stejně tak sledují plochy konstantního tlaku i magnetické silokřivky. Proudové trubice jsou tak totožné s magnetickými trubnicemi, i když směr vektorů  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{B}$  obecně není totožný.



#### 3.3.2 Proudové vlákno (pinč)

Proudová vlákna neboli *pinče* či filameny patří snad k nejběžnějším útvarům v plazmatu. V nejjednodušší situaci teče proud v ose pinče (axiální směr) a kolem pinče vytváří magnetické pole (azimutální směr), které působí Lorentzovou silou na proudové vlákno a snaží se ho smrštít. Po čase se ustaví rovnováha mezi gradientem tlaku plazmatu, který se snaží plyn rozepnout a Lorentzovou silou, která pinč komprimuje. Útvar se nazývá z-pinč, písmeno z naznačuje, že proud teče v ose z pinče. Slovo pinč pochází z anglického *pinch* (stisknout).



V kapitole 5.2.3 uvidíme, že rovnováha je nestabilní a pinč tohoto typu se rychle rozpadá. Stačí však, aby magnetické silokřivky byly zkroucené do magnetického provazce, a pinč se stává relativně stabilním útvarem. Proudová hustota i magnetické pole mají axiální i azimutální složky. Axiální složka proudu generuje azimutální pole a azimutální složka

proudu generuje axiální pole. V tomto případě hovoříme o *helikálním (šroubovicovém) pinči*. V laboratořích jsou významné ještě další konfigurace. Známy je  $\theta$ -pinč, ve kterém proud teče v elektrodě po povrchu pinče v azimutálním směru. Vytvořené magnetické pole je axiální. Další konfigurací je *toroidální pinč* – plazma držené v toroidální geometrii v *tokamacích*. Jde vlastně o stočený pinč do tvaru toroidu. Místo axiálního pole zde bývá zvykem hovořit o poli toroidálním a místo azimutálního pole o poli poloidálním.

### ■ Bennettova rovnováha

Nalezneme nyní rovnováhu z-pinče za předpokladu homogenně rozloženého elektrického proudu a zanedbatelných radiačních procesů. Rovnováhu pinče s radiačními procesy budeme řešit v kapitole věnované záření plazmatu. Podmínky rovnováhy z-pinče za výše uvedených předpokladů poprvé řešil finský vědec a vynálezce Willard Harrison Bennett (1903–1987) již v roce 1934.

Nejprve nalezneme v pinči o poloměru  $R$  azimutální magnetické pole  $B(r)$  z Ampérova zákona přepsaného do válcových souřadnic:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{j}; \quad \Rightarrow \\ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (rB) &= \mu_0 j \quad \Rightarrow \\ B(r) &= \frac{\mu_0 j}{2} r + \frac{C}{r}. \end{aligned}$$

Je zřejmé, že první člen popisuje chování pole uvnitř pinče (druhý by v centru pinče divergoval a proto je  $C = 0$ ). Naopak vně pinče je proudová hustota nulová a tím i první člen. Obě řešení navážeme na hranici pinče a dosadíme  $j = I/\pi R^2$ :

$$B(r) = \begin{cases} \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} r, & r \leq R; \\ \frac{\mu_0 I}{2\pi r}, & r \geq R. \end{cases} \quad (3.123)$$

Nyní použijeme rovnici rovnováhy (3.121) zapsanou ve válcových souřadnicích k výpočtu tlaku:

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dr} &= -jB \quad \Rightarrow \\ \frac{dp}{dr} &= -\frac{I}{\pi R^2} \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} r \quad \Rightarrow \\ p(r) &= -\frac{\mu_0 I^2}{4\pi^2 R^4} r^2 + p_0 \end{aligned}$$

Integraci jsme prováděli uvnitř pinče, proto bylo použito vnitřní řešení pro magnetické pole. Význam integrační konstanty  $p_0$  je zřejmý. Jde o tlak v centru pinče. Tlak v pinči by měl klesat až k povrchu, kde je nulový, tj.  $p(R) = 0$ . Z této podmínky určíme integrační konstantu  $p_0$  a celkové řešení:

$$p(r) = p_0 \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right); \quad p_0 = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi^2 R^2}. \quad (3.124)$$

Jde o známé Bennettovo řešení s parabolickým průběhem tlaku. Tlak v centrální části pinče je úměrný kvadrátu celkového proudu. Pokud dosadíme za tlak elektronů a iontů ze stavové rovnice a budeme uvažovat teplotu obou komponent plazmatu shodnou

$$p_0 = n_e k_B T_e + n_i k_B T_i \approx n_e k_B (T_e + T_i/Z), \quad (3.125)$$

získáme důležitý vztah mezi teplotou centrální části a celkovým tekoucím proudem:

$$\mathcal{N}_e k_B (T_e + T_i/Z) = \frac{\mu_0}{4\pi} I^2; \quad \mathcal{N}_e \equiv \frac{N_e}{l} = n_e \pi R^2. \quad (3.126)$$

Veličina  $\mathcal{N}_e$  představuje počet elektronů na jednotku délky pinče na centrální linii.

### ■ Bezsilová helikální konfigurace pinče, reverzní pinč

Předpokládejme, že se po dosti dlouhé době dostane helikální pinč do stavu s minimem energie v magnetickém poli. Potom je magnetické pole nutně helikální a splňuje Beltramovu podmínku  $\text{rot } \mathbf{B} = \alpha \mathbf{B}$ . Ve válcové geometrii bude radiální složka pole nulová a azimutální i axiální složka bude záviset jen na proměnné  $r$ . Beltramovu podmínku rozepíšeme ve válcových souřadnicích po složkách:

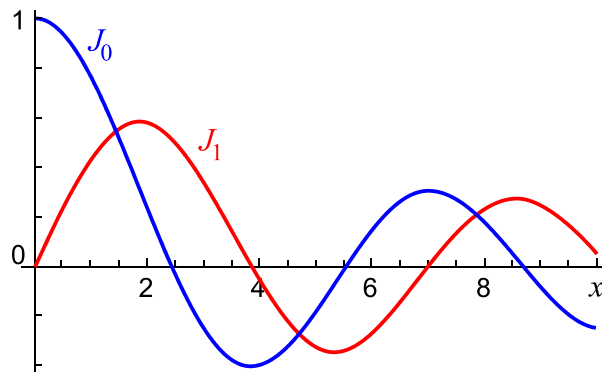
$$\mathbf{B} = \frac{\text{rot } \mathbf{B}}{\alpha}; \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} B_r &= 0, \\ B_\varphi &= -\frac{1}{\alpha} \frac{dB_z}{dr}, \\ B_z &= \frac{1}{\alpha r} \frac{d}{dr}(r B_\varphi). \end{aligned} \quad (3.127)$$

Po dosazení za pole  $B_\varphi$  z druhé do třetí rovnice dostaneme rovnici

$$\frac{d^2 B_z}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dB_z}{dr} + \alpha^2 B_z = 0. \quad (3.128)$$

Jde o Besselovu rovnici, která má řešení

$$\begin{aligned} B_z(r) &= B_0 J_0(\alpha r), \\ B_\varphi(r) &= B_0 J_1(\alpha r). \end{aligned} \quad (3.129)$$




Funkce  $J_0$  a  $J_1$  jsou Besselovy funkce prvního druhu, ve válcových souřadnicích nahrazují funkce kosinus a sinus známé z kartézských souřadnic. Obdobně jako derivace kosinu je minus sinus, je i derivace  $J_0$  rovna minus  $J_1$ . Besselova funkce  $J_0$  mění znaménko v argumentu 2,4. Pokud má pinč dosti velký poloměr, nutně dojde pro  $r > 2,4/\alpha$  k obrácení směru pole  $B_z$ . Vzniklý útvar nazýváme reverzní pinč. Na poloměru

$$a = \frac{2,4}{\alpha} \quad (3.130)$$

vzniká neutrální vrstva, na jejíchž opačných stranách má pole opačný směr, tedy situace vhodná pro rekonekci magnetických silokřivek a pro rozvoj ostrůvkové (tearing) nestability.

#### ■ Krátce z rané historie výzkumu pinčů

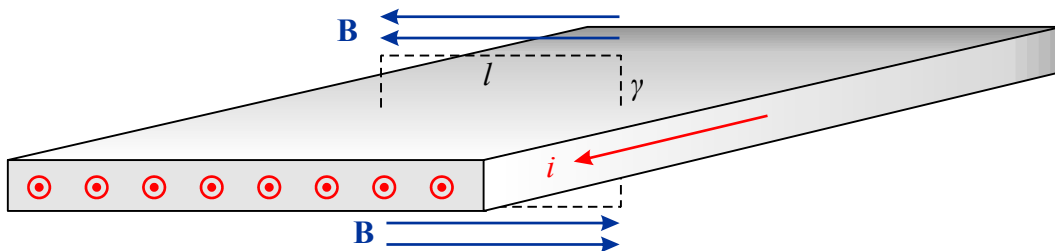
1790	Holandský vědec Martin van Marun (1750–1837) vybil 100 Leydenských lahví přes drátek, který explodoval. Vytvořil tak první zdokumentovaný (i když nevysvětlený) pinč.	
1905	Australští vědci J. A. Pollock a S. Barraclough pozorují v blízkosti Sydney v Austrálii trvalou deformaci dutého hromosvodu (fotografie napravo) po průchodu blesku a správně deformaci vysvětlili jako důsledek tlaku způsobeného magnetickým polem.	
1934	Willard Harrison Bennett (1903–1987) našel řešení průběhu tlaku pro stacionární z-pinč s konstantní proudovou hustotou.	
1946	George Thompson a Moses Blackman z Imperial College v Londýně patentují fúzní zařízení založené na toroidálním pinči.	
1946	George Thompson a Peter Thonemann provádějí rozsáhlé experimenty s toroidálním pinčem.	
1954	Martin David Kruskal (1925–2006) a Martin Schwarzschild (1912–1997) vytvářejí první teorii nestabilit pinče, zejména řeší koráلكovou a smyčkovou nestabilitu.	
1956	Rendel Sebastian Pease (1922–2004) a Stanislav Iosivovich Braginskij nacházejí řešení v podobě elektromagnetického kolapsu, kdy ztráta energie zářením způsobí nekontrolovatelný kolaps pinče k ose.	
1957	V anglickém Harwellu bylo zkonstruováno první velké toroidální zařízení ZETA o průměru 3 metry s proudem 900 000 A.	
1958	Na toroidálním pinči SCYLLA v Los Alamos byly detekovány první fúzní neutrony.	

Nestabilitami plazmového vlákna se budeme zabývat v druhém díle „*Vlny a nestability*“ (viz kapitola 5.2.3). Radiační pinč budeme řešit v třetím díle v části „*Záření plazmatu*“.



### 3.3.3 Proudová stěna

Proudová stěna je dvojrozměrnou analogií proudového vlákna. Proud tekoucí v ploše generuje na obou stranách magnetické pole, které tlačí na stěnu magnetickým tlakem.

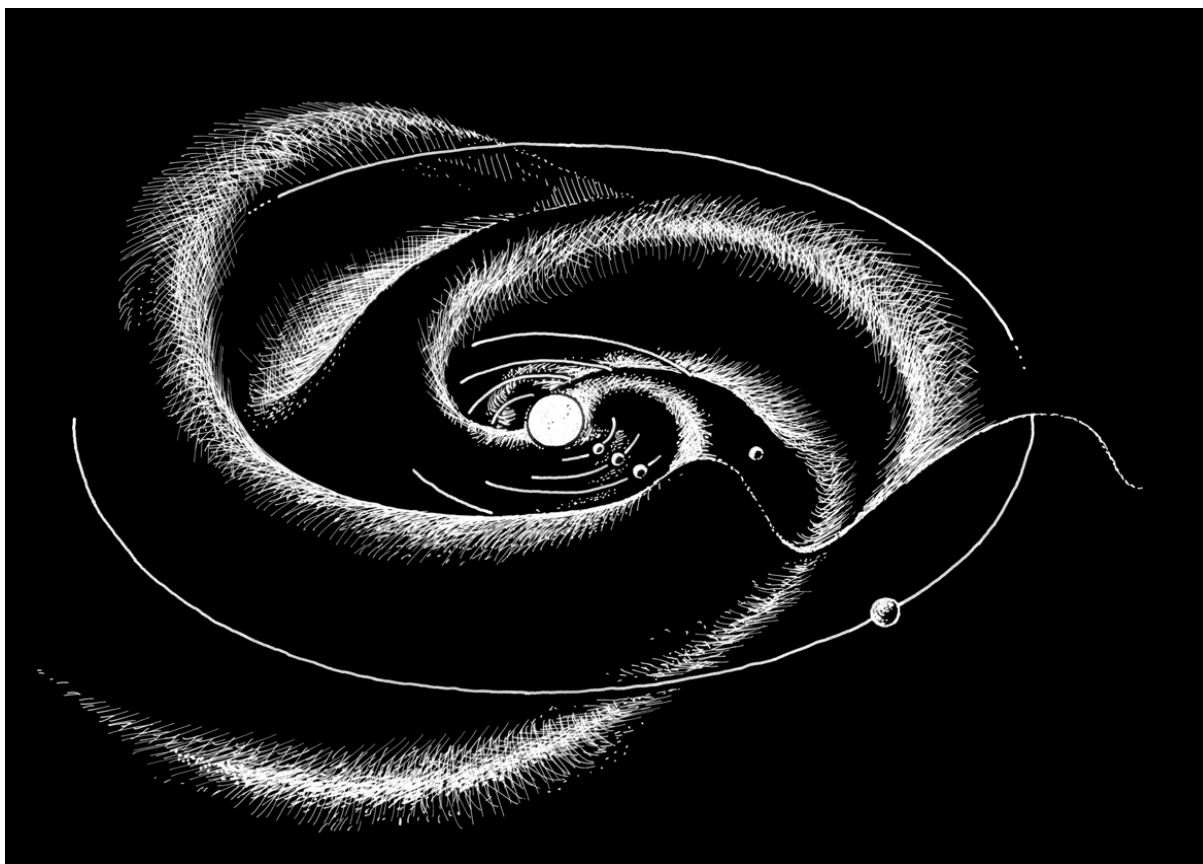


Použijeme-li na křivku naznačenou na obrázku Ampérův zákon v integrálním tvaru, získáme

$$\oint_{\gamma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I \quad \Rightarrow \quad 2Bl = \mu_0 I \quad \Rightarrow$$

$$B = \frac{1}{2} \mu_0 i, \quad (3.131)$$

kde  $i$  je elektrický proud vztažený na jednotku příčné délky. Proudové stěny bývají velmi tenké vzhledem ke své šířce (tloušťka a šířka se liší o mnoho řádů). Největší proudovou stěnou ve sluneční soustavě je neutrální vrstva heliosféry, jde o rozvlněnou oblast nulového magnetického pole Slunce, která se nazývá Parkerova plocha. Její tloušťka je v našem okolí cca 1 000 km. Na opačných stranách Parkerovy plochy má sluneční pole různou polaritu.



Planety procházejí střídavě nad a pod touto plochou, při průchodu se mění polarita slunečního pole. Jiná proudová stěna vzniká v magnetickém ohonu Země. Právě v blízkosti proudových stěn, kde je magnetické pole na různých stranách stěny opačně orientované, dochází často k přepojení magnetických silokřivek a rozvoji ostrůvkové (tearing) nestability.



### 3.3.4 Dvojvrstva

Dvojvrstvou nazýváme skok elektrického potenciálu v plazmatu. V literatuře se většinou označuje symbolem DL z anglického „Double Layer“. Dvojvrstvy se vyskytují v hojném množství v plazmatu všude tam, kde teče elektrický proud způsobený elektrony a ionty pohybujícími se proti sobě. Při tomto vstřícném pohybu se může projevit tzv. dvousvazková nestabilita, která vede ke vzniku skoku elektrického potenciálu  $\phi$ . Situace je obdobná vodě tekoucí v šikmém kanálu. Samovolně se na jejím povrchu vytvoří tu a tam výškové schody. Obdobně se v plazmatickém prostředí se spádem elektrického potenciálu samovolně vytvoří tu a tam schody v potenciálu. Stejný typ dvojvrstvy vzniká i z náhodné fluktuace koncentrace iontů nebo při pohybu nabitých částic podél siločar magnetického pole.

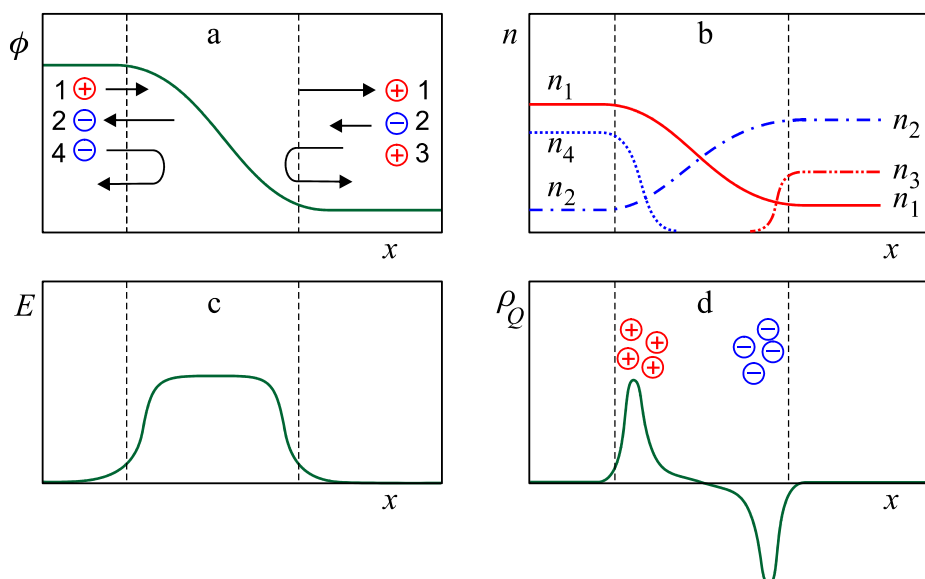
Jinou možností vzniku dvojvrstvy je rozhraní dvou plazmatických prostředí s různou teplotou nebo koncentrací elektronů. Elektrony začnou vlivem gradientu teploty či koncentrace difundovat do druhého prostředí, ve kterém se proto objeví zvýšený záporný náboj. Vznikne elektrické pole a s ním souvisící schod v potenciálu. Skrze takové dvojvrstvy trvale neteče elektrický proud.

Základem vzniku elektrické dvojvrstvy je vždy existence rozdílného pohybu elektronů vůči okolí a následné narušení kvazineutality plazmatu vedoucí na vznik elektrického pole a tím skoku potenciálu.

Pro posouzení výraznosti dvojvrstvy slouží tzv. parametr dvojvrstvy, který je definován jako podíl energie schodu potenciálu a tepelné energie elektronů:

$$\#_{DL} \equiv \frac{e \Delta \phi}{k_B T_e}. \quad (3.132)$$

Dvojvrstvy vznikající na hranici dvou prostředí s různou teplotou mají tento parametr přibližně rovný jedné. Dvojvrstvy vznikající při velkých spádech potenciálu jsou velmi výrazné a mají  $\#_{DL} > 1$ . Pro takové dvojvrstvy se částice se rozdělí do čtyř skupin znázorněných na obrázku *a*.



- 1) ionty urychlované ve směru poklesu potenciálu,
- 2) elektrony urychlované ve směru nárůstu potenciálu,
- 3) ionty zachycené na nižší straně potenciálu,
- 4) elektrony zachycené na vyšší straně potenciálu.

Průběh koncentrací  $n$  těchto čtyř druhů částic je na obrázku *b*, tečkovaně jsou vykresleny koncentrace záporných částic a plnou čarou kladných. Odpovídající celková hustota náboje  $\rho_0$  je zobrazena na obrázku *d*. Výsledkem je vrstva kladného náboje na vyšší straně potenciálu a vrstva záporného náboje na nižší straně potenciálu. Tato konfigurace dala dvojrstvě její jméno. Před a za schodem potenciálu je celkový prostorový náboj nulový, kladné a záporné náboje se přesně vyruší. Elektrické pole  $E$  dvojrstvy je znázorněné na obrázku *c*, mezi oběma vrstvami je zvýšené a odpovídá záporně vzaté derivaci potenciálu. Dvojrstvy mohou (ale nemusí) být dlouhodobě stabilními útvary, ve kterých schod potenciálu vede na vznik výše zmíněných čtyř skupin částic a jejich elektrické pole zpětně napomáhá udržení skoku v potenciálu.

Dvojrstvy jsou útvary, na kterých dochází k urychlování nabitých částic. Jde o jakési přirozené urychlovače v laboratoři i ve vesmíru. Vzhledem k separaci kladného a záporného náboje se chovají jako přirozené kondenzátory. Právě energie těchto „kondenzátorů“ se transformuje na kinetickou energii urychlených částic. Výkon uvolňovaný na dvojrstvě je dán součinem skoku potenciálu a elektrického proudu tekoucího dvojrstvou:

$$P = \Delta\phi I \quad (3.133)$$

Ke vzniku relativistických částic může na dvojrstvě dojít tehdy, pokud je energie schodu potenciálu větší než klidová energie částice, tedy relativistický parametr dvojrstvy

$$\#_{\text{DL, rel}} \equiv \frac{Q \Delta\phi}{m_0 c^2} \quad (3.134)$$

je větší než jedna,  $\#_{\text{DL, rel}} > 1$ .

Dvojrstvy zpravidla vytvářejí různě zprohýbané plochy malé tloušťky. Tloušťka dvojrstvy je dána narušením kvazineutrality náboje, která v plazmatu nemůže být vyšší než několiknásobek Debyeovy vzdálenosti. Nejtlustší dvojrstvy mají příčný rozměr cca deset Debyeových poloměrů. V laboratorním plazmatu jde o milimetry, v ionosféře o centimetry, v meziplanetárním prostředí o desítky metrů a v mezigalaktickém prostředí o desítky kilometrů.

Dvojrstvy mohou plazmatickým prostředím driftovat, mohou prudce zvýšit svou tloušťku a rozpadnout se nebo zaniknout difúzními jevy pokojnou cestou. Normální dvojrstvy jsou kolmé na magnetické pole, podél kterého se pohybují částice, a vzniklé elektrické pole je rovnoběžné s polem magnetickým. Existují ale i šikmé dvojrstvy.

Na dvojrstvách mohou být urychleny elektrony a ionty na značné rychlosti a magnetická energie elektrického obvodu se zde může přeměnit na kinetickou energii částic. Dvojrstvy se vyskytují všude tam, kde tečou plazmatem elektrické proudy. Nacházíme je v magnetosférách planet, například na několiknásobku zemského poloměru vznikají ve dvojrstvách energetické ionty urychlené ve směru silokřivek zemského pole. Skok potenciálu je zde  $10^2 \div 10^4$  V. Dvojrstvy pravděpodobně vznikají ve slunečních filamentech protékaných proudem. Zde se odhaduje skok potenciálu až na  $10^9 \div 10^{11}$  V a energie protonů urychlených ve dvojrstvě na několik desítek gigaelektronvoltů. Pokud vznikají dvojrstvy v plazmových vláknech v blízkosti jader galaxií, mohl by být skok potenciálu až  $10^{17}$  V a uvolňovaný výkon řádově  $10^{37}$  J/s.

Velmi zajímavou aplikací dvojrstev jsou iontové motory. V Australské národní univerzitě vyvinuli v roce 2003 Christine Charles a Rod Boswell iontový motor, ve kterém se vytvoří dvojrstva na hranici mezi vysoce koncentrovaným plazmatem zdroje a plazmatem s nízkou koncentrací ve výstupní trysce. Dvojrstva urychlí ionty na vysoké energie a významně přispěje k tahu motoru. Takový motor může významně zefektivnit meziplanetární lety.

### ■ Dvojvrstva vytvořená pouhou změnou koncentrace elektronů

Předpokládejme, že v plazmatu dojde z nějakých důvodů, například fluktuací, ke změně koncentrace elektronů. Hledejme, zda v tomto případě existuje stacionární řešení pro proud elektronů. Budeme hledat nejjednodušší řešení v jedné dimenzi bez magnetického pole a tlaku elektronů. Z rovnice kontinuity máme

$$\frac{\partial}{\partial x}(n_e v_e) = 0$$

Vzhledem k tomu, že  $x$  je jedinou proměnnou, můžeme psát

$$n_e v_e = \text{const} \quad \Rightarrow \quad n_e v_e = -\frac{j_e}{e} \quad \Rightarrow$$

$$v_e(x) = -\frac{j_e}{e n_e(x)}. \quad (3.135)$$

Tedy elektrický proud elektronů je konstantní a rychlost elektronů se v oblasti se změněnou koncentrací mění tak, aby zůstala v platnosti rovnice kontinuity. Napišme nyní pohybovou rovnici pro elektrony pro ustálený stav

$$m_e v_e \frac{\partial}{\partial x} v_e = -eE.$$

Z této pohybové rovnice spočteme elektrické pole, které se vytvořilo změnou rychlosti pohybu elektronů:

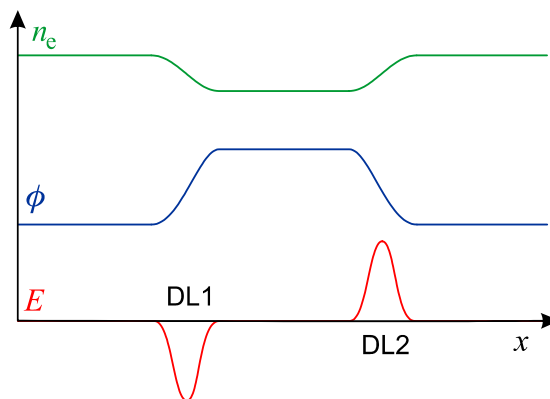
$$E = -\frac{\partial}{\partial x} \frac{m_e v_e^2}{2e}.$$

Po dosazení za rychlost z (3.135) máme pro vzniklé elektrické pole vztah

$$E(x) = -\frac{\partial}{\partial x} \frac{m_e j_e^2}{2e^3 n_e^2(x)}. \quad (3.136)$$

Změna koncentrace elektronů tedy s sebou přináší vznik elektrického pole. V oblastech konstantní koncentrace je elektrické pole nulové, nenulové je jen v oblastech, kde se koncentrace mění. Ze souvislosti elektrického pole s elektrickým potenciálem můžeme psát

$$\phi(x) = \frac{m_e j_e^2}{2e^3 n_e^2(x)}. \quad (3.137)$$



V oblasti změny koncentrace elektronů se mění i elektrický potenciál a tedy vzniká elektrická dvojvrstva. Vzniklo-li lokální snížení koncentrace elektronů, vytvoří se na obou stranách

schod v potenciálu a vznikne dvojitá dvojrstva. Dodejme pro úplnost, že toto řešení nalezli švédští fyzikové Hannes Alfvén (1908–1995) a Per Carlqvist (1938) v roce 1968.

### ■ Řešení potenciálu uvnitř dvojrstvy udržované dvěma svazky

Hledejme nyní řešení pro potenciál uvnitř dvojrstvy, který klesá z hodnoty  $\phi_{DL}$  na nulu. Obecný výpočet musí proběhnout pro všechny 4 populace částic, tedy pro urychlované svazky elektronů a iontů a pro zachycené tepelné elektrony a ionty. V tomto odvození budeme uvažovat jen svazkové populace, tj. zanedbáme tepelné jevy. Budeme předpokládat svazek elektronů letící s konstantní rychlostí ze strany nižšího potenciálu a svazek iontů ze strany vyššího potenciálu. Oba dva svazky budou na dvojrstvě urychleny. Výchozími rovnicemi budou zákon zachování energie, rovnice kontinuity a Poissonova rovnice pro potenciál.

$$\frac{1}{2} m_e v_e^2 - e\phi = \text{const} = \frac{1}{2} m_e v_{e0}^2 ; \quad (3.138)$$

$$\frac{1}{2} m_i v_i^2 + Ze\phi = \text{const} = \frac{1}{2} m_i v_{i0}^2 + Ze\phi_{DL} .$$

$$n_e v_e = \text{const} = -\frac{j_e}{e} ; \quad (3.139)$$

$$n_i v_i = \text{const} = \frac{j_i}{Ze} ;$$

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = \frac{en_e}{\epsilon_0} - \frac{Zen_i}{\epsilon_0} . \quad (3.140)$$

Konstantu v zákoně zachování energie počítáme na té straně schodu, ze které daná částice přilétá z nekonečna. Všechny proměnné ( $v_\alpha$ ,  $n_\alpha$ ,  $\phi$ ) jsou funkcemi polohy  $x$  v dvojrstvě. V Poissonově rovnici (3.140) dosadíme za koncentraci z rovnice kontinuity (3.139) a za rychlosti ze zákona zachování energie (3.138). Výsledkem je finální rovnice pro potenciál

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = -\frac{j_e/\epsilon_0}{\sqrt{v_{e0}^2 + \frac{2e}{m_e}\phi}} - \frac{j_i/\epsilon_0}{\sqrt{v_{i0}^2 + \frac{2Ze}{m_i}(\phi_{DL} - \phi)}} . \quad (3.141)$$

Jde o obyčejnou diferenciální rovnici druhého řádu pro funkci  $\phi(x)$ , kterou je sice možné řešit analyticky (vede na eliptické integrály), ale zpravidla se řeší numericky. Integrační konstanty jsou dány okrajovými podmínkami – na obou krajích dvojrstvy je nulové elektrické pole, tj. nulová derivace potenciálu a samotný potenciál je na jedné straně nulový a na druhé má hodnotu  $\phi_{DL}$ . Výsledkem je Langmuirova-Childova relace mezi celkovou proudovou hustotou  $j$  tekoucí dvojrstvou, tloušťkou dvojrstvy  $d$  a spádem potenciálu  $\phi_{DL}$  na dvojrstvě:

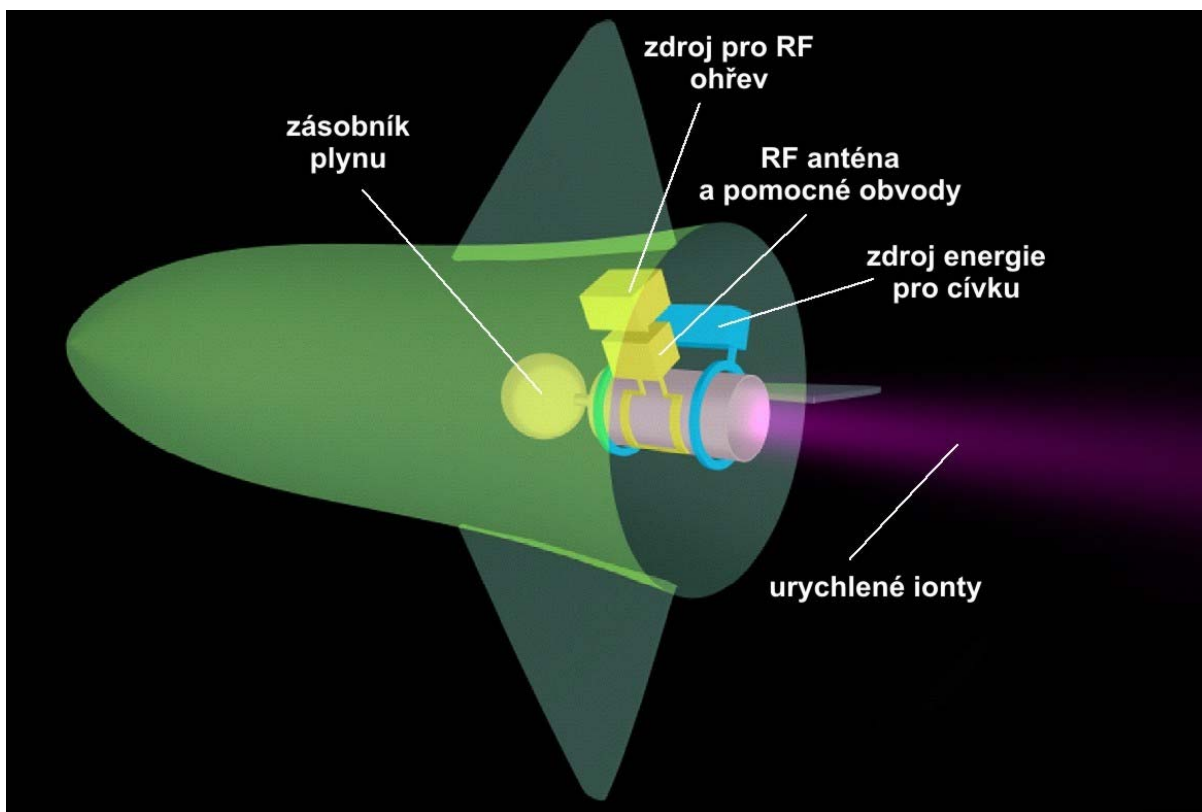
$$jd^2 = A\phi_{DL}^{3/2} ; \quad A \approx 0,20724 \left( 1 + \sqrt{\frac{m_e}{m_i}} \right) \sqrt{\frac{2e}{m_e}} ; \quad j = j_e + j_i . \quad (3.142)$$

V obecném případě musíme vzít v úvahu i populace zachycených tepelných částic, jejichž koncentrace je dána Boltzmannovým rozdělením (tj. připustíme nenulovou teplotu) a na pravé straně Poissonovy rovnici přibudou ještě dva členy ve tvaru

$$n_\alpha = n_{0\alpha} e^{-\frac{Q_\alpha\phi}{k_B T_\alpha}} ; \quad \alpha = e, i$$

### ■ Krátce z historie výzkumu dvojrstev

1929	Americký plazmový chemik a fyzik Irving Langmuir (1881–1957) detekuje dvojrstvy v laboratorním plazmatu.
1958	Švédský plazmový fyzik Hannes Alfvén (1908–1995) navrhuje, že elektrony zodpovědné za polární záře jsou urychlovány směrem k Zemi dvojrstvami v magnetosféře Země.
1967	Švédští plazmoví fyzikové Hannes Alfvén a Per Carlqvist (1938) navrhnou teorii slunečních vzplanutí, ve které hrají významnou roli dvojrstvy.
1987	Švédská družice Viking detekuje výrazné dvojrstvy v magnetosféře Země. Družice pracovala na polární dráze v letech 1986 až 1987. Čtyři ramena se senzory elektrického pole byla dlouhá 40 metrů.
1992	Americký plazmový fyzik Noah Hershkowitz nalézá v laboratorním plazmatu násobné dvojrstvy se schodovitým průběhem potenciálu.
2003	Australští fyzikové Christine Charles a Rod Boswell vyvinuli nový iontový motor pro kosmické lodě, který využívá k urychlení iontů dvojrstvy. Evropská kosmická agentura provedla první laboratorní testy motoru v roce 2005.



Nově vyvíjený motor ESA. Plazma vzniká radiofrekvenčním ohřevem a je udržováno cívkami magnetického pole. Na výstupu z komory se vytvoří stabilní dvojrstvy, která urychlí ionty na vysokou energii. Tím vzniká tah tohoto nového typu motoru.

### 3.3.5 Rázové vlny

V plazmatu se často vytvářejí oblasti, ve kterých se prudce mění některé parametry, například rychlost, koncentrace, teplota nebo magnetické pole. Takové oblasti nazýváme rázovými vlnami, některé z nich se mohou plazmatem pohybovat. Typickým příkladem je rázová vlna vznikající interakcí slunečního větru s magnetosférou Země. Na „návětrné“ straně se vytvoří obloukovitá rázová vlna obdobná rázové vlně vzniklé před přídílí lodi pohybující se po moři. Rázové vlny vznikají i tam, kde se proudění mění z nadzvukového na podzvukové a jsou typickými rysy laboratorního i astrofyzikálního plazmatu. Na rázových vlnách může dojít k významnému urychlení částic. Dvojvrstva probíraná v minulé kapitole je vlastně speciálním případem rázové vlny.

Rázové vlny v klasické hydrodynamice studovali skotský inženýr William John Macquorn Rankine (1820–1872) a francouzský inženýr Pierre Henri Hugoniot (1851–1887). Podmínky, které musí jednotlivé veličiny splňovat na rázové vlně, nazýváme Rankinovy-Hugoniotovy podmínky. Pokud pro nějakou aditivní veličinu  $A$  platí rovnice kontinuity ve tvaru

$$\frac{\partial \rho_A}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j}_A = 0, \quad (3.143)$$

je vyjádřením zákona zachování této veličiny v soustavě spojené s rázovou vlnou podmínka platící pro obě strany skoku

$$(\mathbf{j} \cdot \mathbf{n})_1 = (\mathbf{j} \cdot \mathbf{n})_2 \quad \Rightarrow \quad [\mathbf{j} \cdot \mathbf{n}]_1^2 = 0. \quad (3.144)$$

Význam hranaté závorky je stejný jako u určitého integrálu. Index označuje strany rázové vlny a  $\mathbf{n}$  je normálový vektor. Ze zákona zachování hmotnosti, hybnosti a energie získáme okamžitě podmínky

$$[\rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}]_1^2 = 0, \quad (3.145)$$

$$\left[ \rho \mathbf{u} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) + \left( p + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) \mathbf{n} - \frac{(\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{B}}{\mu_0} \right]_1^2 = 0, \quad (3.146)$$

Pro energii je situace nepatrně složitější

$$\left[ \left( e + \frac{\rho u^2}{2} + p \right) (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) + (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{n} \right]_1^2 = 0.$$

Vnitřní energii pro polytropní plazma s koeficientem  $\gamma$  vyjádříme ze vztahu (2.51)

$$e = \frac{p}{\gamma - 1}.$$

Pro skoková řešení využíváme ideální magnetohydrodynamiku (difúzní členy způsobí konečnou tloušťku rázové vlny) a pro elektrické pole proto platí

$$\mathbf{E} = -\mathbf{u} \times \mathbf{B}$$

Nyní již snadno získáme relaci

$$\left[ \left( \frac{\rho u^2}{2} + \frac{\gamma p}{\gamma - 1} + \frac{B^2}{\mu_0} \right) (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) - \frac{(\mathbf{B} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{u})}{\mu_0} \right]_1^2 = 0. \quad (3.147)$$

Tyto podmínky musíme doplnit spojitostí normálových složek magnetického pole ( $\text{div } \mathbf{B} = 0$ ) a tečných složek elektrického pole ( $\text{rot } \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$ ). Využijeme opět fakt, že v ideální magnetohydrodynamice je  $\mathbf{E} = -\mathbf{u} \times \mathbf{B}$ :

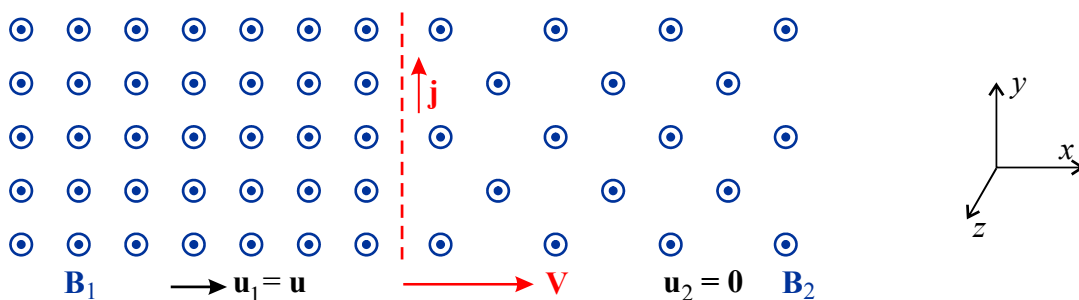
$$[\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}]_1^2 = 0, \tag{3.148}$$

$$[\mathbf{n} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B})]_1^2 = 0. \tag{3.149}$$

Podmínky (3.145) až (3.149) nazýváme Rankinovy-Hugoniotovy podmínky.

**Příklad – pohybující se rázová vlna**

Předpokládejme, že se klidným plazmatem pohubuje rychlostí  $V$  rázová vlna tvořená skokem magnetického pole rovnoběžného s touto rázovou vlnou:



Před čelem vlny je rychlost plazmatu nulová, za vlnou je plazma strháváno rychlostí  $u$ . Určete tuto rychlost  $u$  ze známých hodnot magnetického pole na obou stranách rázové vlny.

**Řešení**

V soustavě souřadnicové spojené s rázovou vlnou se pro nerelativistické rychlosti podle transformace (D.1) magnetické pole nezmění. Z podmínky (3.149) potom v této souřadnicové soustavě plyne

$$B_1(V - u) = B_2V. \tag{3.150}$$

Nyní již snadno určíme rychlost  $u$  prostředí za rázovou vlnou:

$$u = \left(1 - \frac{B_2}{B_1}\right)V. \tag{3.151}$$



## TEORIE PLAZMATU II (VLNY A NESTABILITY)

### 4. LINEÁRNÍ VLNY V PLAZMATU

#### 4.1. Základní pojmy

##### 4.1.1 Vlnění

Označme veličinu, jejíž hodnoty se mění v čase a prostoru  $\psi(t, \mathbf{x})$  nebo  $\mathbf{V}(t, \mathbf{x})$ , podle toho, zda jde o skalární či vektorovou veličinu. Může jít o tlak, hustotu prostředí, teplotu, rychlostní, elektrické či magnetické pole, výšku mořské hladiny a podobně. Uvedme si nejprve některé pojmy, které se používají v teorii vln.

##### ■ Vlnová funkce

Veličina  $\psi(t, \mathbf{x})$  resp.  $\mathbf{V}(t, \mathbf{x})$  popisující vlnění v čase a v prostoru. Položíme-li  $t = \text{const}$ , pozorujeme časový snímek vlnění. Můžete si představit, že vyfotografujeme například vlnící se mořskou hladinu a prohlížíme si vzniklou fotografii. Položíme-li  $\mathbf{x} = \text{const}$ , pozorujeme časový průběh sledované veličiny v jednom určitém místě. Vlnění většinou popisujeme komplexní vlnovou funkcí, použití komplexních čísel významně zjednoduší některé výpočty. Fyzikální význam má ale zpravidla jen reálná část vlnové funkce. Tak jako každou komplexní funkci, můžeme vlnovou funkci zapsat pomocí dvou reálných funkcí, amplitudy  $A$  a fáze  $\varphi$ :

$$\psi(t, \mathbf{x}) = A(t, \mathbf{x}) e^{i\varphi(t, \mathbf{x})}; \quad \mathbf{V}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{A}(t, \mathbf{x}) e^{i\varphi(t, \mathbf{x})}. \quad (4.1)$$

##### ■ Vlnoplocha

Plocha spojující místa s konstantní hodnotou fáze  $\varphi$  vlnové funkce. V těchto místech je vlnění ve stejné fázi (například tlak má 75 % maximální hodnoty).

##### ■ Úhlová frekvence

Změna fáze vlnění s časem,

$$\omega = -\frac{\partial \varphi}{\partial t}. \quad (4.2)$$

Minus v definici není podstatné, zajišťuje jen, aby se rovinná vlna pohybovala v kladném směru vlnového vektoru. Úhlová frekvence se může měnit jak s časem, tak od místa k místu. Je-li úhlová frekvence neproměnná, lze ji zapsat pomocí periody  $T$  jako  $\omega = 2\pi/T$ .

##### ■ Vlnový vektor

Změna fáze vlnění s prostorovými proměnnými,

$$\mathbf{k} = \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{x}} = \nabla \varphi. \quad (4.3)$$

Vlnový vektor jakožto gradient míří kolmo na vlnoplochu ve směru šíření vln. Jeho velikost i směr se může měnit s časem i od místa k místu. Je-li vlnový vektor neproměnný, lze jeho velikost zapsat pomocí vlnové délky  $\lambda$  jako  $k = 2\pi/\lambda$ .

##### ■ Disperzní relace



Vlnění je v každém místě popsáno čtyřmi čísly  $(\omega, \mathbf{k})$ , která tvoří relativistický čtyřvektor transformující se pomocí Lorentzovy transformace. Tato čísla jsou ale závislá. Vztah mezi nimi lze odvodit z rovnic popisujících daný typ vlnění. Většinou má závislost obecný tvar

$$\phi(\omega, \mathbf{k}) = 0 \quad (4.4)$$

a nazývá se disperzní relace. V některých případech je možné z disperzní relace explicitně vypočítat úhlovou frekvenci v závislosti na vlnovém vektoru

$$\omega = \omega(\mathbf{k}). \quad (4.5)$$

Tam, kde to explicitně možné není, můžeme použít větu o implicitní funkci a disperzní relaci ve tvaru  $\omega(\mathbf{k})$  určit alespoň lokálně.

### ■ Rovinná (monochromatická) vlna

Jde o nejjednodušší typ vlny, amplituda je konstantní a fáze je lineární funkcí:

$$A(t, \mathbf{x}) = A; \quad \varphi(t, \mathbf{x}) = c_0 t + c_1 x + c_2 y + c_3 z = -\omega t + k_x x + k_y y + k_z z = \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t. \quad (4.6)$$

Význam koeficientů  $c_k$  je zřejmý z definice úhlové frekvence a vlnového vektoru. Termín monochromatická v názvu vlny znamená, že ve vlně je zastoupena jediná frekvence (barva = chromos). Rovinná (monochromatická) vlna má tedy tvar

$$\psi(t, \mathbf{x}) = A e^{i[\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t]}. \quad (4.7)$$

Na první pohled je zřejmé, že plochy konstantní fáze  $\varphi(t, \mathbf{x}) = \text{const}$  představují rovnice přesouvajících se rovin:

$$\varphi(t, \mathbf{x}) = \text{const} \quad \Rightarrow \quad k_x x + k_y y + k_z z - \omega t = \text{const} \quad \Rightarrow \quad c_1 x + c_2 y + c_3 z + d(t) = 0.$$

Přesun roviny budeme chápat jako kolmý k této rovině (šikmé přesuny rovin lze tak jako tak nahradit kolmým přesunem s rychlostí rovnou projekci rychlosti do kolmého směru). Směr přesunu určíme jako gradient rovnice roviny:

$$\varphi(t, \mathbf{x}) = k_x x + k_y y + k_z z - \omega t \quad \Rightarrow \quad \nabla \varphi = \mathbf{k}.$$

Vlnový vektor proto míří ve směru šíření vlnění.

### ■ Fázová rychlost

Fázová rychlost je rychlost přesunu roviny konstantní fáze. Zvolme souřadnicový systém tak, aby se roviny přesouvaly ve směru první osy, tj.

$$\mathbf{k} = (k, 0, 0)$$

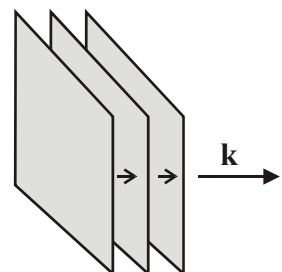
Diferencováním rovnice plochy konstantní fáze získáme velikost přesunu plochy (fázovou rychlost)

$$kx - \omega t = \text{const} \quad \Rightarrow \quad k dx - \omega dt = 0 \quad \Rightarrow \quad v_f = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k}.$$

Pro obecnou volbu souřadnicového systému platí

$$v_f = \frac{\omega}{k}; \quad \mathbf{v}_f = \frac{\omega}{k} \frac{\mathbf{k}}{k} = \frac{\omega}{k^2} \mathbf{k}. \quad (4.8)$$

První výraz určuje jen velikost fázové rychlosti, druhý výraz ukazuje, že vektor fázové rychlosti míří ve směru vlnového vektoru. Fázová rychlost souvisí jen s přesunem místa, které má stejnou fázi vlnění,



nesouvisí se skutečným makroskopickým přesunem hmoty (kola šířící se na vodní hladině mají zcela jinou rychlost než voda samotná). Fázová rychlost může být, a v mnoha případech je, nadsvětelná. Tvar disperzní relace určuje hodnotu fázové rychlosti pro různé frekvence. Jev, kdy se vlny různých frekvencí šíří různou rychlostí se nazývá *disperze*.

### ■ Obecná vlna

S rovinnými vlnami se velmi snadno pracuje a můžeme z nich poskládat vlnu obecnějšího tvaru:

$$\psi(t, \mathbf{x}) = \int a(\omega, \mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} d^3 \mathbf{k} \quad (4.9)$$

Jde vlastně o Fourierovu transformaci  $\psi(t, \mathbf{x}) \leftrightarrow a(\omega, \mathbf{k})$ . Amplitudy vln jsou Fourierovým obrazem vlnové funkce. Integrace se provádí jen přes složky vlnového vektoru. Úhlová frekvence je na vlnovém vektoru závislá prostřednictvím disperzní relace (4.5) a proto se přes ní neintegruje. Formálně můžeme integraci zapsat čtyřrozměrně pomocí Diracovy distribuce:

$$\psi(t, \mathbf{x}) = \int a(\omega, \mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} \delta[\omega - \omega(\mathbf{k})] d\omega d^3 \mathbf{k}. \quad (4.10)$$

### ■ Grupová rychlost

Zkoumejme nyní rychlost přesunu vlnového balíku – klubka vln podobných frekvencí a vlnových vektorů. Pro jednoduchost budeme uvažovat balík šířící se ve směru osy  $x$  (tak zvolíme souřadnicový systém):

$$\psi(t, x) = \int_{k_0 - \Delta k}^{k_0 + \Delta k} a(\omega, k) e^{i(kx - \omega t)} dk. \quad (4.11)$$

Amplituda vln je nenulová jen v intervalu  $(k_0 - \Delta k, k_0 + \Delta k)$  a nahradíme ji konstantní amplitudou:

$$\psi(t, x) \approx a(\omega_0, k_0) \int_{k_0 - \Delta k}^{k_0 + \Delta k} e^{i(kx - \omega t)} dk.$$

V dalším kroku vytkneme z integrálu střední vlnu

$$\psi(t, x) \approx a(\omega_0, k_0) e^{i(k_0 x - \omega_0 t)} \int_{k_0 - \Delta k}^{k_0 + \Delta k} e^{i[(k - k_0)x - (\omega - \omega_0)t]} dk.$$

Nesmíme zapomenout, že  $\omega = \omega(k)$  a integrace se „skrytě“ provádí i přes  $\omega$ . Další úpravy jsou zřejmé:

$$\psi(t, x) \approx a(\omega_0, k_0) e^{i(k_0 x - \omega_0 t)} \int_{k_0 - \Delta k}^{k_0 + \Delta k} \exp \left[ i(k - k_0) \left( x - \frac{\omega(k) - \omega_0}{k - k_0} t \right) \right] dk$$

Zlomek v argumentu exponenciely lze nahradit derivací

$$\frac{\omega(k) - \omega_0}{k - k_0} \approx \left. \frac{\partial \omega}{\partial k} \right|_{k_0} = v_g(k_0).$$

Veličina  $v_g$  má zatím význam jen označení pro výše definovanou parciální derivaci. Vlnový balík má nyní tvar:

$$\psi(t, x) \approx a(\omega_0, k_0) e^{i(k_0 x - \omega_0 t)} \int_{k_0 - \Delta k}^{k_0 + \Delta k} \exp[i(k - k_0)(x - v_g t)] dk.$$

Je zřejmé, že po integraci přes vlnový vektor bude výsledek integrálu nějakou funkcí argumentu  $x - v_g t$ :

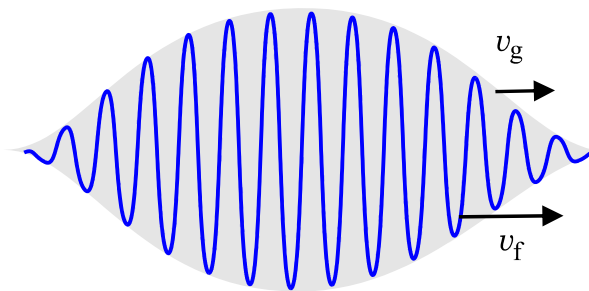
$$\psi(t, x) \approx a(\omega_0, k_0) e^{i(k_0 x - \omega_0 t)} F(x - v_g t) = A(x - v_g t) e^{i(k_0 x - \omega_0 t)}.$$

Balík má tedy obálku šířící se rychlostí  $v_g$ . Pro obecně mířící vlnový vektor je

$$\mathbf{v}_g = \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}} = \left( \frac{\partial \omega}{\partial k_x}, \frac{\partial \omega}{\partial k_y}, \frac{\partial \omega}{\partial k_z} \right). \quad (4.12)$$

Obdobný vztah ve sférické souřadnicové soustavě  $(k, \theta, \varphi)$  má tvar (gradient v  $\mathbf{k}$  prostoru)

$$\mathbf{v}_g = \left( \frac{\partial \omega}{\partial k}, \frac{1}{k} \frac{\partial \omega}{\partial \theta}, \frac{1}{k \sin \theta} \frac{\partial \omega}{\partial \varphi} \right). \quad (4.13)$$



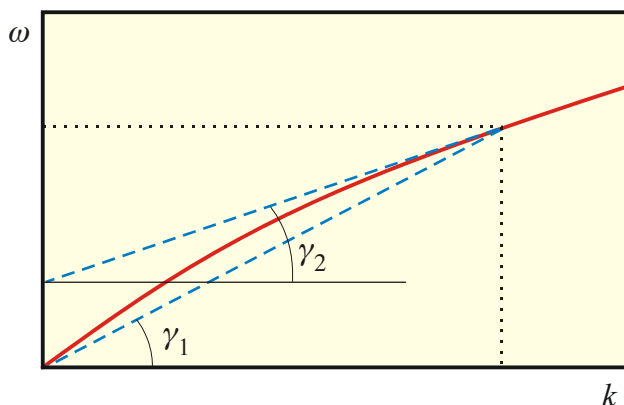
Rychlost šíření vlnového balíku jako celku se nazývá *grupová rychlost*. Je to rychlost šíření informace o tvaru balíku a rychlost přenosu energie balíku a nutně musí být podsvětelná. S využitím de Broglieho vztahů a Hamiltonových kanonických rovnic  $\dot{q}_k = \partial H / \partial p_k$  snadno ukážeme, že jde o mechanickou rychlost částice kvantově spojené s vlnovým balíkem:

$$v_g = \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}} = \frac{\partial \hbar \omega}{\partial \hbar \mathbf{k}} = \frac{\partial E}{\partial \mathbf{p}} = v_{\text{mech}}.$$

#### ■ Grafický význam fázové a grupové rychlosti

Grafický význam fázové a grupové rychlosti vidíme na obrázku. Fázová rychlost je dána tangentou úhlu, který svírá spojnice bodu na křivce disperzní relace s počátkem (vzhledem k vodorovné ose), grupová rychlost je dána směrnici tečny (jde o derivaci):

$$v_f = \text{tg } \gamma_1; \quad v_g = \text{tg } \gamma_2. \quad (4.14)$$



#### 4.1.2 Rozměrová analýza (vlny na hluboké vodě)

I bez znalosti teorie a bez znalosti fyzikálních procesů probíhajících v dané situaci je někdy možné odvodit disperzní relaci. Tvar fyzikálních zákonů je mnohdy natolik omezen rozměry veličin, že zbývá jen několik málo variant. V těchto případech postačí „jen“ rozměrová analýza problému. Typickou ukázkou je problematika vln na hluboké vodě. Na mělčině závisí vlastnosti vln samozřejmě na hloubce vody a takové vlny mohou být velmi komplikované. Jsme-li ale na hluboké vodě a vlny dosahují rozměrů od milimetrů po několik desítek metrů, nemůže jejich tvar ovlivnit hloubka oceánu. Takové vlně je jedno, zda je dno 500 m pod hladinou nebo 5 km pod hladinou. Tím se problematika značně zjednodušuje. Úlohu rozdělíme na dvě části – vlny dlouhé a vlny krátké.

##### ■ Dlouhé vlny na hluboké vodě

Pokusíme se určit disperzní relaci z rozměrové analýzy problému. Na čem může záviset frekvence vln? Z úvodu již víme, že frekvence nebude záviset na hloubce oceánu. Vlastnosti dlouhých vln také nebudou záviset na povrchovém napětí. To ovlivňuje prohnutí hladiny malých rozměrů, tedy vlny krátké. Vzpomeňte si na školní experiment s jehlou ležící na hladině vody. Jehlu na hladině drží právě povrchové napětí a průhyb hladiny je patrný na milimetrové vzdálenosti od jehly. Zbývá tak závislost na hustotě kapaliny, na tíhovém zrychlení a samozřejmě na vlnovém vektoru (jde o disperzní relaci, tj. vztah mezi  $\omega$  a  $k$ ):

$$\omega = \omega(\rho, g, k).$$

Předpokládejme nejjednodušší možnou závislost, tj. mocninou

$$\omega = \rho^\alpha g^\beta k^\gamma.$$

Na první pohled se zdá nemožné z jedné rovnice určit tři neznámé exponenty  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ . Fyzikální veličiny se ale skládají z hodnoty a rozměru. Právě rozměry jsou zde podstatné. Zapišme rozměr veličin hledaného vztahu:

$$s^{-1} = kg^\alpha m^{-3\alpha} \cdot m^\beta s^{-2\beta} \cdot m^{-\gamma}.$$

Disperzní relace musí platit pro širokou škálu parametrů. To je možné jen tehdy, jestliže exponenty rozměrů budou souhlasit u všech základních jednotek SI:

$$m: \quad 0 = -3\alpha + \beta - \gamma,$$

$$kg: \quad 0 = \alpha,$$

$$s: \quad -1 = -2\beta.$$

Tyto tři rovnice mají jediné řešení:

$$\alpha = 0; \quad \beta = 1/2; \quad \gamma = 1/2$$

a hledaná disperzní relace má tvar

$$\omega = \sqrt{gk} . \quad (4.15)$$

Disperzní relaci jsme odvodili z rozměrové analýzy bez znalosti procesů probíhajících ve vlně. Je třeba přiznat, že výsledný vztah je sice jednoznačný, ale až na násobící bezrozměrný koeficient ( $\omega = \text{const} \sqrt{gk}$ ). Ten je nutné určit experimentálně a v tomto případě je roven jedné. Ze vztahů (4.8) a (4.12) určíme fázovou a grupovou rychlost:

$$v_f = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{g}{k}} = \sqrt{\frac{\lambda g}{2\pi}} ,$$

$$v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{k}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\lambda g}{2\pi}} = \frac{1}{2} v_f .$$

U dlouhých vln na hluboké vodě dochází k disperzi (závislosti rychlosti vln na vlnové délce). Dlouhé vlny se šíří vyšší rychlostí. Grupová rychlost je rovna polovině fázové rychlosti. Tou se šíří balík dlouhých vln (například za lodí).

### ■ Krátké vlny na hluboké vodě

Krátké vlny jsou dominantně ovlivněny povrchovým napětím  $\sigma$ , naopak zanedbatelný je vliv tíhového pole (to ovlivňuje především velké vlny). Obdobnou rozměrovou analýzou můžeme získat vztah

$$\omega = \sqrt{\frac{\sigma k^3}{\rho}} . \quad (4.16)$$

Standardním postupem určíme fázovou a grupovou rychlost

$$v_f = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{\sigma k}{\rho}} = \sqrt{\frac{2\pi\sigma}{\lambda\rho}} ,$$

$$v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k} = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{\sigma k}{\rho}} = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{2\pi\sigma}{\lambda\rho}} = \frac{3}{2} v_f .$$

U krátkých vln je situace opačná než u dlouhých. Kratší vlny se šíří rychleji a grupová rychlost je větší než fázová ( $v_g = 1.5 v_f$ ).

### ■ Obecné vlny na hluboké vodě

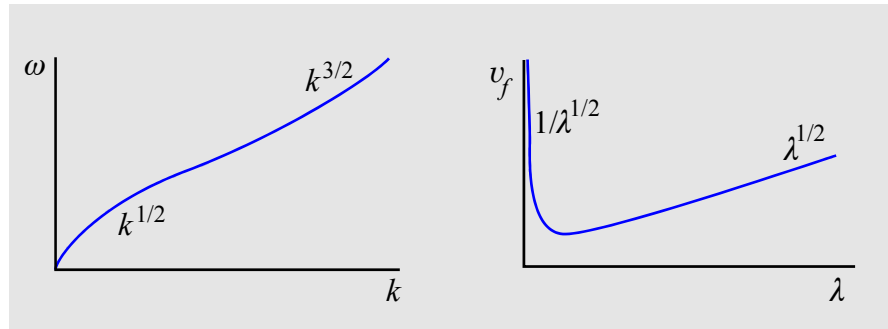
Předchozí dva limitní vztahy pro dlouhé a krátké vlny lze spojit do disperzní relace pro vlny libovolné vlnové délky:

$$\omega = \sqrt{\frac{\sigma k^3}{\rho} + gk} . \quad (4.17)$$

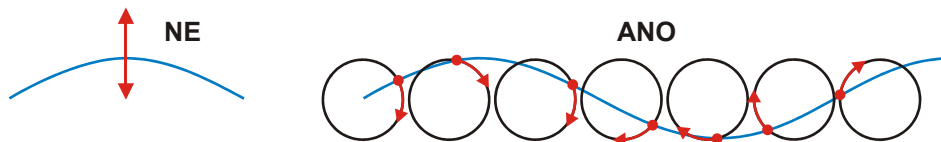
Pro fázovou a grupovou rychlost standardně nalezneme

$$v_f = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{\sigma k}{\rho} + \frac{g}{k}} = \sqrt{\frac{2\pi\sigma}{\rho\lambda} + \frac{g\lambda}{2\pi}}$$

$$v_g = \frac{\partial\omega}{\partial k} = \frac{\frac{3}{2}\frac{\sigma k}{\rho} + \frac{1}{2}\frac{g}{k}}{\sqrt{\frac{\sigma k}{\rho} + \frac{g}{k}}} = \frac{\frac{6\pi\sigma}{2\rho\lambda} + \frac{g\lambda}{4\pi}}{\sqrt{\frac{2\pi\sigma}{\rho\lambda} + \frac{g\lambda}{2\pi}}}$$



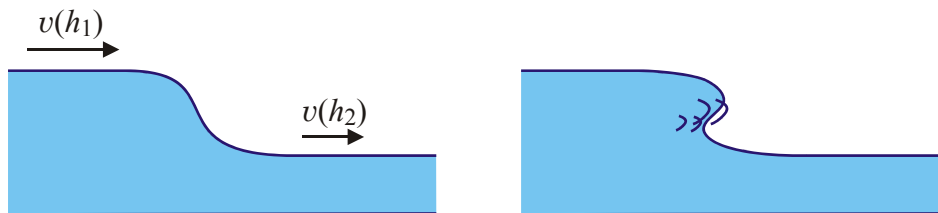
**Poznámka 1:** Vztahy jsme odvodili bez znalosti fyzikálních zákonitostí. Sama teorie šíření vln na hluboké vodě není jednoduchá. Vlnění není příčné, jak by se na první pohled mohlo zdát. Částice vody se nepohybují v hřebeni nahoru a dolů (nalevo). Je tomu tak proto, že voda je nestlačitelná a jde-li hřeben dolů, musí se voda roztékat do strany. Výsledkem je pohyb vodních částic po kružnici. Vlny na vodě nejsou příčné (nejsou ani podélné, jde o směsici příčného a podélného vlnění).



**Poznámka 2:** Na mělčině závisí disperzní relace na hloubce vody. Tak se i fázová rychlost stává závislou na hloubce. Přibližně platí

$$v_f \sim \sqrt{gh} . \tag{4.18}$$

Vznikne-li na vodní hladině schodovitý útvar, šíří se horní část vyšší rychlostí a vlna známým způsobem přepadává.



### 4.1.3 Lineární teorie (elektromagnetické vlny)

Máme-li ke sledovanému jevu nějaký teoretický model, nejlépe uspořádaný do přehledné soustavy rovnic, je napůl vyhráno. Je-li navíc teorie lineární, tj. všechny neznámé se vyskytují v prvních mocninách, je další postup přímočarý:

1. Můžeme se pokusit některé proměnné ze soustavy vyloučit a snížit tak počet proměnných. Ideálem je samozřejmě získat jedinou rovnici pro jedinou neznámou. Popisuje-li model vlnění, bude výsledná rovnice nějakým druhem vlnové rovnice. Vylučování proměnných ze soustavy výchozích rovnic vůbec nemusí být jednoduché. Zpravidla jde o soustavu parciálních diferenciálních rovnic a ne každý umí s těmito rovnicemi zacházet. Naštěstí

můžeme výpočet kdykoli přerušit a přejít ke kroku 2. Dokonce se o snížení počtu proměnných vůbec pokoušet nemusíme a můžeme rovnou přistoupit ke kroku 2.

- Zcela obecné řešení (vlnu) můžeme složit z rovinných vln podle vztahu (4.11). Vzhledem k tomu, že výchozí soustava rovnic (nebo jen rovnice jediná, podařilo-li se nám snížit počet proměnných na jednu) je lineární, můžeme dosadit do soustavy jednu konkrétní rovinnou vlnu a zkoumat chování soustavy pro tuto vlnu. Kdykoli později můžeme úplné řešení z takovýchto rovinných vln složit. S rovinnými vlnami se mimořádně snadno zachází. Zkusme rovinnou vlnu derivovat podle časové a prostorové proměnné:

$$\frac{\partial}{\partial t} \psi = \frac{\partial}{\partial t} A e^{i[\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t]} = -i\omega A e^{i[\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t]} = -i\omega \psi,$$

$$\frac{\partial}{\partial x_l} \psi = \frac{\partial}{\partial x_l} A e^{i[\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t]} = +ik_l A e^{i[\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t]} = +ik_l \psi.$$

Vidíme, že parciální derivace pro rovinnou vlnu přecházejí na algebraické výrazy. Jakékoli kombinace parciálních derivací lze nahradit algebraickými výrazy plynoucími z obou uvedených relací. Sestavme je do přehledné tabulky:

Výraz	Příklad
$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow -i\omega$	$\frac{\partial f}{\partial t} = -i\omega f$
$\frac{\partial}{\partial x_l} \rightarrow +ik_l$	$\frac{\partial f}{\partial x_l} = +ik_l f$
$\nabla \rightarrow +i\mathbf{k}$	$\nabla f = +i\mathbf{k} f$
$\text{div} \rightarrow i\mathbf{k} \cdot$	$\text{div} \mathbf{V} = i\mathbf{k} \cdot \mathbf{V}$
$\text{rot} \rightarrow i\mathbf{k} \times$	$\text{rot} \mathbf{V} = i\mathbf{k} \times \mathbf{V}$
$\Delta \rightarrow -k^2$	$\Delta f = -k^2 f$

Podle těchto pravidel převedeme výchozí soustavu na algebraickou soustavu rovnic, se kterou se snáze zachází. Tento krok je ekvivalentní provedení Fourierovy transformace.

- Vzhledem k tomu, že hledáme nenulové řešení, musí být determinant soustavy nulový (předpokládáme, že výsledná soustava nemá pravou stranu a většinou tomu tak skutečně je). Z této podmínky získáme vztah mezi  $\omega$  a  $\mathbf{k}$ , tedy disperzní relaci. Často je výhodné eliminací snížit počet proměnných soustavy a tím řád počítaného determinantu. Snižování počtu proměnných můžeme provádět před použitím pravidel Fourierovy transformace (pro parciální diferenciální rovnice, viz krok 1) i po něm v algebraické soustavě.
- Je-li disperzní relace komplexní, je vhodné řešit případnou stabilitu či nestabilitu nalezeného řešení. Komplexní úhlová frekvence nebo vlnový vektor znamená ve výrazu  $\exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)]$  přítomnost exponenciálních neoscilujících členů, které mohou vést k útlumu nebo exponenciálnímu narůstání řešení (nestabilitě).
- Z disperzní relace se pokusíme určit úhlovou frekvenci a ze vztahů (4.8) a (4.12) nalezneme fázovou a grupovou rychlost vln.
- Vrátíme se k původní soustavě rovnic a zkoumáme vztahy mezi jednotlivými veličinami, zejména vzájemné směry různých vektorů, zda je vlnění příčné či podélné, atd.

Jako jednoduchý příklad na uvedený postup řešíme elektromagnetické vlny ve vakuu. Za výchozí soustavu rovnic poslouží Maxwellovy rovnice:

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \mathbf{D} &= \rho, \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \mathbf{j} + \partial \mathbf{D} / \partial t, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\partial \mathbf{B} / \partial t.\end{aligned}\quad (4.19)$$

Ve vakuu je  $\rho = 0$ ,  $\mathbf{j} = 0$  a platí jednoduché materiálové vztahy  $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ . Jako základní ponecháme v soustavě vektory  $\mathbf{E}$  a  $\mathbf{B}$ :

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \mathbf{E} &= 0, \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{B} &= \varepsilon_0 \mu_0 \partial \mathbf{E} / \partial t, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\partial \mathbf{B} / \partial t.\end{aligned}\quad (4.20)$$

Výsledkem je soustava Maxwellových rovnic ve vakuu. První dvě skalární rovnice jsou okrajovými podmínkami druhých dvou vektorových rovnic, které tvoří výchozí soustavu rovnic. Ukážeme dva postupy řešení. V prvním se pokusíme eliminovat proměnné ještě před provedením Fourierovy transformace (FT), v druhém až po provedení FT.

### Postup 1

Z Maxwellových rovnic se pokusíme vyloučit magnetickou indukci a získat rovnici pro elektrické pole. Na čtvrtou rovnici zapůsobíme operací rotace a na pravé straně za  $\operatorname{rot} \mathbf{B}$  dosadíme z třetí rovnice:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \operatorname{rot} \mathbf{B}}{\partial t} \Rightarrow \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \Rightarrow (\operatorname{grad} \operatorname{div} - \Delta) \mathbf{E} = -\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}.$$

Vzhledem k tomu, že  $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$ , získáváme výslednou rovnici

$$\Delta \mathbf{E} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (4.21)$$

Jde o známou vlnovou rovnici pro elektrické pole. Obdobně bychom eliminací elektrického pole mohli z Maxwellových rovnic získat stejnou rovnici pro magnetické pole. Nyní provedeme FT podle pravidel uvedených v této kapitole:

$$\left(-k^2 + \varepsilon_0 \mu_0 \omega^2\right) \mathbf{E} = 0.$$

Parciální diferenciální rovnici jsme převedli na algebraickou rovnici bez pravé strany. Nenulové řešení bude existovat pouze tehdy, když

$$-k^2 + \varepsilon_0 \mu_0 \omega^2 = 0 \Rightarrow \omega(k) = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0}} k.$$

Z podmínky nenulovosti řešení jsme odvodili disperzní relaci. Fázová rychlost šíření (rychlost světla) je

$$c \equiv v_f = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0}}. \quad (4.22)$$



Nalezená disperzní relace tvaru  $\omega = ck$  je nejjednodušší možná (přímková), fázová i grupová rychlost je stejná a vlnění nejeví disperzi (fázová rychlost není závislá na vlnové délce resp. vlnovém vektoru).

## Postup 2

Budeme předpokládat, že se nám nepodařilo ze soustavy Maxwellových rovnic eliminovat rovnici pro elektrické či magnetické pole. Provedme proto FT již v původní soustavě rovnic (4.20):

$$\begin{aligned} \mathbf{k} \cdot \mathbf{E} &= 0, & \mathbf{k} \cdot \mathbf{B} &= 0, \\ \mathbf{k} \times \mathbf{B} &= -\omega \varepsilon_0 \mu_0 \mathbf{E}, & \mathbf{k} \times \mathbf{E} &= +\omega \mathbf{B}. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Eliminaci proměnných lze provést nyní. Dosadíme  $\mathbf{B}$  z poslední rovnice do předposlední:

$$\frac{1}{\omega} \mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) = -\omega \varepsilon_0 \mu_0 \mathbf{E} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{k}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}) - k^2 \mathbf{E} = -\omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 \mathbf{E}.$$

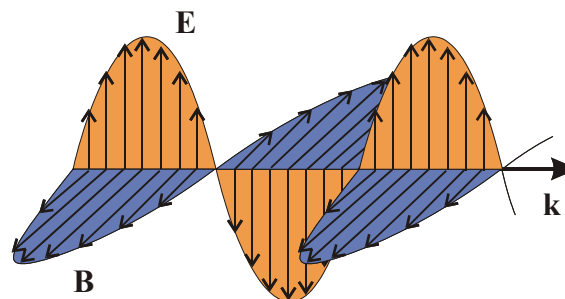
První výraz je podle první rovnice z (4.23) nulový a rovnice pro elektrické pole proto je

$$(k^2 - \varepsilon_0 \mu_0 \omega^2) \mathbf{E} = 0.$$

Podmínkou nenulovosti elektrického pole je opět disperzní relace

$$k^2 - \varepsilon_0 \mu_0 \omega^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega(k) = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0}} k = ck.$$

Z původní soustavy (4.23) snadno zjistíme, že vektory  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  a  $\mathbf{k}$  jsou navzájem kolmé a vlnění je proto příčné.



**Poznámka:** Vidíme, že není důležité, v které fázi výpočtu provedeme FT, oba postupy vedou ke stejnému výsledku. Pokud neumíme zacházet s parciálními diferenciálními rovnicemi, je výhodné provést FT co nejdříve. Nepodaří-li se nám provést eliminaci proměnných ani před, ani po FT, bude podmínkou nenulovosti řešení nulovost determinantu celé soustavy.

### 4.1.4 Nelineární teorie (zvukové vlny)

Je-li výchozí model nelineární, může jít o značný problém. Rovnice jsou řešitelné jen někdy a žádné obecné postupy neexistují. Rovnice je možné linearizovat, ale tím ztrácíme mnoho z vlastností skutečných řešení. Lineární aproximace je ospravedlnitelná jen pro vlny malých amplitud, které chápeme jako malé poruchy nějakého známého (nejlépe stacionárního) řešení výchozí soustavy rovnic. Někdy je linearizace jedinou možností, jak se o řešení vůbec něco dozvědět. Z chování malých poruch můžeme obdobnými postupy jako v teoretické mechanice řešit problém stability řešení. Linearizace probíhá ve dvou krocích. Nejprve nalezneme „klidové“ řešení výchozí soustavy rovnic bez přítomnosti vln. V homogenním neomezeném prostředí jde zpravidla o konstantní řešení, u omezeného prostředí (například válcové vlákno) je situace složitější. V dalším kroku chápeme vlnu jako malou poruchu nalezeného řešení. „Malá porucha“ znamená, že relativní poruchy (vydělené nějakou charakteristickou

hodnotou) se chovají jako malý bezrozměrný parametr, jehož mocniny vyšší než první zanedbáváme. V praxi řešení s přidáním poruchy dosadíme do výchozí soustavy rovnic a zanedbáme kvadráty a vyšší mocniny všech poruch. Výsledkem je lineární soustava rovnic pro poruchy, na kterou aplikujeme postup z minulé kapitoly.

U nelineární soustavy rovnic můžeme tedy použít postup založený na linearizaci, který je obdobný vyšetřování stability u soustav obyčejných diferenciálních rovnic [1]. I zde zkoumáme chování malých poruch, které mohou být utlumeny (stabilita), exponenciálně narůstat (nestabilita) nebo mít vlnový charakter. Shrňme nyní základní kroky řešení nelineární soustavy metodou linearizace (metodou perturbací, malých poruch):

1. Nalezení nějakého (nejlépe stacionárního) řešení.
2. Linearizace pomocí malých poruch.
3. Možná eliminace proměnných.
4. Fourierova transformace.
5. Možná eliminace proměnných (algebraická).
6. Nalezení disperzní relace (determinant soustavy = 0).
7. Vyšetření stability řešení.
8. Nalezení fázové a grupové rychlosti.
9. Nalezení vzájemných směrů mezi vektory.

V kapitole 4.1.2 (rozměrová analýza bez znalosti teorie) začínal výpočet až krokem 6, nalezená disperzní relace byla reálná a tak odpadlo vyšetřování stability (krok 7). U lineárních soustav začíná výpočet krokem 3 (kapitola 4.1.3). U nelineárních soustav musí proběhnout celý uvedený postup. Celý výpočet si ukážeme na zvukových vlnách šířících se homogenním izotropním plynným prostředím.

### ■ Zvukové vlny v plynech

Za výchozí model budeme považovat soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{u} &= 0, \\ \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} &= -\nabla p, \\ p &= p(\rho) = K \rho^\gamma. \end{aligned} \quad (4.24)$$

První rovnice je rovnicí kontinuity pro hustotní pole, druhá rovnice je pohybovou rovnicí pro rychlostní pole a soustava je uzavřena polytropní stavovou závislostí. V soustavě je celkem pět neznámých ( $\rho$ ,  $\mathbf{u}$ ,  $p$ ) a soustava je nelineární, vystupují zde součiny hledaných funkcí. Proto provedeme celý postup (body 1 až 9):

1. *Stacionární řešení*: Stacionárním řešením (například nepohyblivý plyn v místnosti) je

$$\rho = \rho_0, \quad \mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad p = p_0.$$

2. *Linearizace*: Předpokládejme přítomnost malé poruchy stacionárního řešení

$$\rho = \rho_0 + \delta \rho, \quad \mathbf{u} = \delta \mathbf{u}, \quad p = p_0 + \delta p.$$

Tuto poruchu dosadíme do soustavy (4.24):

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}(\rho_0 + \delta\rho) + \operatorname{div}[(\rho_0 + \delta\rho)(\delta\mathbf{u})] &= 0, \\ (\rho_0 + \delta\rho)\frac{\partial(\delta\mathbf{u})}{\partial t} + \rho(\delta\mathbf{u} \cdot \nabla)(\delta\mathbf{u}) &= -\nabla(p_0 + \delta p), \\ \delta p &= \alpha(\rho_0)\delta\rho; \quad \alpha \equiv \frac{\partial p}{\partial \rho}.\end{aligned}$$

V soustavě ponecháme jen poruchy prvního řádu, poruchy vyšších řádů zanedbáme. Derivace konstant jsou nulové. Ze soustavy po linearizaci proto zůstane:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}(\delta\rho) + \operatorname{div}[\rho_0(\delta\mathbf{u})] &= 0, \\ \rho_0 \frac{\partial(\delta\mathbf{u})}{\partial t} &= -\nabla(\delta p), \\ \delta p &= \alpha(\rho_0)\delta\rho.\end{aligned}\tag{4.25}$$

3. *Eliminace proměnných:* Soustava (4.25) je již lineární soustavou pro neznámé  $\delta\rho, \delta\mathbf{u}, \delta p$ . V principu můžeme nyní eliminovat ze soustavy poruchu tlaku  $\delta p$  dosazením z poslední rovnice. Tento krok ale také můžeme provést později.
4. *Fourierova transformace:* Soustavu převedeme na algebraickou pomocí Fourierovy transformace. Naše soustava je již lineární a tak je tento krok ekvivalentní dosazení rovinné vlny do soustavy. Výsledkem je

$$\begin{aligned}-i\omega\delta\rho + i\rho_0(\mathbf{k} \cdot \delta\mathbf{u}) &= 0, \\ -i\omega\rho_0\delta\mathbf{u} &= -i\mathbf{k}\delta p, \\ \delta p &= \alpha\delta\rho.\end{aligned}\tag{4.26}$$

5. *Eliminace proměnných:* Získaná soustava je pro pět neznámých a determinant by se počítal z matice  $5 \times 5$ . Pomocí poslední rovnice eliminujeme tlak:

$$\begin{aligned}-\omega\delta\rho + \rho_0(\mathbf{k} \cdot \delta\mathbf{u}) &= 0, \\ \mathbf{k}\alpha\delta\rho - \omega\rho_0\delta\mathbf{u} &= 0.\end{aligned}$$

Nyní máme jen čtyři rovnice (jednu skalární a jednu vektorovou) pro čtyři neznámé  $\delta\rho, \delta\mathbf{v}$  a determinant by se počítal z matice  $4 \times 4$ . Z druhé (vektorové) rovnice můžeme ještě spočítat poruchu rychlosti a dosadit do první rovnice:

$$(-\omega^2 + \alpha k^2)\delta\rho = 0.$$

Výsledkem je jedna jediná rovnice pro jednu jedinou neznámou  $\delta\rho$ . Ne vždy lze provést eliminaci proměnných až do konce.

6. *Disperzní relace:* Podmínkou nenulovosti řešení je nulovost kulaté závorky před  $\delta\rho$  (jde o determinant matice  $1 \times 1$ ):

$$-\omega^2 + \alpha(\rho_0)k^2 = 0.\tag{4.27}$$

Nalezenou disperzní relaci lze snadno řešit vzhledem k  $\omega$ , za  $\alpha$  dosadíme z (4.25):

$$\omega = \sqrt{\frac{\partial p}{\partial \rho}} k.\tag{4.28}$$

7. *Stabilita řešení:* Disperzní relace vyšla reálná, reálnému vlnovému vektoru odpovídá reálná úhlová frekvence a řešením jsou vlny. V systému nedochází ani k útlumu ani k nestabilitě.
8. *Fázová a grupová rychlost:* Výsledná disperzní relace je lineární, fázová a grupová rychlost mají stejnou hodnotu, zvuk se šíří rychlostí

$$c_s = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{\partial p}{\partial \rho}} . \quad (4.29)$$

Speciálně pro polytropní děje  $p = K\rho^\gamma$  vychází

$$c_s = \sqrt{\gamma \frac{p}{\rho}} . \quad (4.30)$$

9. *Vztahy vektorů:* Z druhé rovnice (4.26) je zřejmé, že porucha rychlostního pole míří ve směru šíření vln (vlnového vektoru) a jde tak o *vlnění podélné*.

Za pomoci rychlosti zvuku lze disperzní relaci zvukových vln zapsat v často používaném tvaru

$$\omega = c_s k . \quad (4.31)$$

#### ■ Zvukové vlny v pohyblivém prostředí

Připusťme nyní nenulovou rychlost ve stacionárním řešení (to odpovídá šíření zvuku v pohyblivém prostředí) a požadujeme řešení ve tvaru

$$\rho = \rho_0 + \delta\rho, \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \delta\mathbf{u}, \quad p = p_0 + \delta p . \quad (4.32)$$

Co všechno se změní? Výpočet probíhá zcela analogicky, nyní ale při linearizaci přispěje i konvektivní člen v pohybové rovnici. Po snadném výpočtu získáme disperzní relaci

$$[\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_0]^2 - \alpha(\rho_0)k^2 = 0; \quad \alpha = \frac{\partial p}{\partial \rho} \quad (4.33)$$

a z ní pozorovanou úhlovou frekvenci

$$\omega = c_s k + \mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_0 = c_s k + k u_0 \cos \alpha = c_s k \left( 1 + \frac{u_0}{c_s} \cos \alpha \right) . \quad (4.34)$$

Ve výrazu jsme  $\alpha$  označili úhel mezi vlnovým vektorem  $\mathbf{k}$  a rychlostí prostředí  $\mathbf{u}_0$ . Označíme-li ještě frekvenci zvuku v nepohyblivém prostředí  $\omega_0 = c_s k$ , máme výsledný vztah

$$\omega = \omega_0 \left( 1 + \frac{u_0}{c_s} \cos \alpha \right) , \quad (4.35)$$

ktejž není nic jiného než Dopplerův vzorec pro změnu frekvence vlivem pohybu zdroje vlnění.

#### 4.1.5 Další příklady (Jeansovo kritérium, vlnová, KG a telegrafní rovnice)

##### ■ Jeansovo kritérium

Popišme nyní vlny v oblaku plynu a prachu, který je ovládán gravitačním polem (mlhovinu). Zejména se budeme zajímat o to, za jakých podmínek je generovaná zvuková vlna nestabilní

a může dojít k hroucení části mlhoviny a vzniku globule – zhuštěniny, která je předchůdcem budoucí hvězdy.

V následující tabulce jsou porovnány veličiny popisující elektrostatické a gravitační pole. Správný koeficient u Laplaceovy-Poissonovy rovnice pro gravitační potenciál získáte porovnáním vztahů pro potenciální energii bodového zdroje elektrostatického a gravitačního pole.

Veličina	Elektrostatické pole	Gravitační pole
Potenciál bodového zdroje	$\phi_E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$	$\phi_G = -G \frac{M}{r}$
Potenciální energie	$V_E = q \phi_E$	$V_G = m \phi_G$
Rovnice pro potenciál	$\Delta \phi_E = -\frac{\rho_Q}{\epsilon_0}$	$\Delta \phi_G = 4\pi G \rho_M$
Síla vyjádřená z energie	$\mathbf{F} = -\nabla V_E$	$\mathbf{F} = -\nabla V_G$
Síla vyjádřená z potenciálu	$\mathbf{F} = -q \nabla \phi_E$	$\mathbf{F} = -m \nabla \phi_G$
Hustota síly	$\mathbf{f} = -\rho_Q \nabla \phi_E$	$\mathbf{f} = -\rho_M \nabla \phi_G$

Za výchozí sadu rovnic budeme považovat soustavu (4.24) doplněnou o hustotu gravitační síly a rovnici pro gravitační potenciál:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{u} &= 0, \\ \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} &= -\nabla p - \rho \nabla \phi, \\ \Delta \phi &= 4\pi G \rho, \\ p &= p(\rho). \end{aligned} \quad (4.36)$$

Vzhledem k tomu, že jde jen o gravitační problém bez přítomnosti elektrických polí a nemůže proto dojít k záměně hustot ani potenciálů, vynecháváme index  $G$ . Celkem máme 6 rovnic pro 6 neznámých  $\rho$ ,  $\mathbf{v}$ ,  $\phi$ ,  $p$ . Řešení budeme hledat v perturbovaném tvaru

$$\rho = \rho_0 + \delta\rho, \quad \mathbf{u} = \delta\mathbf{u}, \quad \phi = \phi_0 + \delta\phi, \quad p = p_0 + \delta p.$$

Obdobným postupem nalezneme disperzní relaci zvukových vln ovlivněných gravitačním polem

$$\omega^2 = c_s^2 k^2 - 4\pi G \rho_0; \quad c_s^2 \equiv \frac{\partial p}{\partial \rho}. \quad (4.37)$$

Oproti relaci (4.31) je zde navíc druhý člen na pravé straně. Řešení vzhledem k  $\omega$  je jednoduché:

$$\omega = \pm \sqrt{c_s^2 k^2 - 4\pi G \rho_0}. \quad (4.38)$$

Na první pohled vidíme, že úhlová frekvence není za všech podmínek reálnou veličinou. Pro

$$c_s^2 k^2 < 4\pi G \rho_0 \quad (4.39)$$

je úhlová frekvence ryze imaginární,  $\omega = \pm i b$  a v rovinné vlně se objevují členy

$$e^{i\omega t} = e^{\mp b t}.$$

Některé typy poruch proto mohou exponenciálně narůstat a mlhovina se stává nestabilní. Právě v takovém prostředí mohou vznikat hvězdy jako původně malé poruchy narostlé do makroskopických rozměrů. Prozkoumejme proto podmínku (4.39) podrobněji:

$$c_s^2 \frac{4\pi^2}{\lambda^2} < 4\pi G \rho_0 \Rightarrow \lambda > \sqrt{\frac{\pi}{G \rho_0}} c_s = \sqrt{\frac{\pi}{G \rho_0}} \sqrt{\gamma \frac{p_0}{\rho_0}} = \sqrt{\frac{\pi}{G \rho_0}} \cdot \gamma \frac{n_0 k_B T}{n_0 m_0} = \sqrt{\frac{\pi \gamma k_B T}{G \rho_0 m_0}}.$$

Při odvození jsme použili pro rychlost zvuku vztah (4.30),  $m_0$  je hmotnost jednoho atomu či molekuly mlhoviny. Poruchy s vlnovou délkou větší než určitá mez jsou gravitačně nestabilní. Aby se v mlhovině mohly tvořit hvězdy, musí mít rozměry větší než tato kritická mez. Uvedené tvrzení se nazývá Jeansovo kritérium a bylo odvozeno v roce 1902:

$$L > \sqrt{\frac{\pi \gamma k_B T}{G \rho_0 m_0}}. \quad (4.40)$$

Z disperzní relace (4.38) není samozřejmě problém dopočítat fázovou a grupovou rychlost šíření poruch mlhovinou. V ionizovaném prostředí za přítomnosti magnetických polí mohou hvězdy vznikat, aniž by splňovaly Jeansovo kritérium.

Je-li splněno Jeansovo kritérium a v mlhovině vzniká kulový objekt, je třeba ještě řešit podmínky rovnováhy tohoto objektu. Gravitační síla působící na nějakou vrstvu uvnitř vznikající hvězdy má tvar

$$F_{\text{grav}} \sim \frac{1}{R^2}.$$

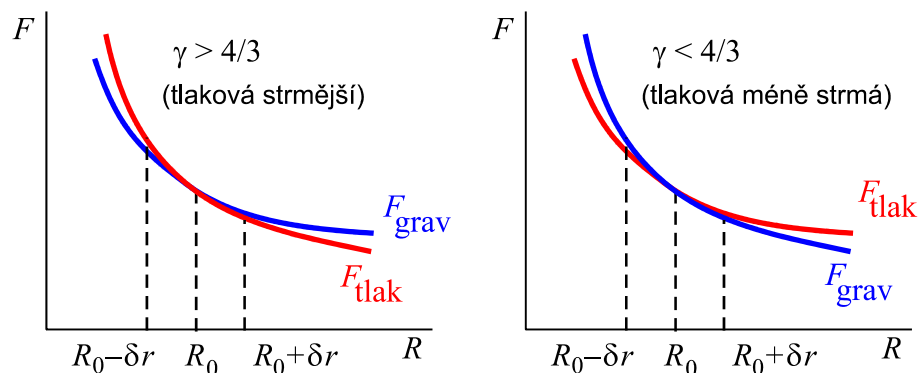
Tlaková síla na tuto vrstvu je úměrná součinu tlaku  $p \sim \rho^\gamma$  a povrchu  $S \sim R^2$ , tj

$$F_{\text{tlak}} \sim \rho^\gamma R^2 \sim R^{-3\gamma} R^2 \sim \frac{1}{R^{3\gamma-2}}.$$

Obě síly za normálních okolností klesají s rozměry hvězdy. Rovnováha se ustaví při rovnosti obou sil. Styl poklesu obou sil je stejný pro koeficient

$$\gamma = \frac{4}{3}.$$

Diskutujme dva případy. Nejprve  $\gamma > 4/3$ . Tlaková křivka je strmější než gravitační.



Jestliže hvězda zcela náhodně zvětší své rozměry, převládne gravitační síla a hvězdu opět smrští. Zmenší-li hvězda své rozměry, převládne tlaková síla a nafoukne hvězdu na původní rozměr. Hvězda je stabilní a výkyvy v jejích rozměrech neohrozí její existenci.

V případě  $\gamma < 4/3$  je tomu jinak. Jestliže hvězda zcela náhodně zvětší své rozměry, převládne tlaková síla a bude hvězdu nadále nutit zvětšovat rozměry. Hvězda bude nestabilní a minimálně odhodí obálku. Zmenší-li hvězda své rozměry, převládne gravitační síla a bude nutit hvězdu ke kolapsu.

**Poznámka:** Materiál bílých trpaslíků má polytropní koeficient blízky 4/3. Polytropní koeficient se poněkud mění s hmotností trpaslíka. Při hmotnosti přibližně  $1.44 M_{\odot}$  má polytropní koeficient právě hodnotu 4/3 a pro vyšší hmotnosti je bílý trpaslík nestabilní. Této hranici se říká Chandrasekharova mez.

### ■ Vlnová rovnice

Na klasickou vlnovou rovnici narazíme v mnoha vědních odvětvích. Odpovídá jednoduchým vlnám bez disperze.

$$\left( \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \psi = 0.$$

Rovnice je lineární a každé její „rozumné“ řešení je možné zapsat pomocí Fourierovy transformace jako superpozici rovinných vln. Po dosazení rovinné vlny do vlnové rovnice získáme disperzní relaci

$$\omega^2 = c^2 k^2.$$

Standardním postupem určíme fázovou a grupovou rychlost:

$$v_f = \frac{\omega}{k} = c; \quad v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k} = c.$$

Fázová i grupová rychlost je stejná a nezávisí na vlnové délce parciální vlny, což je charakteristické pro lineární disperzní relace typu  $\omega = ck$ .

### ■ Kleinova-Gordonova rovnice

Kleinova-Gordonova rovnice je správnou relativistickou rovnicí pro volnou částici se spinem rovným nule

$$\left( \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \mu^2 \right) \psi = 0; \quad \mu^2 \equiv \frac{m^2 c^2}{\hbar^2}.$$

Jde o vlnovou rovnici s konstantním členem, která limitně přechází v nerelativistickou Schrödingerovu rovnici [2]. Rovnice je lineární, její řešení opět budeme chápat jako superpozici rovinných vln. Po provedení Fourierovy transformace Kleinovy-Gordonovy rovnice získáme disperzní relaci

$$\omega^2 = c^2 k^2 + c^2 \mu^2.$$

Standardním postupem určíme fázovou a grupovou rychlost:

$$v_f = \frac{\omega}{k} = c \sqrt{1 + \frac{\mu^2}{k^2}} = c \sqrt{1 + \frac{\mu^2 \lambda^2}{4\pi^2}},$$

$$v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k} = \frac{c}{\sqrt{1 + \frac{\mu^2}{k^2}}} = \frac{c}{\sqrt{1 + \frac{\mu^2 \lambda^2}{4\pi^2}}}.$$

Na první pohled je zřejmé, že grupová rychlost je vždy podsvětelná. Oproti tomu fázová rychlost je vždy nadsvětelná a nemá význam přenosu informace. Mezi oběma rychlostmi je jednoduchý vztah  $v_f v_g = c^2$ . Obě rychlosti závisí na vlnové délce parciální vlny (tzv. disperze). Obdobné chování budou mít plazmové vlny diskutované v příští kapitole.

### ■ Telegrafní rovnice

Nalezneme vlnovou rovnici pro elektromagnetickou vlnu šířící se v kovu. V Maxwellových rovnicích dosadíme za proudovou hustotu  $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho_Q,$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0,$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \sigma \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t},$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}.$$

Pokud aplikujeme na třetí rovnici operaci divergence a za  $\operatorname{div} \mathbf{D}$  dosadíme z první rovnice, dostaneme

$$\frac{\partial \rho_Q}{\partial t} + \frac{\sigma}{\varepsilon} \rho_Q = 0 \quad \Rightarrow \quad \rho_Q \approx \rho_0 \exp\left[-\frac{\sigma}{\varepsilon} t\right].$$

Prostorová hustota náboje ve vodiči exponenciálně vymizí a nemusíme ji proto uvažovat. Za výchozí sadu Maxwellových rovnic pro vlny ve vodiči můžeme použít

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 0,$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0,$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu \sigma \mathbf{E} + \varepsilon \mu \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t},$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}.$$

Aplikací operace rotace na třetí rovnici můžeme eliminovat elektrické pole

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{B} = \sigma \mu \operatorname{rot} \mathbf{E} + \varepsilon \mu \frac{\partial \operatorname{rot} \mathbf{E}}{\partial t},$$

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{B} - \Delta \mathbf{B} = -\sigma \mu \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2},$$

$$\Delta \mathbf{B} - \sigma \mu \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = 0.$$



Obdobně můžeme získat i rovnici pro pole elektrické. Ve vodiči splňují elektromagnetické vlny tzv. telegrafní rovnici:

$$\left( \Delta - \sigma\mu \frac{\partial}{\partial t} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix} = \mathbf{0}. \quad (4.41)$$

Po dosazení rovinné vlny (FT) získáme disperzní relaci

$$\omega^2 = c^2 k^2 - ic^2 \sigma \mu \omega.$$

Je-li vodivost nulová ( $\sigma = 0$ ), přejde tato disperzní relace ve známou disperzní relaci vln v nevodivém prostředí. Ve vodiči je disperzní relace komplexní, což obecně znamená útlum.

**Útlum v prostoru:** Hledejme nejprve prostorový útlum (řešení v  $k$ ):

$$c^2 k^2 = \omega^2 + ic^2 \sigma \mu \omega \approx ic^2 \sigma \mu \omega$$

Vzhledem k vysoké vodivosti kovů jsme první člen na pravé straně zanedbali. Tento výraz již snadno odmocníme. Nezapomeňte, že  $i^{1/2} = (1+i)/2^{1/2}$ . Proto °

$$k = k_1 + ik_2; \quad k_1 = k_2 = \sqrt{\frac{\sigma\mu\omega}{2}}.$$

Reálná i imaginární část vlnového vektoru je stejně veliká (to je pro kovy typické). V prostoru tedy bude mít vlna charakter  $\exp[ik_1 x - k_2 x]$ . Vlna je tlumená s charakteristickou vzdáleností útlumu

$$\delta = \frac{1}{k_2} = \sqrt{\frac{2}{\sigma\mu\omega}}.$$

Tuto vzdálenost (do které vlna pronikne) nazýváme skinová hloubka.

**Útlum v čase:** Hledejme nyní útlum v čase (řešení v  $\omega$ ). Disperzní relace je kvadratická rovnice pro  $\omega$  s řešením

$$\omega_{1,2} = \frac{-ic^2 \sigma \mu \pm \sqrt{-c^4 \sigma^2 \mu^2 + 4c^2 k^2}}{2}$$

Uvědomíme-li si, že v diskriminantu je vodivostní člen dominantní (kov), zbývá jediné nenulové řešení

$$\omega \cong -ic^2 \sigma \mu$$

Řešení ve frekvenci je ryze imaginární

$$\omega = \omega_1 + i\omega_2; \quad \omega_1 = 0, \quad \omega_2 = -c^2 \sigma \mu$$

a má charakter útlumu

$$e^{-i\omega t} = e^{\omega_2 t} = e^{-c^2 \sigma \mu t}$$

s charakteristickou dobou útlumu

$$\tau = \left| \frac{1}{\omega_2} \right| = \frac{1}{c^2 \sigma \mu}.$$

Povšimněte si, že při důsledném dodržení znaménkové konvence (u prostoru +, u času -) ve vlnění typu  $\exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)]$  vyšel útlum v čase i v prostoru.

## 4.2. Plazmové oscilace a vlny

Oblast vyplněná plazmatem je schopna na základě různých vnějších podnětů přenášet mnoho druhů vlnění. V této kapitole se budeme zabývat nejjednoduššími plazmovými oscilacemi a vlnami, které probíhají *bez přítomnosti magnetického pole*. Hybnou silou je pouze pole elektrické, které tvoří vratnou sílu a umožňuje periodický pohyb. Počáteční porucha způsobí rozkmitání elektronové a iontové tekutiny na dvou charakteristických frekvencích a současně vznik globálního elektrického pole. Elektronová tekutina je schopna oscilací na podstatně vyšších frekvencích než iontová tekutina. Proto za výchozí soustavu rovnic nemůžeme využít jednotekutinový model, ale dvoutekutinový model. Viskózní členy zanedbáme. Pro tento typ vlnění platí Maxwellova rovnice  $\text{rot } \mathbf{E} = 0$  (i při nulovém magnetickém poli je možná vlna elektrického pole), ze které bezprostředně plyne  $\mathbf{k} \times \delta \mathbf{E} = 0$ . Proto platí  $\delta \mathbf{E} \parallel \mathbf{k}$  a vlnění je podélné.

### 4.2.1 Odvození disperzní relace

Za výchozí soustavu rovnic budeme volit sadu

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial n_e}{\partial t} + \text{div}(n_e \mathbf{u}_e) &= 0, \\
 \frac{\partial n_i}{\partial t} + \text{div}(n_i \mathbf{u}_i) &= 0, \\
 m_e n_e \frac{\partial \mathbf{u}_e}{\partial t} + m_e n_e (\mathbf{u}_e \cdot \nabla) \mathbf{u}_e &= -\nabla p_e - en_e \mathbf{E}, \\
 m_i n_i \frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial t} + m_i n_i (\mathbf{u}_i \cdot \nabla) \mathbf{u}_i &= -\nabla p_i + Zen_i \mathbf{E}, \\
 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= -\frac{1}{\varepsilon_0} (Zen_i \mathbf{u}_i - en_e \mathbf{u}_e), \\
 p_e = n_e k_B T_e = C_e n_e^{\gamma_e} ; \quad p_i = n_i k_B T_i = C_i n_i^{\gamma_i}.
 \end{aligned} \tag{4.42}$$

Jde o rovnice kontinuity pro elektrony a ionty, pohybové rovnice s tlakovým a elektrickým členem, rovnici pro elektrické pole a polytropní stavové rovnice. Rovnice pro elektrické pole je odvozena z Maxwellovy rovnice  $\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j} + \partial \mathbf{D} / \partial t$ , ve které je magnetické pole nulové a proudová hustota je vyjádřena ze vztahu (3.5). Uvažujeme  $Z$  násobnou ionizaci plazmatu. Uvedené rovnice budeme linearizovat, tj. provedeme perturbaci klidového řešení:

$$\begin{aligned}
 n_e = n_{e0} + \delta n_e ; \quad n_i = n_{i0} + \delta n_i ; \quad \mathbf{u}_e = \delta \mathbf{u}_e ; \quad \mathbf{u}_i = \delta \mathbf{u}_i ; \\
 \mathbf{E} = \delta \mathbf{E} ; \quad p_e = p_{e0} + \delta p_e ; \quad p_i = p_{i0} + \delta p_i .
 \end{aligned} \tag{4.43}$$

Po dosazení do původní sady a zanedbání členů vyšších řádů získáme:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \delta n_e}{\partial t} + \text{div}(n_{e0} \delta \mathbf{u}_e) &= 0, \\
 \frac{\partial \delta n_i}{\partial t} + \text{div}(n_{i0} \delta \mathbf{u}_i) &= 0, \\
 m_e n_{e0} \frac{\partial \delta \mathbf{u}_e}{\partial t} &= -\nabla \delta p_e - en_{e0} \delta \mathbf{E},
 \end{aligned}$$

$$m_i n_{i0} \frac{\partial \delta \mathbf{u}_i}{\partial t} = -\nabla \delta p_i + Z n_{i0} \delta \mathbf{E},$$

$$\frac{\partial \delta \mathbf{E}}{\partial t} = -\frac{e}{\varepsilon_0} (Z n_{i0} \delta \mathbf{u}_i - n_{e0} \delta \mathbf{u}_e),$$

$$\delta p_e = m_e c_e^2 \delta n_e; \quad c_e^2 \equiv \frac{\gamma_e k_B T_e}{m_e},$$

$$\delta p_i = m_i c_i^2 \delta n_i; \quad c_i^2 \equiv \frac{\gamma_i k_B T_i}{m_i}.$$

Další postup je přímočarý. Snížíme řád dosazením posledních dvou rovnic do předchozích a provedeme Fourierovu transformaci:

$$-\omega \delta n_e + n_{e0} (\mathbf{k} \cdot \delta \mathbf{u}_e) = 0,$$

$$-\omega \delta n_i + n_{i0} (\mathbf{k} \cdot \delta \mathbf{u}_i) = 0,$$

$$i\omega m_e n_{e0} \delta \mathbf{u}_e = i\mathbf{k} m_e c_e^2 \delta n_e + e n_{e0} \delta \mathbf{E},$$

$$i\omega m_i n_{i0} \delta \mathbf{u}_i = i\mathbf{k} m_i c_i^2 \delta n_i - Z e n_{i0} \delta \mathbf{E},$$

$$i\omega \delta \mathbf{E} = \frac{e}{\varepsilon_0} (Z n_{i0} \delta \mathbf{u}_i - n_{e0} \delta \mathbf{u}_e).$$

Jde o soustavu 11 algebraických rovnic pro jedenáct neznámých  $\delta n_e, \delta n_i, \delta \mathbf{u}_e, \delta \mathbf{u}_i, \delta \mathbf{E}$ . Pokusíme se snížit řád soustavy. Z třetí a čtvrté rovnice vypočteme  $\delta \mathbf{u}_e, \delta \mathbf{u}_i$  a dosadíme do zbývajících. Potom z poslední rovnice vypočteme  $\delta \mathbf{E}$  (bude se vyskytovat na obou stranách rovnice) a dosadíme do zbývajících dvou. Získáme výsledek

$$\left[ (\omega^2 - \omega_{pe}^2 - \omega_{pi}^2)(\omega^2 - c_e^2 k^2) - \omega_{pe}^2 c_e^2 k^2 \right] \delta n_e + \left[ Z \omega_{pe}^2 c_i^2 k^2 \right] \delta n_i = 0,$$

$$\left[ \frac{1}{Z} \omega_{pi}^2 c_e^2 k^2 \right] \delta n_e + \left[ (\omega^2 - \omega_{pe}^2 - \omega_{pi}^2)(\omega^2 - c_i^2 k^2) - \omega_{pi}^2 c_i^2 k^2 \right] \delta n_i = 0,$$

kde jsme pro vzniklé kombinace veličin využili běžné označení pro rychlost zvuku (u elektronů jde o formální označení, lidské ucho by zvuk nesený elektrony neslyšelo) a plazmovou frekvenci:

$$\boxed{c_e^2 \equiv \frac{\gamma_e k_B T_e}{m_e}; \quad c_i^2 \equiv \frac{\gamma_i k_B T_i}{m_i},} \quad (4.44)$$

$$\boxed{\omega_{pe}^2 \equiv \frac{n_{e0} e^2}{m_e \varepsilon_0}; \quad \omega_{pi}^2 \equiv \frac{n_{i0} Z^2 e^2}{m_i \varepsilon_0},} \quad (4.45)$$

Má-li mít vzniklá soustava nenulové řešení, musí být její determinant nulový.

$$\left[ (\omega^2 - \omega_{pe}^2 - \omega_{pi}^2)(\omega^2 - c_e^2 k^2) - \omega_{pe}^2 c_e^2 k^2 \right] \cdot \left[ (\omega^2 - \omega_{pe}^2 - \omega_{pi}^2)(\omega^2 - c_i^2 k^2) - \omega_{pi}^2 c_i^2 k^2 \right] - \omega_{pe}^2 \omega_{pi}^2 c_e^2 c_i^2 k^4 = 0,$$

Vhodným přeskupením členů získáme disperzní relaci

$$\left[ (\omega^2 - \omega_{pe}^2)(\omega^2 - \omega_{pi}^2) - \omega_{pe}^2 \omega_{pi}^2 \right]^2 \cdot \left[ (\omega^2 - \omega_{pe}^2 - c_e^2 k^2)(\omega^2 - \omega_{pi}^2 - c_i^2 k^2) - \omega_{pe}^2 \omega_{pi}^2 \right] = 0 ,$$

kteřá má dvě základní větve, první nezávisí na vlnovém vektoru (tzv. plazmové oscilace – viz kapitola 4.2.2), druhá závisí (plazmové vlny – viz kapitola 4.2.3 a iontové vlny – viz kapitola 4.2.4):

$$\boxed{\left[ (\omega^2 - \omega_{pe}^2)(\omega^2 - \omega_{pi}^2) - \omega_{pe}^2 \omega_{pi}^2 \right] = 0} , \quad (4.46)$$

$$\boxed{\left[ (\omega^2 - \omega_{pe}^2 - c_e^2 k^2)(\omega^2 - \omega_{pi}^2 - c_i^2 k^2) - \omega_{pe}^2 \omega_{pi}^2 \right] = 0} . \quad (4.47)$$

#### 4.2.2 Plazmové oscilace

Po roznásobení rovnice (4.46) získáme nenulové řešení

$$\omega^2 = \omega_{pe}^2 + \omega_{pi}^2 .$$

Kvadrát plazmové frekvence elektronů je o tři řády vyšší než iontů. Druhý člen na pravé straně představuje jen nepatrnou korekci na hmotnost iontů a většinou se vůbec neuvažuje. Upravme pravou stranu (z důvodu kvazineutality je  $n_{i0} = n_{e0}/Z$ )

$$\omega^2 = \omega_{pe}^2 + \omega_{pi}^2 = \frac{n_{e0} e^2}{m_e \epsilon_0} + \frac{n_{i0} Z^2 e^2}{m_i \epsilon_0} = \frac{n_{e0} e^2}{m_e \epsilon_0} + \frac{n_{e0} Z e^2}{m_i \epsilon_0} = \frac{n_{e0} e^2}{m_e \epsilon_0} \left( 1 + \frac{Z m_e}{m_i} \right) \Rightarrow$$

$$\boxed{\omega^2 = \omega_{pe}^2 \left( 1 + \frac{Z m_e}{m_i} \right)} . \quad (4.48)$$

Kdyby měly ionty nekonečnou hmotnost, oscilace by probíhaly přesně na plazmové frekvenci elektronů a ionty by se vůbec nepohybovaly. Můžeme si představit, že tekutina elektronů osciluje na nehybném pozadí iontů. Druhý člen v závorce je malou korekcí na konečnou hmotnost iontů. Plazmová frekvence elektronů je jednou z nejdůležitějších charakteristik plazmatu. Plazma často reaguje na vnější podněty oscilacemi nebo vlnami na plazmové frekvenci elektronů, která se pro většinu druhů plazmatu pohybuje v radiové oblasti.

#### 4.2.3 Plazmové vlny

Věnujme se nyní druhé větvi (4.47) disperzní relace. Realizujme nerovnost  $m_e \ll m_i$  limitním přechodem  $m_i \rightarrow \infty$ . Tím budeme sledovat vysokofrekvenční část vln, při kterých se ionty nestíhají pohybovat a efektivně mají nekonečnou hmotnost. Limitní přechod dává

$$\omega_{pi}^2 \rightarrow 0 ; \quad c_i^2 \rightarrow 0 .$$

Z disperzní relace (4.47) zůstane jen vztah

$$\omega^2 - \omega_{pe}^2 - c_e^2 k^2 = 0 ,$$

ze kterého plyne disperzní relace *plazmových vln*

$$\boxed{\omega^2 = \omega_{pe}^2 + c_e^2 k^2 ; \quad \text{resp.} \quad \omega = \sqrt{\omega_{pe}^2 + c_e^2 k^2} .} \quad (4.49)$$

### ■ Limita dlouhých vln $k \rightarrow 0$

Pro  $\lambda \gg \lambda_{De}$  je druhý člen v disperzní relaci zanedbatelný a jde o prosté oscilace na plazmové frekvenci elektronů

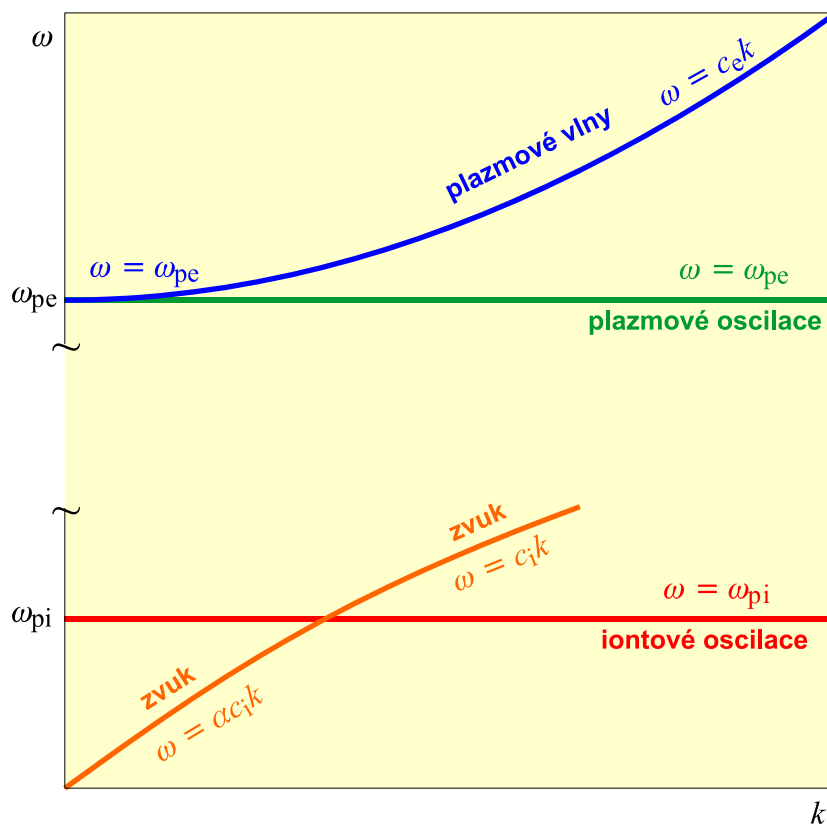
$$\omega = \omega_{pe}$$

### ■ Limita krátkých vln $k \rightarrow \infty$

Pro  $\lambda \ll \lambda_{De}$  je první člen v disperzní relaci zanedbatelný a jde o lineární závislost

$$\omega = c_e k.$$

Směrnici závislosti je „rychlost zvuku elektronů“ (přibližně tepelná rychlost elektronů). Skutečný zvuk je samozřejmě nesen těžkými částicemi (ionty a neutrály) a má mnohem nižší frekvenci.



**Poznámka 1.:** Plazmové vlny jsou nejtypičtějším vysokofrekvenčním rozvlněním plazmatu (zpravidla v oboru radiových frekvencí). Disperzní relace (4.49) připouští jen řešení

$$\omega > \omega_{pe}. \quad (4.50)$$

Při nižších frekvencích se vlna nešíří. Je to patrné jak z disperzní relace přímo, tak z přiloženého obrázku. Pro nižší frekvence než je plazmová poskytuje disperzní relace komplexní řešení a vlna je tlumená.

**Poznámka 2.:** Druhý člen v disperzní relaci (4.49) je dán tepelným pohybem elektronů. Kdyby neexistoval tepelný pohyb, vlny by se nešířily, šlo by jen o oscilace.

**Poznámka 3.:** Z disperzní relace (4.49) snadno spočteme fázovou a grupovou rychlost:

$$v_f = \frac{\omega}{k} = c_e \sqrt{1 + \frac{\omega_{pe}^2 \lambda^2}{4\pi^2 c_e^2}}; \quad v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k} = c_e / \sqrt{1 + \frac{\omega_{pe}^2 \lambda^2}{4\pi^2 c_e^2}}. \quad (4.51)$$

Snadno nahlédneme, že pro fázovou a grupovou rychlost platí vztahy:

$$v_f > c_e ; \quad v_g < c_e ; \quad v_f v_g = c_e^2 . \quad (4.52)$$

**Poznámka 4.:** V přítomnosti magnetických polí přejde vysokofrekvenční větev v složitější komplex elektromagnetických vln v plazmatu. Naopak nízkofrekvenční větev popsaná v následující kapitole přejde v přítomnosti magnetických polí v komplex magnetoakustických vln.

#### 4.2.4 Iontové vlny

Realizujme nyní nerovnost  $m_e \ll m_i$  limitním přechodem  $m_e \rightarrow 0$ . Elektronů s nulovou hmotností se stanou jakýmsi všudypřítomným záporným oblakem. Ionty mají nyní konečnou, i když velkou hmotnost. Budou oscilovat s velmi nízkými frekvencemi na pozadí elektronů. Limitní přechod znamená

$$\omega_{pe}^2 \rightarrow \infty ; \quad c_e^2 \rightarrow \infty .$$

V disperzní relaci (4.47) zůstanou podstatné členy

$$(-\omega_{pe}^2 - c_e^2 k^2)(\omega^2 - \omega_{pi}^2 - c_i^2 k^2) - \omega_{pe}^2 \omega_{pi}^2 = 0$$

Relaci snadno vyřešíme vzhledem  $\omega$ :

$$\omega^2 = \omega_{pi}^2 + c_i^2 k^2 - \frac{\omega_{pi}^2 \omega_{pe}^2}{\omega_{pe}^2 + c_e^2 k^2}$$

a po jednoduché úpravě dosatneme

$$\omega^2 = \omega_{pi}^2 \left[ 1 + c_i^2 k^2 / \omega_{pi}^2 - \frac{1}{1 + c_e^2 k^2 / \omega_{pe}^2} \right] . \quad (4.53)$$

Mezi rychlostí zvuku (4.44), plazmovou frekvencí (4.45) a Debyeovou stínící vzdáleností (2.85) platí jednoduchý vztah  $c_\alpha^2 / \omega_{p\alpha}^2 = \gamma_\alpha \lambda_{D\alpha}^2$ , pomocí kterého se disperzní relace iontových vln někdy upravuje do tvaru:

$$\omega^2 = \omega_{pi}^2 \left[ 1 + \gamma_i \lambda_{Di}^2 k^2 - \frac{1}{1 + \gamma_e \lambda_{De}^2 k^2} \right] . \quad (4.54)$$

#### ■ Limita dlouhých vln ( $k \rightarrow 0$ )

V limitě dlouhých vln upravíme disperzní relaci (4.53) takto

$$\omega^2 = \omega_{pi}^2 \left[ 1 + c_i^2 k^2 / \omega_{pi}^2 - \frac{1}{1 + c_e^2 k^2 / \omega_{pe}^2} \right] \approx \omega_{pi}^2 \left[ 1 + c_i^2 k^2 / \omega_{pi}^2 - 1 + c_e^2 k^2 / \omega_{pe}^2 \right] \Rightarrow$$

$$\omega^2 = c_i^2 k^2 \left[ 1 + \frac{\omega_{pi}^2 c_e^2}{\omega_{pe}^2 c_i^2} \right] .$$

Využijeme-li definici rychlostí zvuku (4.44), plazmové frekvencí (4.45) a kvazineutralitu  $n_{i0} = n_{e0}/Z$ , dostaneme

$$\omega^2 = c_i^2 k^2 \left( 1 + Z \frac{\gamma_e T_e}{\gamma_i T_i} \right); \quad \text{resp.} \quad \omega = c_i k \sqrt{1 + Z \frac{\gamma_e T_e}{\gamma_i T_i}}.$$

Jde o zvukové vlny šířící se rychlostí

$$c_s = c_i \sqrt{1 + Z \frac{\gamma_e T_e}{\gamma_i T_i}}.$$

#### ■ Limita krátkých vln $k \rightarrow \infty$

Z disperzní relace (4.53) zbude pro krátké vlny jediný člen

$$\omega^2 \approx c_i^2 k^2; \quad \text{resp.} \quad \omega = c_i k.$$

Jde opět o zvukové vlny šířící se rychlostí

$$c_s = c_i.$$

Nízkofrekvenční řešení jsou zvukové vlny s malou závislostí rychlosti na vlnové délce.

### 4.2.5 Další vlivy

#### ■ Pohyb prostředí

Plazmové oscilace a vlny ovlivňuje samozřejmě celá řada dalších faktorů zde neprobíraných. Pohybuje-li se prostředí, v němž je generována vlna, změní se disperzní relace (4.47) na relaci

$$\left[ (\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_0)^2 - \omega_{pe}^2 - c_e^2 k^2 \right] \cdot \left[ (\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_0)^2 - \omega_{pi}^2 - c_i^2 k^2 \right] - \omega_{pe}^2 \omega_{pi}^2 = 0,$$

kteřá v sobě přirozeným způsobem zahrnuje Dopplerův posun frekvence.

#### ■ Srážky

V plazmatu mohou probíhat srážky, které by se projevily srážkovým členem na pravé straně pohybové rovnice. Srážkový člen je úměrný rychlosti a srážkové frekvenci  $\nu$ . Vzhledem k tomu, že plazmové oscilace elektronů jsou podélné, lze učinit odhad vlivu srážek na oscilace jen v jedné dimenzi a bez nepodstatných členů (tlak, atd.):

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_e}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (n_e u_e) &= 0, \\ m_e n_e \frac{\partial u_e}{\partial t} &= -e n_e E - n_e m_e \nu u_e, \\ \frac{\partial E}{\partial t} &= \frac{1}{\epsilon_0} e n_e u_e. \end{aligned}$$

Po provedení perturbací a Fourierovy transformace získáme disperzní relaci. Bez srážkového členu má tvar (jde asi o nejrychlejší způsob jak odvodit hodnotu plazmové frekvence)

$$\omega^2 = \omega_{pe}^2; \quad \omega_{pe}^2 \equiv \frac{n_0 e^2}{m_e \epsilon_0}$$

Se srážkovým členem dostaneme z podmínky na nulovost determinantu

$$\omega^2 + i\omega\nu - \omega_{pe}^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega = -i\frac{\nu}{2} \pm \sqrt{\omega_{pe}^2 - \left(\frac{\nu}{2}\right)^2}.$$

Srážky způsobují útlum plazmových oscilací s koeficientem útlumu  $\delta = \nu/2$ .

### ■ Magnetické pole

Přítomnost magnetického pole ovlivní zásadně charakter vln. Vysokofrekvenční větev přejde v *komplex anizotropních elektromagnetických vln* (viz kapitola 4.4.) a nízkofrekvenční větev v *komplex anizotropních magnetoakustických vln*. (viz kapitola 4.3.).

## 4.3. Magnetoakustické vlny

V této kapitole si povšimneme nízkofrekvenčních vln generovaných pohybem iontů v přítomnosti magnetického pole. Samo magnetické pole vnáší do hry zcela nový prvek – anizotropii. Dalším činitelem ovlivňujícím charakter vln je samozřejmě elektrický náboj iontů a vodivost prostředí.

### 4.3.1 Odvození disperzní relace

Za výchozí sadu rovnic budeme uvažovat klasickou jednotekutinovou magnetohydrodynamiku:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) &= 0, \\ \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} &= -\nabla p - \nabla \frac{B^2}{2\mu_0} + \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B}, \\ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= \frac{1}{\sigma \mu_0} \Delta \mathbf{B} + \operatorname{rot}(\mathbf{u} \times \mathbf{B}), \\ p &= p(\rho). \end{aligned} \quad (4.55)$$

Difúzní člen v rovnici pro magnetické pole je zodpovědný za útlum magnetoakustických vln. V případě vysoce vodivého plazmatu ( $\sigma \rightarrow \infty$ ) je možné tento člen zanedbat a magnetoakustické vlny nebudou tlumené. Kdybychom tento člen v soustavě ponechali, poskytovala by disperzní relace komplexní řešení pro frekvenci a vlnový vektor a rovinná vlna by tak byla exponenciálně tlumena. Celá výchozí soustava je opět algebraicky uzavřena stavovou rovnicí.

Postupujme nyní obdobně jako v minulém případě, tj provedeme perturbace klidového řešení

$$\rho = \rho_0 + \delta\rho; \quad \mathbf{u} = \delta\mathbf{u}; \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \delta\mathbf{B}; \quad p = p_0 + \delta p. \quad (4.56)$$

Hledané řešení (4.56) dosadíme do soustavy (4.55), zanedbáme kvadráty a vyšší mocniny poruch a budeme předpokládat poruchu ve tvaru rovinné vlny. Výsledná linearizovaná algebraická soustava rovnic je:

$$\begin{aligned} -\omega \delta\rho + \rho_0 \mathbf{k} \cdot \delta\mathbf{u} &= 0, \\ \mathbf{k} \delta p - \rho_0 \omega \delta\mathbf{u} + \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{B}_0 \cdot \delta\mathbf{B}) \mathbf{k} - \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k}) \delta\mathbf{B} &= 0, \\ \mathbf{k} \times (\mathbf{B}_0 \times \delta\mathbf{u}) - \omega \delta\mathbf{B} &= 0, \\ \delta p - c_s^2 \delta\rho &= 0; \quad c_s^2 \equiv \frac{\partial p}{\partial \rho}. \end{aligned} \quad (4.57)$$



Jde o soustavu osmi rovnic (dvou skalárních a dvou vektorových) bez pravých stran. Postupnou eliminací proměnných je možné nalézt jen rovnici pro rychlost (druhá rovnice). Nejprve dosadíme za  $\delta p$  z poslední rovnice. Poté za  $\delta \rho$  z první rovnice a nakonec za  $\delta \mathbf{B}$  ze třetí rovnice (upravíme dvojný vektorový součin). Získáme tak soustavu rovnic pro perturbace rychlostního pole

$$\mathbf{M} \cdot \delta \mathbf{u} = \mathbf{0}. \quad (4.58)$$

Složky symetrické matice  $\mathbf{M}$  mají tvar

$$M_{jl} = \left[ \omega^2 - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_A)^2 \right] \delta_{jl} + (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_A) (k_j v_l^{(A)} + k_l v_j^{(A)}) - (v_A^2 + c_s^2) k_j k_l.$$

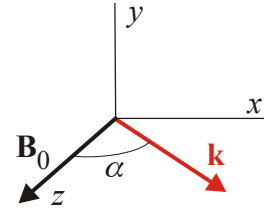
Tuto matici můžeme také zapsat v invariantním tvaru

$$\mathbf{M} = \left[ \omega^2 - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_A)^2 \right] \mathbf{1} + (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_A) [\mathbf{k} \otimes \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_A \otimes \mathbf{k}] - (v_A^2 + c_s^2) \mathbf{k} \otimes \mathbf{k}.$$

Veličina  $v_A$  se nazývá Alfvénova rychlost a je definována jako

$$\mathbf{v}_A \equiv \frac{\mathbf{B}_0}{\sqrt{\mu_0 \rho_0}}. \quad (4.59)$$

Pro dopočet disperzní relace můžeme zvolit souřadnicový systém. Osu  $z$  volme ve směru magnetického pole  $\mathbf{B}_0$  (ve směru Alfvénovy rychlosti). Kolem této osy otočíme souřadnicový systém tak, aby vlnový vektor  $\mathbf{k}$  byl v rovině  $(x, z)$ . V takto zvoleném souřadnicovém systému je  $\mathbf{B}_0 = (0, 0, B_0)$ ,  $\mathbf{v}_A = (0, 0, v_A)$  a vlnový vektor je  $\mathbf{k} = (k \sin \alpha, 0, k \cos \alpha)$ . Úhel mezi vektory  $\mathbf{B}_0$  a  $\mathbf{v}_A$  je  $\alpha$ . Pro tuto volbu má matice  $\mathbf{M}$  tvar:



$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \omega^2 - k^2 v_A^2 - c_s^2 k^2 \sin^2 \alpha & 0 & -c_s^2 k^2 \sin \alpha \cos \alpha \\ 0 & \omega^2 - k^2 v_A^2 \cos^2 \alpha & 0 \\ -c_s^2 k^2 \sin \alpha \cos \alpha & 0 & \omega^2 - c_s^2 k^2 \cos^2 \alpha \end{pmatrix}$$

Vzhledem k tomu, že hledáme nenulové řešení soustavy (4.58), musí být determinant matice  $\mathbf{M}$  nulový. Z této podmínky získáme disperzní relaci magnetoakustických vln

$$\left[ \omega^2 - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_A)^2 \right] \cdot \left[ \omega^4 - k^2 (v_A^2 + c_s^2) \omega^2 + c_s^2 k^2 (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_A)^2 \right] = 0. \quad (4.60)$$

Alfvénova rychlost míří ve směru magnetického pole  $\mathbf{B}_0$ . Již na první pohled je vidět, že magnetoakustické vlny jsou mnohem složitější než obyčejný zvuk. Bude-li výraz v první hranaté závorce nulový, získáme jeden z modů, tzv. *Alfvénovu vlnu* ( $A$ ). Bude-li nulový výraz v druhé hranaté závorce, získáme snadno řešitelnou bikvadratickou rovnici pro úhlovou frekvenci. Její řešení poskytuje další dva módy magnetoakustických vln, tzv. *pomalou vlnu* ( $S$ , Slow) a *rychlou vlnu* ( $F$ , Fast). Disperzní relace jednotlivých modů zřejmě jsou ( $\alpha$  je úhel mezi vlnovým vektorem a magnetickým polem resp. Alfvénovou rychlostí):

$$\begin{aligned} \omega^2 &= v_A^2 k^2 \cos^2 \alpha, \\ \omega^2 &= \frac{1}{2} k^2 (c_s^2 + v_A^2) - \frac{1}{2} k^2 \sqrt{(c_s^2 + v_A^2)^2 - 4c_s^2 v_A^2 \cos^2 \alpha}, \\ \omega^2 &= \frac{1}{2} k^2 (c_s^2 + v_A^2) + \frac{1}{2} k^2 \sqrt{(c_s^2 + v_A^2)^2 - 4c_s^2 v_A^2 \cos^2 \alpha}. \end{aligned} \quad (4.61)$$

Poznamenejme, že v některé literatuře se Alfvénovými vlnami nazývají všechny tři zde zavedené módy magnetoakustických vln. V klasické zvukové vlně dochází k přelévání hustoty energie mezi chaotickou (tlakovou,  $p$ ) částí energie a uspořádanou (kinetickou,  $\rho v^2/2$ ) částí energie. V magnetoakustické vlně je rovnocenným partnerem ještě hustota energie magnetického pole (magnetický tlak,  $p_m = B^2/2\mu_0$ ). Položíme-li sobě rovny hustotu kinetické energie a magnetický tlak, získáme hodnotu Alfvénovy rychlosti:

$$\frac{1}{2}\rho v^2 = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0} \quad \Rightarrow \quad v = \frac{B}{\sqrt{\mu_0\rho}} .$$

### 4.3.2 Vlnplochy magnetoakustických vln

Z disperzních relací (35) snadno určíme fázové rychlosti šíření jednotlivých módů:

$$\begin{aligned} v_{Af}^2 &= v_A^2 \cos^2 \alpha, \\ v_{Sf}^2 &= \frac{1}{2}(c_s^2 + v_A^2) - \frac{1}{2}\sqrt{(c_s^2 + v_A^2)^2 - 4c_s^2 v_A^2 \cos^2 \alpha}, \\ v_{Ff}^2 &= \frac{1}{2}(c_s^2 + v_A^2) + \frac{1}{2}\sqrt{(c_s^2 + v_A^2)^2 - 4c_s^2 v_A^2 \cos^2 \alpha}. \end{aligned} \quad (4.62)$$

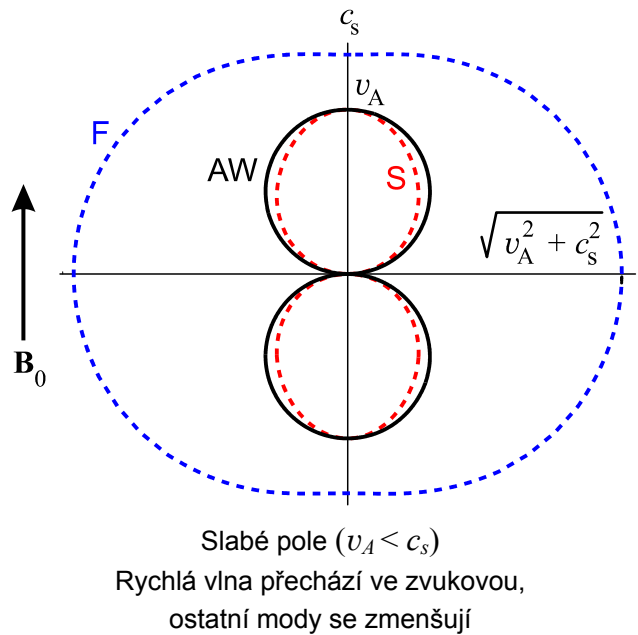
Nalezneme nyní tyto rychlosti ve směru magnetického pole  $\mathbf{B}_0$  ( $\alpha = 0$ ):

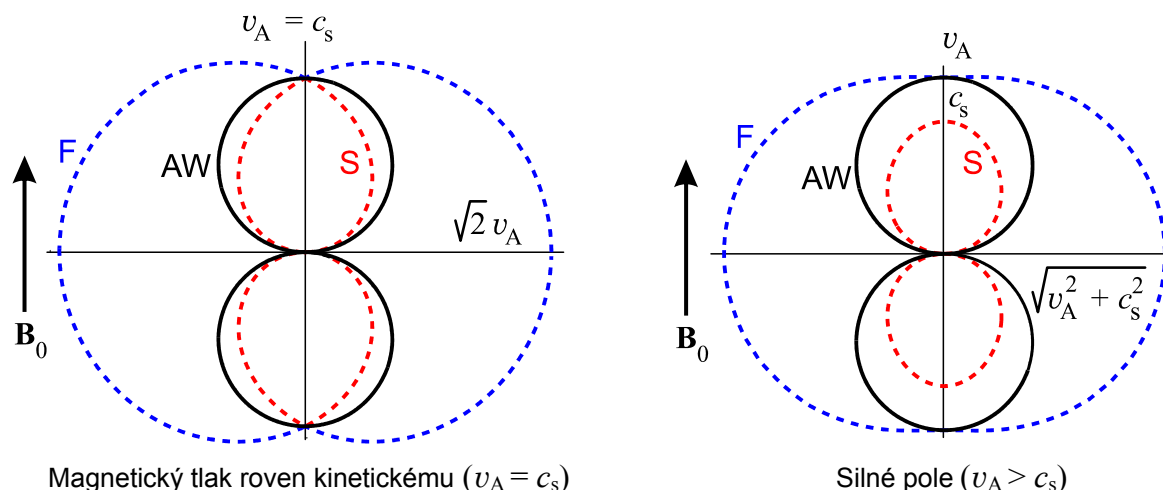
$$\alpha = 0 \Rightarrow v_{Af} = v_A, \quad v_{Sf} = \min(v_A, c_s), \quad v_{Ff} = \max(v_A, c_s). \quad (4.63)$$

Fázová rychlost Alfvénovy vlny je rovna Alfvénově rychlosti. Pomalá magnetoakustická vlna získá ve směru pole menší z obou základních rychlostí (rychlosti zvuku a Alfvénovy rychlosti) a rychlá vlna se bude šířit větší z obou rychlostí. Ve směru kolmém na původní magnetické pole ( $\alpha = \pi/2$ ) jsou rychlosti šíření:

$$\alpha = \frac{\pi}{2} \Rightarrow v_{Af} = 0, \quad v_{Sf} = 0, \quad v_{Ff} = \sqrt{v_A^2 + c_s^2}. \quad (4.64)$$

Ve směru kolmém na pole se šíří jediné rychlá magnetoakustická vlna. Situace je dobře patrná na polárním diagramu závislosti fázové rychlosti všech tří módů. Při zmenšujícím se magnetickém poli se vlnplochy Alfvénovy a pomalé magnetoakustické vlny zmenšují a vlnplocha rychlé magnetoakustické vlny se stává „obyčejnou“ zvukovou vlnoplochou. Magnetické pole vnáší do šíření zvuku anizotropii. Chování vlnoploch při různých hodnotách pole si vyzkoušejte v apltech na serveru [www.aldebaran.cz](http://www.aldebaran.cz). Tvar vlnoploch resp. polární diagram fázové rychlosti pro různé hodnoty magnetických polí si prohlédněte na obrázcích.

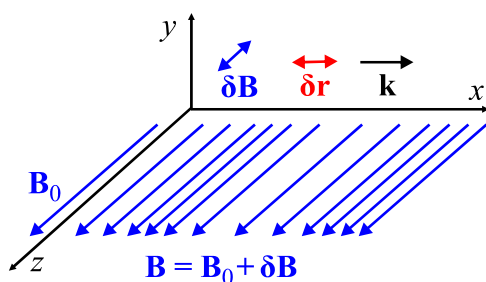
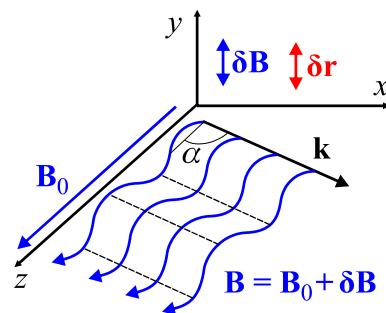




### 4.3.3 Směry vektorů v magnetoakustických vlnách

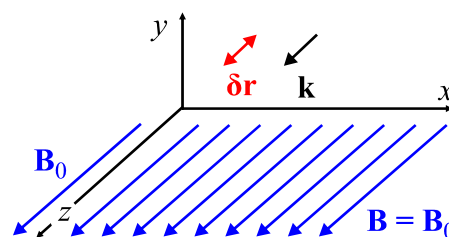
Chceme-li zkoumat směry jednotlivých poruch u konkrétního modu, musíme dosadit příslušnou disperzní relaci do původní linearizované soustavy (4.57). Volba souřadnicového systému zůstává zachována. Ze soustavy rovnic (4.57) nalezneme vzájemné směry jednotlivých vektorů. Ukazuje se, že magnetoakustické vlny jsou směsicí podélných i příčných vln. Povšimněme si nyní, z široké škály možností, tři zajímavých konfigurací.

**Alfvénova vlna.** Alfvénův mód je nejjednodušší ze tří nalezených disperzních relací. Ze soustavy rovnic (4.57) snadno určíme, že plazma kmitá napříč magnetickému poli i směru šíření a jde tedy o vlnu příčnou. Porucha magnetického pole je kolmá na původní magnetické pole. To způsobuje rozvlnění magnetických siločar podle obrázku. Je-li pole orientováno ve směru třetí osy, má disperzní relace jednoduchý tvar  $\omega = v_A k \cos \alpha = v_A k_3$  a grupová rychlost je rovna  $\mathbf{v} = (0, 0, 0, v_A)$ . Energie se v Alfvénově vlně šíří jen podél magnetického pole  $\mathbf{B}_0$  a to Alfvénovou rychlostí.



**Kompresní vlna.** V rychlé magnetoakustické vlně je při směru šíření kolmém na magnetické pole ( $\mathbf{k} \perp \mathbf{B}_0$ ) porucha pole rovnoběžná s polem původním. Tím vzniká vlna hustších a řidších oblastí magnetických siločar, kterou nazýváme kompresní vlna. Plazma kmitá podél směru šíření vln  $\mathbf{k}$  (kolmo na pole  $\mathbf{B}_0$ ). Jde proto o *podélnou vlnu*. Vlnění je velmi podobné „obyčejnému“ zvuku. Roli pružného prostředí však přebírá nejenom hydrostatický tlak  $p$ , ale i magnetický tlak  $p_m = B^2/2\mu_0$ . Rychlost vln je dána oběma vlivy a má hodnotu  $v_f = (c_s^2 + v_A^2)^{1/2}$ . Kompresní vlna se někdy nazývá *kompresní Alfvénova podélná vlna*.

**Klasická zvuková vlna.** Ve směru magnetického pole  $\mathbf{B}_0$  se buď rychlá nebo pomalá vlna šíří rychlostí zvuku  $c_s$  (podle velikosti magnetického pole). Plazma kmitá podél směru šíření a není ovlivněno přítomností magnetického pole. Porucha magnetického pole je nulová.

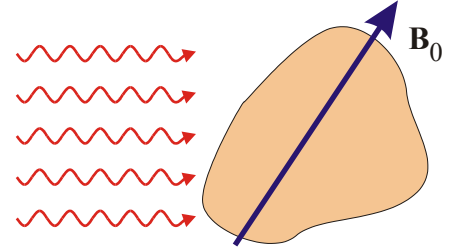


#### 4.4. Elektromagnetické vlny

Elektromagnetické vlny šířící se plazmatem interagují především s málo hmotnými elektrony. Ionty nemohou vysokofrekvenční děje sledovat. V elektromagnetické vlně bude vždy platit

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{B} = 0 & \Rightarrow \delta \mathbf{B} \perp \mathbf{k}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} & \Rightarrow \delta \mathbf{B} \perp \delta \mathbf{E}. \end{aligned} \quad (4.65)$$

Konstantní magnetické pole  $\mathbf{B}_0$  způsobuje anizotropii v šíření vln, vlny se šíří jinak podél pole  $\mathbf{B}_0$  a jinak ve směru pole  $\mathbf{B}_0$ . Podobně jako u krystalů nalezneme v plazmatu *řádnou* a *mimořádnou* vlnu, budeme-li vlny sledovat kolmo na směr pole. Tytéž vlny se ale podél pole budou jevit jako směsice *levotočivých* a *pravotočivých* módů. K projevům plazmatu patří také několik sekund trvajících nízkofrekvenčních záblesky vznikající jako doprovodné efekty blesků a šířící se podél zemského magnetického pole, tzv. *hvizdy*. Velmi zajímavá je také otázka reakce materiálu na vysokofrekvenční vlny a výpočet *permutivity plazmatu*.



##### 4.4.1 Odvození disperzní relace

Za výchozí rovnice budeme volit rovnici kontinuity pro elektrony, pohybovou rovnici pro elektrony, a Maxwellovy rovnice pro časový vývoj elektrického a magnetického pole. Časový vývoj elektrického pole (Maxwellův posuvný proud) nelze vzhledem k frekvenci dějů zanedbat. Všude uvažujeme limitu  $m_i \rightarrow \infty$ ;  $p \rightarrow 0$ , tj. pro šíření elektromagnetických vln plazmatem zanedbáváme pohyb iontů a tepelné děje v plazmatu (chladné plazma):

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_e}{\partial t} + \operatorname{div}(n_e \mathbf{u}_e) &= 0, \\ m_e n_e \frac{\partial \mathbf{u}_e}{\partial t} + m_e n_e (\mathbf{u}_e \cdot \nabla) \mathbf{u}_e &= -en_e \mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B}, \\ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= -\operatorname{rot} \mathbf{E}, \\ \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \operatorname{rot} \mathbf{B} - \frac{\mathbf{j}}{\varepsilon_0}; \quad \mathbf{j} = -en_e \mathbf{u}_e. \end{aligned} \quad (4.66)$$

Standardním postupem provedeme linearizaci

$$n_e = n_0 + \delta n_e, \quad \mathbf{u}_e = \delta \mathbf{u}_e, \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \delta \mathbf{B}, \quad \mathbf{E} = \delta \mathbf{E}. \quad (4.67)$$

a Fourierovu transformaci soustavy (4.66). Perturbace koncentrace se nikde nevyskytuje a proto je možné rovnici kontinuity vynechat. Za proudovou hustotu všude dosadíme z poslední rovnice:

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{u}_e &= -i \frac{e}{m_e \omega} \delta \mathbf{E} - i \frac{e}{m_e \omega} \delta \mathbf{u}_e \times \mathbf{B}_0, \\ \delta \mathbf{B} &= \frac{1}{\omega} \mathbf{k} \times \delta \mathbf{E}, \\ \delta \mathbf{E} &= -i \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0 \omega} \mathbf{k} \times \delta \mathbf{B} + i \frac{en_0}{\varepsilon_0 \omega} \delta \mathbf{u}_e. \end{aligned} \quad (4.68)$$

Zavedme standardní označení

$$c^2 \equiv \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0}; \quad \omega_p^2 \equiv \frac{ne^2}{m_e \varepsilon_0}; \quad \omega_c \equiv \frac{eB_0}{m_e} \quad (4.69)$$

pro rychlost světla, plazmovou frekvenci a cyklotronní frekvenci a dále zavedme jednotkový vektor ve směru magnetického pole

$$\boldsymbol{\beta} \equiv \frac{\mathbf{B}_0}{B_0}. \quad (4.70)$$

V soustavě (4.68) budeme eliminovat proměnné, z druhé rovnice dosadíme za  $\delta \mathbf{B}$  do ostatních rovnic:

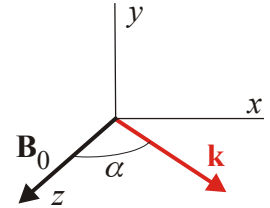
$$\begin{aligned} \delta \mathbf{u}_e &= -i \frac{e}{m_e \omega} \delta \mathbf{E} - i \frac{\omega_c}{\omega} \delta \mathbf{u}_e \times \boldsymbol{\beta}, \\ \delta \mathbf{E} &= -i \frac{c^2}{\omega^2} \mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \delta \mathbf{E}) + i \frac{en_0}{\varepsilon_0 \omega} \delta \mathbf{u}_e. \end{aligned}$$

V dalším kroku vypočteme z druhé rovnice poruchu rychlostního pole a dosadíme do rovnice první (vyjádříme dvojnásobné vektorové součiny). Získáme tak samostatnou rovnici pro poruchu elektrického pole:

$$(\omega^2 - \omega_p^2 - c^2 k^2) \delta \mathbf{E} + i \frac{\omega_c}{\omega} (\omega^2 - c^2 k^2) \delta \mathbf{E} \times \boldsymbol{\beta} + c^2 (\mathbf{k} \cdot \delta \mathbf{E}) \mathbf{k} + i \frac{\omega_c}{\omega} c^2 (\mathbf{k} \cdot \delta \mathbf{E}) \mathbf{k} \times \boldsymbol{\beta} = 0.$$

Zvolíme-li souřadnicový systém stejný jako v minulé kapitole:  $\mathbf{B}_0 = (0, 0, B_0)$ , a vlnový vektor  $\mathbf{k} = (k \sin \alpha, 0, k \cos \alpha)$ , získá rovnice pro poruchu elektrického pole jednoduchý tvar

$$\mathbf{M}_E \delta \mathbf{E} = 0 \quad (4.71)$$



s maticí  $\mathbf{M}_E$  ve tvaru

$$\mathbf{M}_E = \begin{pmatrix} \omega^2 - \omega_p^2 - c^2 k^2 \cos^2 \alpha, & i \frac{\omega_c}{\omega} (\omega^2 - c^2 k^2), & c^2 k^2 \cos \alpha \sin \alpha, \\ -i \frac{\omega_c}{\omega} (\omega^2 - c^2 k^2 \cos^2 \alpha), & \omega^2 - \omega_p^2 - c^2 k^2, & -i \frac{\omega_c}{\omega} c^2 k^2 \cos \alpha \sin \alpha, \\ c^2 k^2 \cos \alpha \sin \alpha, & 0, & \omega^2 - \omega_p^2 - c^2 k^2 \sin^2 \alpha. \end{pmatrix}.$$

Pro netriviální řešení musí být determinant této matice roven nule, což vede na disperzní relaci

$$\begin{aligned} & c^4 k^4 \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha \left[ (\omega^2 - \omega_p^2 - c^2 k^2) - \frac{\omega_c^2}{\omega^2} (\omega^2 - c^2 k^2) \right] + \\ & + (\omega^2 - \omega_p^2 - c^2 k^2 \sin^2 \alpha) \times [(\omega^2 - \omega_p^2 - c^2 k^2 \cos^2 \alpha)(\omega^2 - \omega_p^2 - c^2 k^2) - \\ & - \frac{\omega_c^2}{\omega^2} (\omega^2 - c^2 k^2)(\omega^2 - c^2 k^2 \cos^2 \alpha)] = 0. \end{aligned} \quad (4.72)$$

#### 4.4.2 Komplex elektromagnetických vln, CMA diagram

U elektromagnetických vln je velmi často důležitý index lomu daný vztahem

$$N = \frac{c}{v_f} = \frac{c}{\omega/k} = \frac{ck}{\omega}. \quad (4.73)$$

Disperzní relaci bývá proto někdy výhodné řešit vzhledem k  $ck$  resp.  $ck/\omega$ . Výsledný index lomu je potom funkcí úhlové frekvence

$$N(\omega) \equiv \frac{ck(\omega)}{\omega}. \quad (4.74)$$

Index lomu závisí samozřejmě i na koncentraci (prostřednictvím plazmové frekvence) a na magnetickém poli (peostřednictvím cyklotronní frekvence). Zajímavé jsou limitní situace, kdy index lomu je nekonečný (tzv. *rezonance*) nebo nulový (tzv. *cut-off*, mezní frekvence za kterou se vlna nešíří):

$$\text{rezonance:} \quad N \rightarrow \infty \quad (v_f \rightarrow 0); \quad (4.75)$$

$$\text{mezní frekvence:} \quad N \rightarrow 0 \quad (v_f \rightarrow \infty). \quad (4.76)$$

#### I. VLNY ŠÍŘÍCÍ SE PODÉL POLE $B_0$ ( $\alpha = 0$ )

Pro  $\alpha = 0$  z disperzní relace máme

$$(\omega^2 - \omega_p^2) \left[ (\omega^2 - \omega_p^2 - c^2 k^2)^2 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2} (\omega^2 - c^2 k^2)^2 \right] = 0. \quad (4.77)$$

Řešení vzhledem k  $\omega$  má tři základní módy. První mód získáme vynulováním levé závorky, jde o plazmové oscilace elektronů na plazmové frekvenci. Tentokrát nevyšla oprava na hmotnost iontů, protože je považujeme za nekonečně hmotné. Vynulováním pravé závorky získáme další dva módy, tzv. R a L vlny.

#### ■ R a L vlny

Disperzní relaci získáme z rovnosti

$$\left( \omega^2 - \omega_p^2 - c^2 k^2 \right)^2 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2} \left( \omega^2 - c^2 k^2 \right)^2 = 0,$$

ze které nejprve vypočteme kombinaci  $\omega^2 - c^2 k^2$  (vyskytuje se v obou závorkách). Z ní poté určíme  $c^2 k^2$

$$\boxed{c^2 k^2 = \omega^2 - \frac{\omega_p^2}{1 \pm \omega_c / \omega}} \quad (4.78)$$

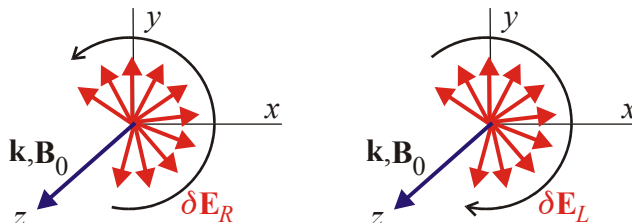
Pro index lomu máme

$$\boxed{N_{L,R}^2 = 1 - \frac{\omega_p^2 / \omega^2}{1 \pm \omega_c / \omega}} \quad (4.79)$$

Po dosazení  $c^2 k^2$  z disperzní relace (4.78) do linearizované rovnice (4.71) pro elektrické pole zjistíme, že

$$\delta E_y = \pm i \delta E_x ; \quad \delta E_z = 0 . \tag{4.80}$$

Imaginární jednotka znamená vzájemný fázový posun složek  $E_x$  a  $E_y$  o  $\pi/2$ , tj. (podobně jako u skládání dvou fázově posunutých kolmých kmitů). Jde o levotočivě a pravotočivě polarizovanou kruhovou vlnu, tzv.  $L$  vlnu (Left, horní znaménko) a  $R$  vlnu. (Right, dolní znaménko). Porucha elektrického pole je kolmá na základní magnetické pole,  $\delta \mathbf{E} \perp \mathbf{B}_0$ .



Pravotočivost a levotočivost posuzujeme podle vektoru elektrického pole při pohledu ve směru magnetického pole  $B_0$ . Určeme nyní rezonanční a mezní frekvence:

**Cyklotronní rezonance.** Situace  $N \rightarrow \infty$  nastane jen pro  $R$  vlnu při frekvenci

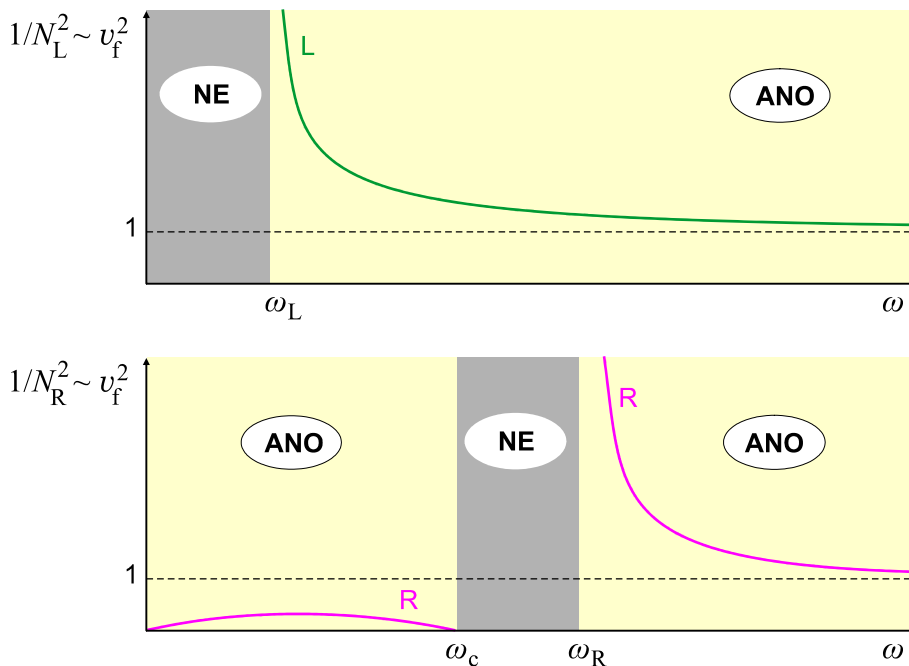
$$\omega = \omega_c . \tag{4.81}$$

Vlna absorbována na frekvenci Larmorova pohybu elektronů.  $L$  vlna rezonanci nepodléhá (točí se opačně než je přirozený pohyb elektronů kolem magnetického pole).

**Mezní frekvence (pravá a levá).** Situace  $N \rightarrow 0$  odpovídá odrazu vln, resp. hranici šíření vln a nastává pro tzv. levou a pravou mezní frekvenci:

$$\omega = \omega_{L,R} \equiv \mp \frac{1}{2} \omega_c + \frac{1}{2} \sqrt{\omega_c^2 + 4\omega_p^2} . \tag{4.82}$$

Při řešení kvadratické rovnice bylo použito před diskriminantem jen znaménko “+”, aby výsledná frekvence byla kladná. Veškeré možné kombinace jsou zastoupeny a žádné řešení se neztratí. Možnosti šíření  $R$  a  $L$  vln jsou na následujících grafech:



## II. VLNY ŠÍŘÍČÍ SE KOLMO NA POLE $\mathbf{B}_0$ ( $\alpha = \pi / 2$ )

Pro  $\alpha = \pi/2$  z disperzní relace (4.72) máme

$$(\omega^2 - \omega_p^2 - c^2 k^2) \cdot [(\omega^2 - \omega_p^2)(\omega^2 - \omega_p^2 - c^2 k^2) - \omega_c^2(\omega^2 - c^2 k^2)] = 0. \quad (4.83)$$

### ■ Řádná vlna (O)

Anulováním první závorky získáme řádnou vlnu (O vlnu – Ordinary Wave):

$$\boxed{\omega^2 = \omega_p^2 + c^2 k^2}. \quad (4.84)$$

Pro index lomu řádné vlny z této disperzní relace odvodíme

$$\boxed{N_O^2 \equiv \frac{c^2 k^2}{\omega^2} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} = 1 - \frac{n_0 e^2}{m_e \varepsilon_0 \omega^2}}. \quad (4.85)$$

Index lomu je frekvenčně závislý, různé frekvence elektromagnetické vlny se šíří různou rychlostí. Na vztahu (4.85) pro index lomu jsou založeny různé diagnostické metody pro plazma, například Schlierová fotografie, při které se zobrazují gradienty indexu lomu. V experimentální fyzice se často využívá zjednodušený vztah (platí pro  $\omega \gg \omega_p$ )

$$N_O = \sqrt{1 - \frac{n_0 e^2}{m_e \varepsilon_0 \omega^2}} \approx 1 - \frac{n_0 e^2}{2 m_e \varepsilon_0 \omega^2} \quad (4.86)$$

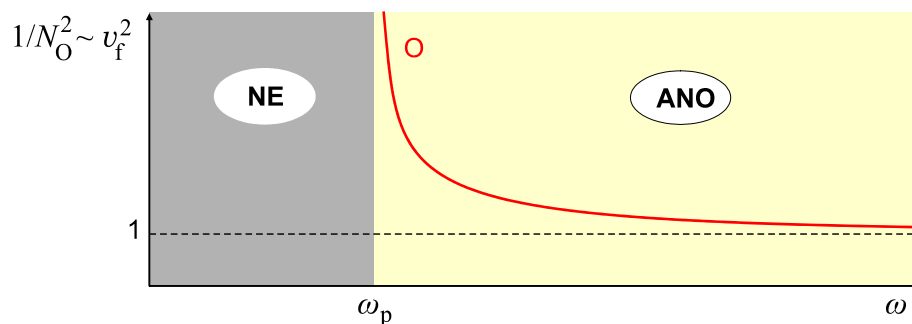
Rovnice (4.84) resp. (4.85) je základní disperzní relací pro šíření elektromagnetické vlny plazmatem. Úhlová frekvence a vlnový vektor budou reálná čísla pro  $\omega > \omega_p$ .

- 1) Šíření není ovlivněno magnetickým polem.
- 2) Řádná vlna má kmitající poruchu elektrického pole kolmou na původní magnetické pole,  $\delta \mathbf{E} \perp \mathbf{B}_0$ .
- 3) Pro frekvence vyšší než plazmová frekvence je plazma pro elektromagnetické vlny „průhledné“.

Pro  $\omega < \omega_p$  dochází k útlumu vlnění (komplexní  $k$ ,  $\omega$ ), vlna se nešíří. Dochází k rozkmitání elektronů a absorpci vlnění.

**Rezonance.** Pro řádnou vlnu nedochází k žádným rezonancím ( $N \rightarrow \infty$ ).

**Mezní frekvence (plazmová).** Mezní frekvenci ( $N \rightarrow 0$ ) je plazmová frekvence elektronů  $\omega_p$ .





### ■ Mimořádná vlna (X)

Anulováním druhé závorky v (4.83) získáme disperzní relaci mimořádné vlny (X vlny – extraordinary Wave).

$$\left( \omega^2 - \omega_p^2 \right) \left( \omega^2 - \omega_p^2 - c^2 k^2 \right) - \omega_c^2 \left( \omega^2 - c^2 k^2 \right) = 0. \quad (4.87)$$

Po vypočtení kombinace  $\omega^2 - c^2 k^2$  určíme  $c^2 k^2$  a následně index lomu mimořádné vlny:

$$N_X^2 = 1 - \frac{(\omega_p/\omega) \left[ 1 - (\omega_p/\omega)^2 \right]}{1 - (\omega_p/\omega)^2 - (\omega_c/\omega)^2}. \quad (4.88)$$

Standardní limitní situace nastávají pro

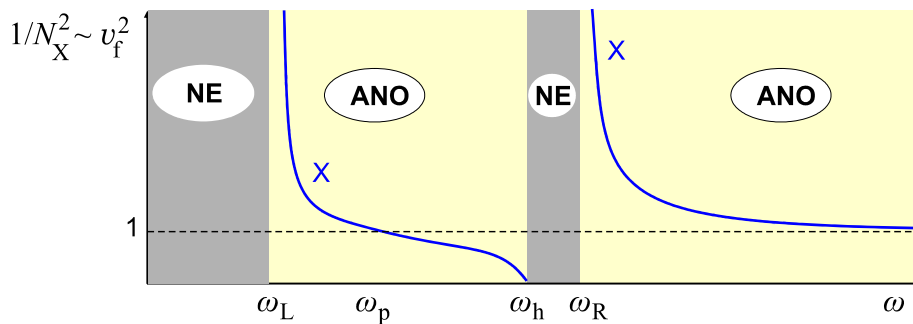
$$N \rightarrow \infty \quad (v_f \rightarrow 0) \quad \Rightarrow \quad \omega = \omega_h \equiv \sqrt{\omega_p^2 + \omega_c^2}. \quad (4.89)$$

$$N \rightarrow 0 \quad (v_f \rightarrow \infty) \quad \Rightarrow \quad \omega = \omega_{L,R} \equiv \mp \frac{1}{2} \omega_c + \frac{1}{2} \sqrt{\omega_c^2 + 4\omega_p^2}. \quad (4.90)$$

**Horní hybridní rezonance.** K rezonanci dochází pro tzv. horní hybridní frekvenci  $\omega_h$ , při které vlna nepostupuje, porucha magnetického pole je nulová a jde o čistě elektrostatické oscilace elektronů na horní hybridní frekvenci ( $v_g = 0$ ). Jde o zobecnění plazmových oscilací, které jsou vyvolány elektromagnetickou vlnou. Vratnou silou je kromě Coulombovy síly ještě Lorentzova síla (Larmorova gyrace kolem  $\mathbf{B}_0$ ), proto je frekvence vyšší než u čistých plazmových oscilací bez magnetického pole. Při nenulové teplotě elektronů se tyto oscilace začnou šířit jako vlny.

**Dolní hybridní rezonance.** Uvážíme-li možný pohyb iontů, nastává ještě jedna rezonance na tzv. dolní hybridní frekvenci  $\omega_d \equiv (\omega_{ci}\omega_{ce})^{1/2}$ . Ta ale z naší disperzní relace nevyjde, protože jsme pohyb iontů zanedbali.

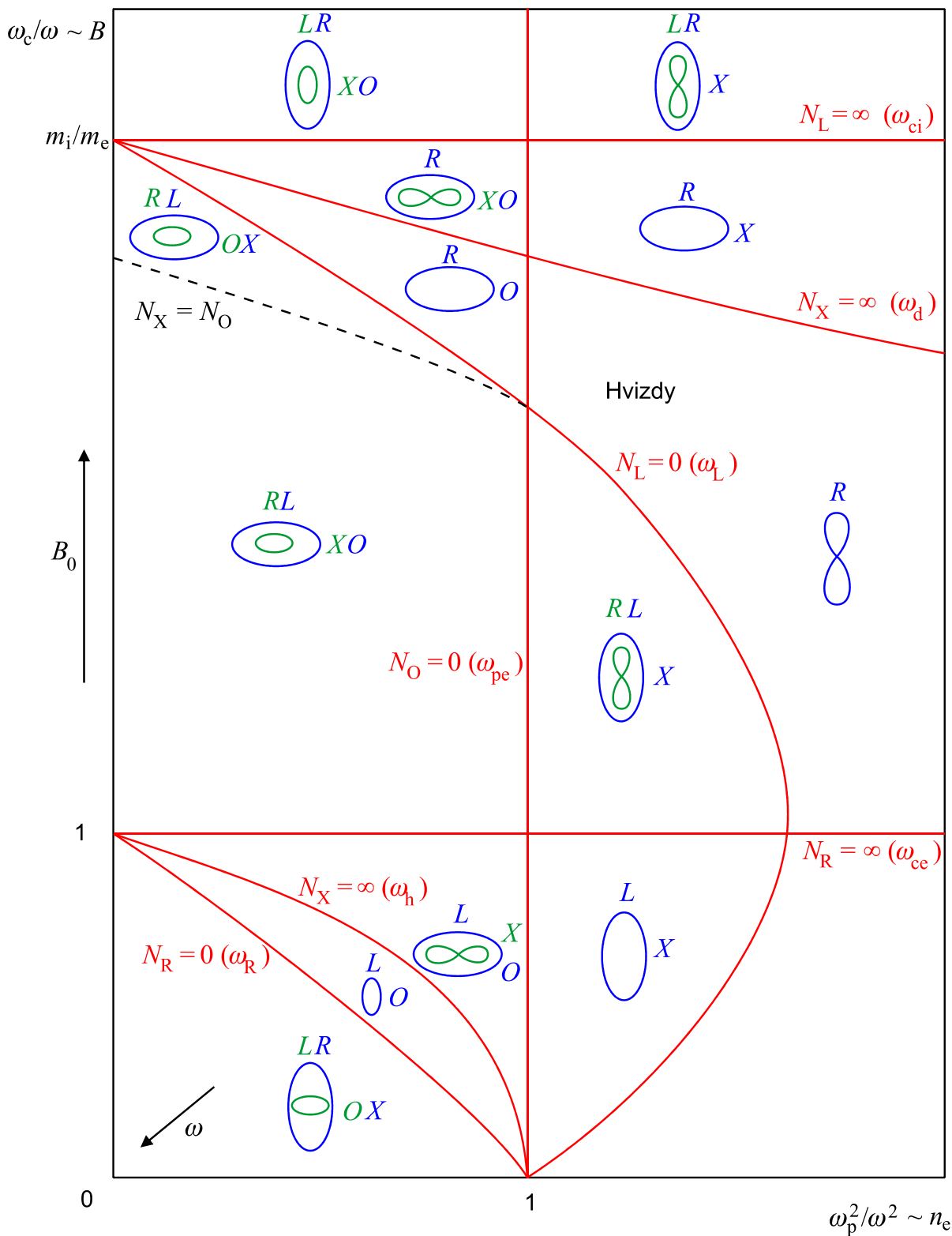
**Mezní frekvence (pravá a levá).** K odrazům dochází pro mezní pravou a levou frekvenci  $\omega_{R,L}$ . Mimořádná vlna se šíří v intervalu frekvencí  $\omega \in (\omega_L, \omega_h) \cup (\omega_R, \infty)$ .



- 1) X vlna se nešíří v oblastech  $(0, \omega_L) \cup (\omega_h, \omega_R)$ .
- 2) X vlna je dominantně ovlivněna přítomností magnetického pole  $\mathbf{B}_0$ .
- 3) Kmitající porucha elektrického pole je rovnoběžná s magnetickým polem  $\delta \mathbf{E} \parallel \mathbf{B}_0$

V případě obecného směru vlny vzhledem k magnetickému poli  $\mathbf{B}_0$  je šíření elektromagnetické vlny popsáno obecnou disperzní relací (4.72). Poznamenejme, že na rezonančních frekvencích je elektromagnetická vlna pohlcována, což vede k ohřevu plazmatu. Takový dodatečný ohřev elektromagnetickými vlnami vhodných frekvencí je využíván u tokamaků.

Tvary vlnoploch (polární diagramy fázové rychlosti) se zakreslují do tzv. CMA (Phillip C. Clemmow & R. F. Mullaly – 1955, W. P. Allis – 1959) diagramu, kde na osách je magnetické pole a koncentrace plazmatu. Vlnoplochy se skokem mění na hranicích oblastí, kde je index lomu různých typů vln ( $L, R, O, X$ ) nulový nebo nekonečný.



$N_L = \infty$	cyklotronní iontová rezonance	$\omega = \omega_{ci}$
$N_R = \infty$	cyklotronní elektronová rezonance	$\omega = \omega_{ce}$
$N_X = \infty$	horní hybridní rezonance	$\omega = \omega_h$
	dolní hybridní rezonance	$\omega = \omega_d$
$N_L = 0$	mezní frekvence $L$ vln	$\omega = \omega_L$
$N_R = 0$	mezní frekvence $R$ vln	$\omega = \omega_R$
$N_O = 0$	mezní frekvence $O$ vln	$\omega = \omega_{pe}$

#### 4.4.3 Stixovy koeficienty

Obecná disperzní relace  $\Phi(\omega, \mathbf{k}) = 0$  se buď řeší vzhledem k frekvenci  $\omega$ , nebo vzhledem k vlnovému vektoru  $\mathbf{k}$ . Někdy je také užitečné z disperzní relace vypočítat index lomu  $N \equiv ck/\omega$ . Výhody jsou zjevné: index lomu je bezrozměrné číslo a disperzní relace v tomto tvaru nezávisí na volbě jednotek; rezonanční a mezní frekvence lze snadno najít jako limity  $N \rightarrow \infty$ , resp.  $N \rightarrow 0$ . V literatuře se pro kvadráty indexů lomu používá často označení

$$\begin{aligned}
 R \equiv N_R^2 &= 1 - \frac{\omega_p^2/\omega^2}{1 - \omega_c/\omega}; & L \equiv N_L^2 &= 1 - \frac{\omega_p^2/\omega^2}{1 + \omega_c/\omega}; \\
 P \equiv N_O^2 &= 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}; & X \equiv N_X^2 &= \frac{N_R^2 N_L^2}{(N_R^2 + N_L^2)/2}.
 \end{aligned}
 \tag{4.91}$$

Pro více tekutin se sčítá přes všechny komponenty plazmatu

$$\begin{aligned}
 N_R^2 &= 1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2/\omega^2}{1 - \omega_{c\alpha}/\omega}; \\
 N_L^2 &= 1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2/\omega^2}{1 + \omega_{c\alpha}/\omega}; \\
 N_O^2 &= 1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega^2}.
 \end{aligned}
 \tag{4.92}$$

Je také výhodné zavést symetrickou a antisymetrickou část kvadrátů indexů  $N_R$  a  $N_L$ :

$$\boxed{S \equiv \frac{1}{2}(R + L); \quad D \equiv \frac{1}{2}(R - L)}.
 \tag{4.93}$$

Veličinu  $X$  lze pak jednoduše zapsat

$$\boxed{X = RL/S}.
 \tag{4.94}$$

Koeficienty  $S$ ,  $D$ ,  $P$  a  $X$  se nazývají Stixovy koeficienty. Jsou pojmenované podle amerického plazmového fyzika Thomase Howarda Stixe (1924–2001), který je zavedl v roce 1962. Na grafech disperzních relací z předchozí kapitoly je na svislé ose vždy převrácená hodnota příslušného Stixova koeficientu, která je úměrná kvadrátu fázové rychlosti.

#### 4.4.4 Faradayova rotace

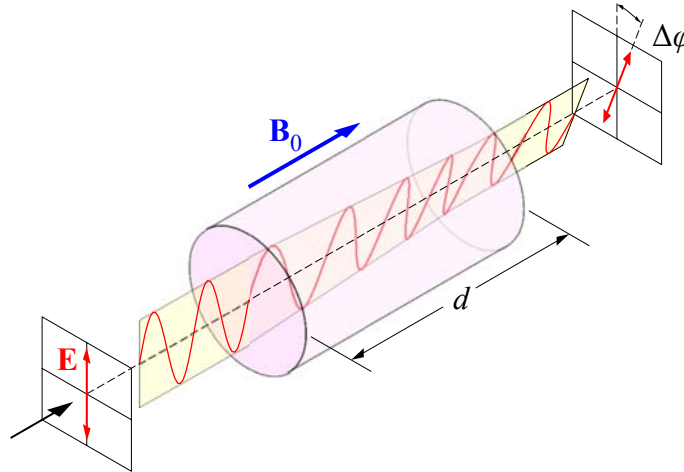
Uvažujme lineárně polarizovanou vlnu šířící se chladným plazmatem ve směru magnetického pole. Lineárně polarizovanou vlnu můžeme vytvořit složením pravotočivé a levotočivé vlny se stejnou amplitudou. V geometrii používané v této kapitole (magnetické pole míří v ose  $z$ ) pro kruhově polarizované vlny máme:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_L &= E_0 e^{i(k_L z - \omega t)} (\mathbf{e}_x + i \mathbf{e}_y); \\ \mathbf{E}_R &= E_0 e^{i(k_R z - \omega t)} (\mathbf{e}_x - i \mathbf{e}_y).\end{aligned}\quad (4.95)$$

Složku  $E_y$  jsme zapsali ve shodě se vztahem (4.80). Nyní budeme zkoumat pohyb lineárně polarizované vlny ve směru pole. Každou lineárně polarizovanou vlnu můžeme zapsat jako superpozici kruhově polarizovaných vln:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_L + \mathbf{E}_R = E_0 e^{-i\omega t} \left[ e^{ik_L z} (\mathbf{e}_x + i \mathbf{e}_y) + e^{ik_R z} (\mathbf{e}_x - i \mathbf{e}_y) \right]. \quad (4.96)$$

Pokud by oba vlnové vektory  $k_L$ ,  $k_R$  byly stejné,  $y$ -ové složky se vyruší a zůstane lineárně polarizovaná vlna v rovině  $(zx)$ . V plazmatu se ovšem vlnový vektor levotočivé a pravotočivé vlny nepatrně liší, což vede ke stáčení polarizace elektromagnetické vlny. Tento jev se nazývá Faradayova rotace a byl objeven Michaelem Faradayem (1791–1867) v roce 1845.



Pro vlnové vektory podle (4.78) máme

$$k_{L,R} = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2 / \omega^2}{1 \pm \omega_c / \omega}}.$$

V limitě vysokých frekvencí  $\omega \gg \omega_c, \omega_p$  lze psát

$$k_{L,R} \approx k_{L,R} = \frac{\omega}{c} \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{\omega_p^2 / \omega^2}{(1 \pm \omega_c / \omega)} \right) \approx \frac{\omega}{c} \left( 1 - \frac{\omega_p^2}{2\omega^2} \mp \frac{\omega_p^2 \omega_c}{2\omega^3} \right),$$

neboli

$$k_{L,R} \approx k \mp \Delta k; \quad k \equiv \frac{\omega}{c} \left( 1 - \frac{\omega_p^2}{2\omega^2} \right); \quad \Delta k \equiv \frac{k_R - k_L}{2} = \frac{1}{2} \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \frac{\omega_c}{c}. \quad (4.97)$$

Po dosazení (4.97) do (4.96) máme

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_L + \mathbf{E}_R = E_0 e^{i(kz - \omega t)} \left[ e^{-i\Delta k z} (\mathbf{e}_x + i \mathbf{e}_y) + e^{+i\Delta k z} (\mathbf{e}_x - i \mathbf{e}_y) \right],$$

neboli

$$\mathbf{E} = 2E_0 e^{i(kz - \omega t)} \left[ \cos(\Delta k z) \mathbf{e}_x + \sin(\Delta k z) \mathbf{e}_y \right].$$

Je zřejmé, že odlišnost obou vektorů bude způsobovat stočení polarizační roviny na vzdálenosti  $dz$

$$\frac{d\varphi}{dz} = \Delta k.$$

Po integraci máme pro stočení na celkové vzdálenosti  $d$

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{e^3}{2\varepsilon_0 c m_e^2} \frac{1}{\omega^2} \int_0^d n_e(z) B_0(z) dz. \quad (4.98)$$

Pro konstantní koncentraci  $i$  pole máme jednoduchý vztah

$$\Delta\varphi = \frac{e^3}{2\varepsilon_0 c m_e^2} \frac{1}{\omega^2} n_e B_0 d. \quad (4.99)$$

V astronomii jsou typickým zdrojem radiových emisí vysoce polarizovaného světla pulzary objevené v roce 1967. Z měření změny úhlu polarizace pulzaru se známou frekvencí lze určit integrál ze součinu koncentrace elektronů a podélného galaktického magnetického pole podél úsečky spojující pulzar a Zemi.

Obdobný jev také probíhá v průhledných dielektrikách (včetně kapalných) v silném magnetickém poli. V diamagnetickém materiálu platí experimentální vztah

$$\Delta\varphi = \mathcal{V} B_0 d, \quad (4.100)$$

kde  $\mathcal{V}$  je tzv. Verdetova konstanta, jejíž hodnota závisí na konkrétním materiálu. Kladná hodnota znamená stáčení proti směru hodinových ručiček (při pohledu podél magnetického pole), záporná ve směru hodinových ručiček. Krystaly terbium galiového granátu (TGG) využívaného jako optický izolátor mají Verdetovu konstantu až  $\mathcal{V} \sim -40 \text{ rad T}^{-1} \text{ m}^{-1}$ .

#### 4.4.5 Hvizdy (whistlers)

Hvizdy vznikají jako doprovodné efekty blesků v dolních vrstvách atmosféry. Jde o elektromagnetické vlny s frekvencemi v rozsahu 300 Hz až 30 kHz, jejichž energie se šíří přibližně ve směru silokřivek zemského magnetického pole. Hvizdy byly objeveny Barkhausenem v roce 1919. Jde o modifikaci R vln s nenulovým úhlem mezi směrem magnetického pole Země a šířením. Disperzní relace hvizdů je obdobná relaci R vln:

$$\omega^2 = c^2 k^2 + \frac{\omega_p^2}{1 - \frac{\omega_c}{\omega} \cos \alpha}. \quad (4.101)$$

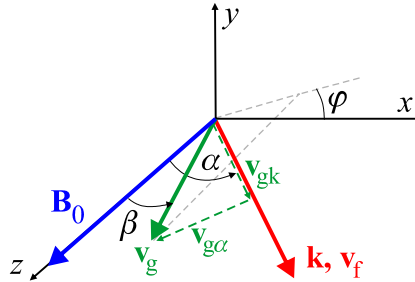
Pro většinu hvizdů je frekvence vln podstatně nižší než cyklotronní frekvence ( $\omega \ll \omega_c$ ) a lze použít jednodušší aproximaci (zanedbáme jednotku ve jmenovateli):

$$\omega^2 = c^2 k^2 - \frac{\omega_p^2 \omega}{\omega_c \cos \alpha}. \quad (4.102)$$

Pro velmi nízké frekvence lze zanedbat i kvadrát frekvence na levé straně a získat ještě jednodušší aproximaci pro nízkofrekvenční hvizdy:

$$\omega(k, \alpha) \cong \frac{c^2 k^2}{\omega_p^2} \omega_c \cos \alpha . \quad (4.103)$$

Určeme nyní fázovou a grupovou rychlost včetně jejich směrů (úhel  $\alpha$  je odklon  $\mathbf{k}$  vektoru od magnetického pole, úhel  $\beta$  odklon grupové rychlosti od magnetického pole):



Pro fázovou rychlost máme

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_f &= v_f \mathbf{e}_k ; \\ v_f &\cong \frac{\omega}{k} = \frac{c^2 k}{\omega_p^2} \omega_c \cos \alpha . \end{aligned} \quad (4.104)$$

Složky grupové rychlosti určíme ze vztahu pro sférický gradient v  $\mathbf{k}$  prostoru

$$\mathbf{v}_g = \frac{\partial \omega}{\partial k} \mathbf{e}_k + \frac{1}{k} \frac{\partial \omega}{\partial \alpha} \mathbf{e}_\alpha + \frac{1}{k \sin \alpha} \frac{\partial \omega}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi . \quad (4.105)$$

Po derivování máme pro jednotlivé složky

$$\begin{aligned} v_{gk} &= 2 \frac{c^2 k}{\omega_p^2} \omega_c \cos \alpha , \\ v_{g\alpha} &= -\frac{c^2 k}{\omega_p^2} \omega_c \sin \alpha , \\ v_{g\varphi} &= 0 . \end{aligned} \quad (4.106)$$

I z rozkladu na obrázku je patrné, že složka  $\alpha$  míří proti směru rostoucího úhlu  $\alpha$  a je záporná. Pro odklon grupové rychlosti od fázové je z obrázku zřejmé, že platí

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = -\frac{v_{g\alpha}}{v_{gk}} .$$

Po dosazení z (4.106) máme

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha .$$

Z této rovnice určíme úhel  $\beta$  odklonu grupové rychlosti od magnetického pole

$$\begin{aligned} 2 \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha - \beta)} &= \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad \Rightarrow . \\ 2 \frac{\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta} &= \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\beta = \arctan\left(\frac{\sin \alpha \cos \alpha}{1 + \cos^2 \alpha}\right) = \arctan\left(\frac{\sin 2\alpha}{3 + \cos 2\alpha}\right).$$

Najdeme nyní maximální hodnotu  $\beta$  (stačí položit derivaci argumentu podle  $\alpha$  rovnou nule, vyjde  $\cos 2\alpha = -1/3$ ,  $\sin 2\alpha = (8/9)^{1/2}$ )

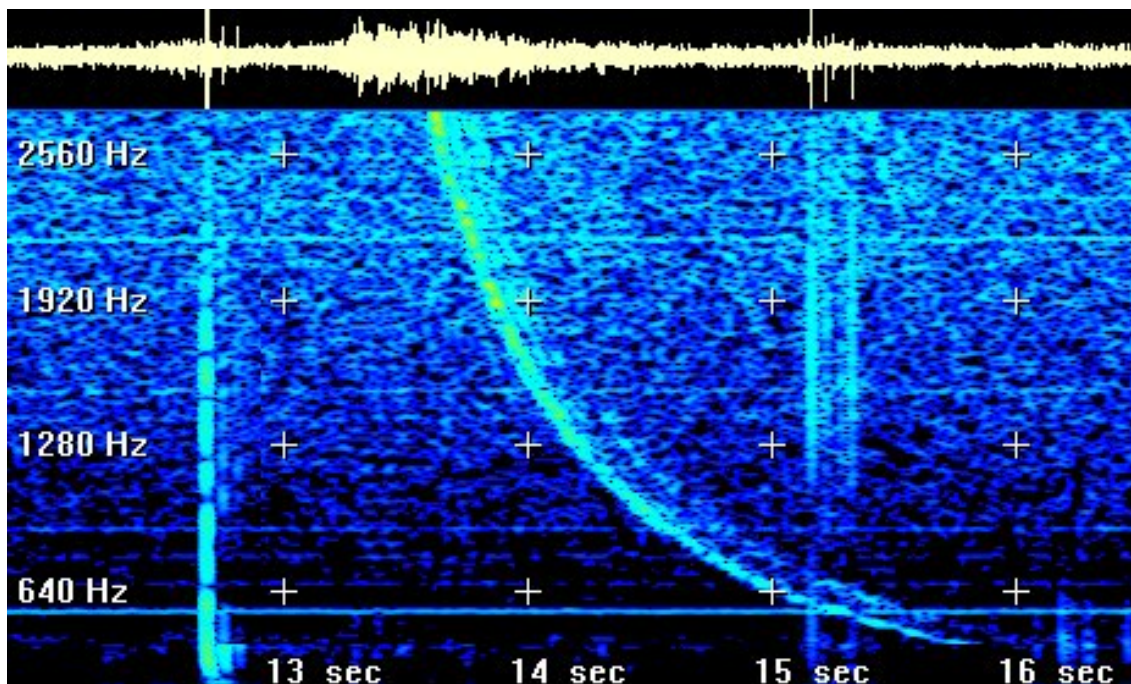
$$\beta_{\max} = \arctg\left[2^{-3/2}\right] = 19^\circ 29' . \quad (4.107)$$

Maximální odklon šíření energie nízkofrekvenčních hvizdů od směru magnetického pole Země je  $19^\circ 29'$ . Směr šíření vln je při tomto největším odklonu  $\alpha = 54^\circ 44'$  ( $2\alpha = 109^\circ 28'$ ).

Nalezneme nyní rychlost šíření energie v závislosti na frekvenci. Do vztahů (4.106) dosadíme za vlnový vektor z disperzní relace(4.103):

$$v_{gk} = \frac{2c}{\omega_p} \sqrt{\omega_c \cos \alpha} \omega^{1/2}; \quad v_{g\alpha} = -\frac{c}{\omega_p} \sqrt{\frac{\omega_c}{\cos \alpha}} \sin^2 \alpha \omega^{1/2}. \quad (4.108)$$

Obě složky jsou úměrné  $\sqrt{\omega}$ . Vzhledem k malému úhlu šíření je  $v_{g\alpha} \ll v_{gk}$ . Hvizd se od místa úderu blesku šíří podél magnetické silokřivky zemského pole. Vyšší frekvence se šíří vyšší rychlostí a proto k pozorovateli dolétnou dříve. Hvizd trvá řádově sekundy a postupně k místu pozorování přicházejí nižší a nižší frekvence. Vzhledem k nízké frekvenci je možné zaznamenané změny elektrického pole přivést na reproduktor a slyšet jako zvukovou nahrávku. Hvizdy se podél silokřivek zemského pole šíří od pólu k pólu a několikrát se i odrazí. Za bouřkové činnosti jsou pravděpodobně zodpovědné za urychlení elektronů na relativistické rychlosti.



Typický hvizd s postupně se snižující frekvencí. NASA, 2001.



#### 4.4.6 Tenzor permitivity pro elektromagnetické vlny v plazmatu

Při vysokých frekvencích a v přítomnosti magnetického pole se plazma chová zcela jinak než běžné vodivé prostředí. Proto určíme tenzor permitivity pro náš případ chladného elektronového plazmatu s polem  $\mathbf{B}_0$ . Určíme nyní indukci elektrického pole v plazmatu reagujícím na vysokofrekvenční vlnu:

$$\delta\mathbf{D} = \varepsilon_0\delta\mathbf{E} + \delta\mathbf{P} = \varepsilon_0\delta\mathbf{E} - en_e\delta\mathbf{x}_e = \varepsilon_0\delta\mathbf{E} + \frac{en_e}{i\omega}\delta\mathbf{u}_e. \quad (4.109)$$

K převodu poloh na rychlostní pole jsme využili integraci příslušné rovinné Fourierovy komponenty. Perturbaci rychlostního pole musíme určit z pohybové rovnice pro elektrony, nejlépe v perturbovaném tvaru po Fourierově transformaci (4.68):

$$\delta\mathbf{u}_e = -i\frac{e}{m_e\omega}\delta\mathbf{E} - i\frac{e}{m_e\omega}\delta\mathbf{u}_e \times \mathbf{B}_0.$$

Rovnici zapíšeme ve složkách a vypočteme poruchu rychlostního pole elektronů:

$$\begin{aligned} \delta u_k &= -\frac{ie}{m_e\omega}\delta E_k - \frac{ie}{m_e\omega}\varepsilon_{klm}\delta u_l B_{0m} \Rightarrow \\ \left(\delta_{kl} + i\frac{\omega_c}{\omega}\varepsilon_{klm}\beta_m\right)\delta u_l &= -\frac{ie}{m_e\omega}\delta E_k. \end{aligned}$$

Rovnice pro rychlost má jednoduchý maticový tvar

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\delta\mathbf{u} &= -\frac{ie}{m_e\omega}\delta\mathbf{E}; \\ \mathbf{M} &\equiv \begin{pmatrix} 1 & i\omega_c/\omega & 0 \\ -i\omega_c/\omega & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.110)$$

K určení poruchy rychlostního pole postačí najít inverzní matici k matici  $\mathbf{M}$ . Porucha indukce elektrického pole potom podle (4.109) bude

$$\delta\mathbf{D} = \varepsilon_0\delta\mathbf{E} + \frac{en_e}{i\omega}\delta\mathbf{u}_e = \varepsilon_0\delta\mathbf{E} + \frac{en_e}{i\omega}\left(-\frac{ie}{m_e\omega}\mathbf{M}^{-1}\delta\mathbf{E}\right) = \varepsilon_0\left(\mathbf{1} - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\mathbf{M}^{-1}\right)\delta\mathbf{E}.$$

Hledaný tenzor permitivity proto je

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} = \varepsilon_0\left(\mathbf{1} - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\mathbf{M}^{-1}\right); \quad (4.111)$$

Posledním krokem tedy bude určení inverzní matice k matici  $\mathbf{M}$ . Můžeme použít jakoukoli standardní metodu (Gaussovu eliminaci, výpočet přes subdeterminanty). V tomto textu využijeme metodu spektrálního rozvoje využívanou v kvantové teorii (viz [2]). Určíme vlastní čísla, vlastní vektory a příslušné projekční operátory matice  $\mathbf{M}$ , tedy nejprve vyřešíme úlohu

$$\mathbf{M}|n\rangle = \lambda_n|n\rangle,$$

která má tři řešení:



$$\begin{aligned} \lambda_1 = 1, \quad |1\rangle &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \\ \lambda_2 = 1 - \frac{\omega_c}{\omega}, \quad |2\rangle &= \begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P}_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i & 0 \\ i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \\ \lambda_3 = 1 + \frac{\omega_c}{\omega}, \quad |3\rangle &= \begin{pmatrix} +i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P}_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ -i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Pro inverzní matici platí

$$\mathbf{M}^{-1} = \frac{1}{\lambda_1} \mathbf{P}_1 + \frac{1}{\lambda_2} \mathbf{P}_2 + \frac{1}{\lambda_3} \mathbf{P}_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{1 - \omega_c/\omega} + \frac{1}{1 + \omega_c/\omega}; & \frac{i}{1 + \omega_c/\omega} - \frac{i}{1 - \omega_c/\omega}; & 0; \\ \frac{i}{1 - \omega_c/\omega} - \frac{i}{1 + \omega_c/\omega}; & \frac{1}{1 - \omega_c/\omega} + \frac{1}{1 + \omega_c/\omega}; & 0; \\ 0; & 0; & 2. \end{pmatrix}$$

Po dosazení do (4.111) získáme výsledný tenzor permitivity

$$\vec{\epsilon} = \epsilon_0 \begin{pmatrix} S & -iD & 0 \\ iD & S & 0 \\ 0 & 0 & P \end{pmatrix}. \quad (4.112)$$

Tenzor permitivity je zjevně anizotropní, má nediagonální prvky a prvek na diagonále odpovídající směru magnetického pole ( $P$ ) je jiný než ve zbývajících směrech ( $S$ ). Tenzor permitivity je navíc komplexní.

## 5. NĚKTERÉ NESTABILITY V PLAZMATU

### 5.1 Neomezené chladné plazma

#### 5.1.1 Základní pojmy

Ve většině případů získáme disperzní relaci v implicitním tvaru

$$\phi(\omega, \mathbf{k}) = 0 \quad (5.1)$$

a zajímá nás, kdy je řešení  $\omega(\mathbf{k})$  nebo  $\mathbf{k}(\omega)$  komplexní, neboť komplexní úhlová frekvence či vlnový vektor znamenají, že kmitavá exponenciála  $\exp[i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)]$  se stane rostoucí nebo tlumenou exponenciálou v čase nebo v některé prostorové proměnné.

#### ■ Řešení v $\omega$ (vývoj v čase)

Předpokládejme, že je vlnový vektor reálný a že jsme disperzní relaci vyřešili vzhledem k úhlové frekvenci  $\omega$ :

$$\omega = \omega(\mathbf{k}); \quad \text{resp.} \quad \omega = \omega_1(\mathbf{k}) + i\omega_2(\mathbf{k}). \quad (5.2)$$

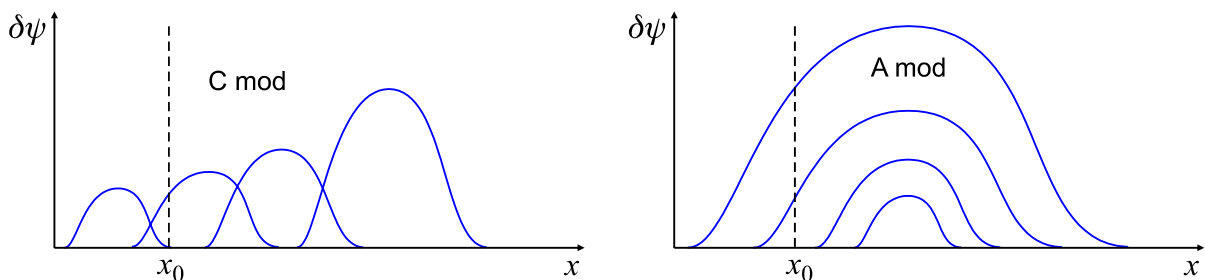
Řešení v čase může podle znaménka  $\omega_2$  rostoucí nebo tlumené. V rostoucím případě můžeme zavést *koeficient nárůstu nestability* typu  $\exp[\gamma t]$  vztahem

$$\gamma \equiv \omega_2 = \text{Im}(\omega). \quad (5.3)$$

Vzhledem k vývoji v čase rozlišujeme dva módy nestabilit:

**C nestabilní mód (konventivní mód):** V kterémkoli fixním bodě bude po určité době amplituda poruchy s časem klesat. Nestabilita „odtekla“ do jiného místa.

**A nestabilní mód (absolutně nestabilní mód):** V kterémkoli fixním bodě bude amplituda poruchy narůstat.



Rozdělení na A mód a C mód může (ale nemusí) záviset na volbě souřadnicového systému. Nacházíme-li se například u C módu v souřadnicové soustavě spojené s pohybující se poruchou, bude se pozorovateli jevit jako A mód.

#### ■ Řešení v $\mathbf{k}$ (vývoj v prostoru)

Předpokládejme, že je úhlová frekvence je reálná a že jsme disperzní relaci vyřešili vzhledem k vlnovému vektoru  $\mathbf{k}$ :

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}(\omega); \quad \text{resp.} \quad \mathbf{k} = \mathbf{k}_1(\omega) + i\mathbf{k}_2(\omega) \quad (5.4)$$

Řešení poruchy může v některém směru od zdroje exponenciálně klesající – potom hovoříme o **evanescentním módu**, nebo rostoucí – potom hovoříme o **zesilujícím módu**.

### ■ Nesvázané módy disperzní relace

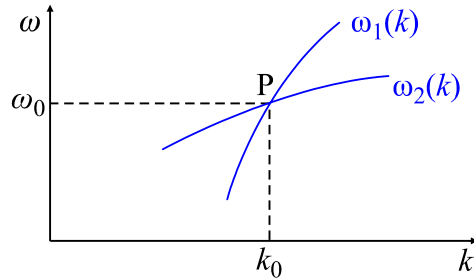
Někdy je možné disperzní relaci rozložit na jednotlivé módy

$$[\omega - \omega_1(\mathbf{k})] \cdot [\omega - \omega_2(\mathbf{k})] \cdots [\omega - \omega_N(\mathbf{k})] = 0. \quad (5.5)$$

Každá z hranatých závorek může být vynulována zvlášť a přispěje jednou větví k celkové disperzní relaci. Předpokládejme pro jednoduchost jen existenci dvou větví v jediné prostorové dimenzi

$$[\omega - \omega_1(k)] \cdot [\omega - \omega_2(k)] = 0, \quad (5.6)$$

které se protínají v bodě  $P = (\omega_0, k_0)$ :



V okolí místa křížení můžeme oba módy nahradit přímkovou závislostí

$$\begin{aligned} \omega_1(k) &\cong \omega_0 + \frac{\partial \omega_1}{\partial k}(k - k_0) = \omega_0 + v_1(k - k_0); \\ \omega_2(k) &\cong \omega_0 + \frac{\partial \omega_2}{\partial k}(k - k_0) = \omega_0 + v_2(k - k_0), \end{aligned} \quad (5.7)$$

kde  $v_1, v_2$  jsou grupové rychlosti obou větví disperzní relace.

### ■ Svázané módy disperzní relace

Pokud se v plazmatu objeví dvě vlny se stejnou vlnovou délkou a frekvencí (obecně způsobené různými mechanismy), budou se samozřejmě vzájemně ovlivňovat a energie jednoho módu bude pumpována do druhého a naopak. Nejjednodušší způsob, jak oba módy provázat je zavést nenulovou konstantu na pravé straně disperzní relace (5.6):

$$[\omega - \omega_1(k)] \cdot [\omega - \omega_2(k)] = \varepsilon. \quad (5.8)$$

Pro malé  $\varepsilon$  v porovnání s členy na levé straně hovoříme o tzv. *slabé vazbě*. Konstantu  $\varepsilon$  nazýváme *vazbovou konstantou*. Ukažme, že její nenulová hodnota zcela změní portrét křížení obou větví disperzní relace. Využijme v rovnici (5.8) lineární aproximace (5.7):

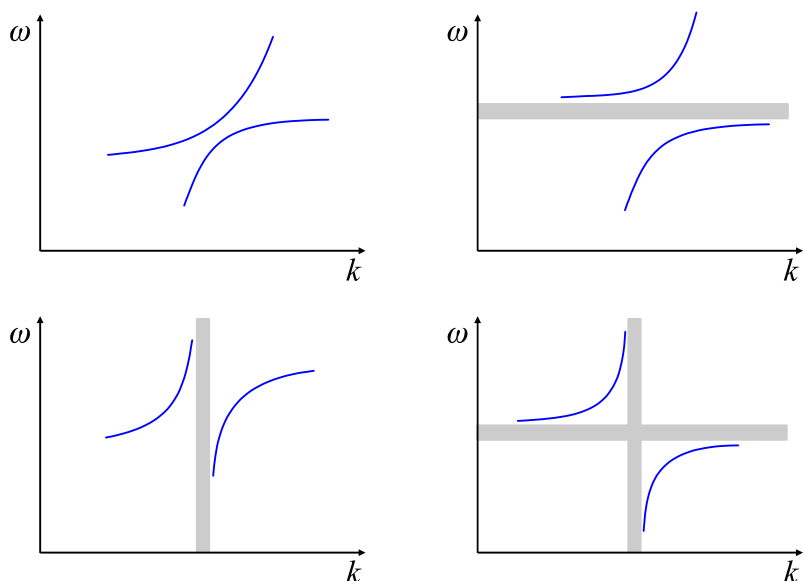
$$[\omega - \omega_0 - v_1(k - k_0)] \cdot [\omega - \omega_0 + v_2(k - k_0)] = \varepsilon.$$

Díky vazebné konstantě již nemůžeme každý z modů položit roven nule, konstantou jsou vzájemně svázané. V lineární aproximaci je poslední rovnice kvadratickou rovnicí jak pro  $\omega$ , tak pro  $k$ . Vyřešme rovnici v obou proměnných. Pro  $\omega$  najdeme kombinaci  $\xi \equiv \omega - \omega_0$ , v diskriminantu využijeme, že  $(v_1 + v_2)^2 - 4v_1v_2 = (v_1 - v_2)^2$ . Analogicky postupujeme pro vlnový vektor. Oba výsledky jsou:

$$\omega = \omega_0 + \frac{1}{2}(v_1 + v_2)(k - k_0) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(v_1 - v_2)^2(k - k_0)^2 + 4\varepsilon}; \quad (5.9)$$

$$k = k_0 + \frac{1}{2v_1v_2}(v_1 + v_2)(\omega - \omega_0) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(v_1 - v_2)^2(\omega - \omega_0)^2 + 4\varepsilon v_1v_2}. \quad (5.10)$$

Je zřejmé, že již nebude docházet ke křížení módů a pro některá znaménka veličin  $\varepsilon$  a  $v_1 v_2$  nebudou existovat reálná řešení pro úhlovou frekvenci nebo pro vlnový vektor. Celkem mohou nastat čtyři případy znázorněné na obrázku. Oblasti neexistujících reálných řešení jsou označeny šedými pásmy.



### 5.1.2 Vícesvazková nestabilita

Uvažujme plazma složené z různě se pohybujících tekutin několika druhů  $\alpha$ . Při odvození disperzní relace využijeme následujících předpokladů:

- Plazma je neomezené.* V plazmatu nejsou žádné hranice. Na nich by se řešení muselo navazovat a takovou situaci se budeme zabývat v příští kapitole.
- Plazma je chladné.* V pohybové rovnici nebudeme uvažovat gradient tlaku. Tento předpoklad zjednoduší výpočet a umožní zjistit podmínky nástupu nestability. Při jejím následném rozvoji dochází k termalizaci plazmatu a předpoklad již neplatí. K popisu horkého plazmatu je nejvhodnější využít statistických metod, viz 6.4.
- Nestabilita je řízena elektrickým polem.* Zanedbáváme magnetické pole, což z rovnice  $\text{rot } \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$  vede na  $\mathbf{k} \times \mathbf{E} = 0$ , tedy poruchy jsou způsobené podélným elektrickým polem. V nepřítomnosti vzájemného přelévání poruch magnetického a elektrického pole není nutné uvažovat rovnici pro časový vývoj elektrického pole, postačí jen okrajová podmínka  $\text{div } \mathbf{D} = \rho_Q$ .

Za výchozí soustavu rovnic budeme uvažovat

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_\alpha}{\partial t} + \text{div } n_\alpha \mathbf{u}_\alpha &= 0; \\ m_\alpha n_\alpha \frac{\partial \mathbf{u}_\alpha}{\partial t} + m_\alpha n_\alpha (\mathbf{u}_\alpha \cdot \nabla) \mathbf{u}_\alpha &= Q_\alpha n_\alpha \mathbf{E}; \\ \text{div } \mathbf{E} &= \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_\alpha n_\alpha Q_\alpha. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Poruchy budeme předpokládat ve tvaru

$$n_\alpha = n_{0\alpha} + \delta n_\alpha; \quad \mathbf{u}_\alpha = \mathbf{u}_{0\alpha} + \delta \mathbf{u}_\alpha; \quad \mathbf{E} = \delta \mathbf{E}.$$

Po provedení standardní perturbační analýzy a Fourierovy transformace získáme linearizovanou soustavu pro poruchy:

$$\begin{aligned}
 (\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_{0\alpha}) \delta n_\alpha - n_{0\alpha} (\mathbf{k} \cdot \delta \mathbf{u}_\alpha) &= 0; \\
 i(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_{0\alpha}) \delta \mathbf{u}_\alpha &= \frac{Q_\alpha}{m_\alpha} \delta \mathbf{E}; \\
 i\mathbf{k} \cdot \delta \mathbf{E} &= \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_\alpha Q_\alpha \delta n_\alpha.
 \end{aligned}$$

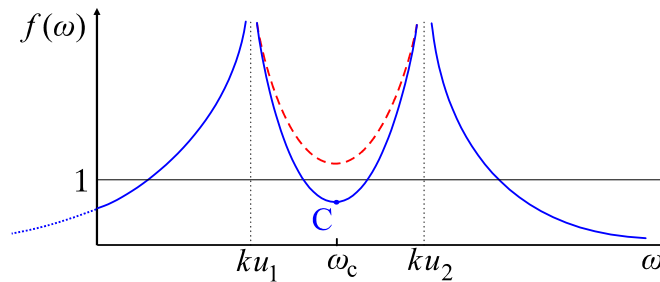
Z prostřední rovnice vypočteme poruchu  $\delta \mathbf{u}_\alpha$  a dosadíme do první rovnice. Z ní určíme poruchu  $\delta n_\alpha$  a dosadíme do poslední rovnice. Výsledkem je disperzní relace

$$\sum_\alpha \frac{\omega_{p\alpha}^2}{(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_{0\alpha})^2} = 1; \quad \omega_{p\alpha}^2 \equiv \frac{n_{0\alpha} Q_\alpha^2}{m_\alpha \varepsilon_0}. \quad (5.12)$$

Uvažujme jednoduchou situaci dvou svazků pohybujících se v jednom směru (Bunemanova nestabilita, pro různé směry svazků hovoříme o Weibelově nestabilitě). V témže směru se objeví porucha elektrického pole a vlna šířící se podél tohoto pole. Disperzní relace bude

$$f(\omega) = \frac{\omega_{p1}^2}{(\omega - ku_1)^2} + \frac{\omega_{p2}^2}{(\omega - ku_2)^2} = 1. \quad (5.13)$$

U neporušených rychlostí jsme pro jednoduchost vynechali index 0. Funkci  $f(\omega)$  na levé straně můžeme snadno vykreslit do grafu:



Řešení nalezneme jako průsečíky funkce  $f(\omega)$  s jednotkou,  $f(\omega) = 1$ . Charakter řešení bude záviset na poloze bodu C, kde má funkce  $f$  lokální minimum. Pokud bude  $y_C < 1$ , existují čtyři reálná řešení. V případě, že  $y_C > 1$  (čárkovaná křivka), budou existovat jen dvě reálná řešení. Vzhledem k tomu, že disperzní relace je čtvrtého řádu v  $\omega$ , budou v tomto případě dvě řešení komplexní a rozvine se nestabilita. Kritický bod nalezneme z podmínky

$$\frac{df}{d\omega} = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_C = \frac{u_2 \omega_{p1}^{2/3} + u_1 \omega_{p2}^{2/3}}{\omega_{p1}^{2/3} + \omega_{p2}^{2/3}} k. \quad (5.14)$$

Podmínku pro rozvoj nestability odvodíme ze vztahu  $f(\omega_C) > 1$ :

$$k^2 < \frac{[\omega_{p1}^{2/3} + \omega_{p2}^{2/3}]^3}{(u_2 - u_1)^2}. \quad (5.15)$$

Vztah odvodil Oscar Buneman (1914–1993) v roce 1959. Nestabilita v chladném plazmatu vznikne pro dostatečně dlouhé vlnové délky vždy. V horkém plazmatu tomu tak ale nemusí být, situaci je vhodnější analyzovat metodami statistické fyziky, viz kapitola 5.4. Svazky se budou brzdít, ale nikoli srážkami. Vznikne silné elektrické pole s  $\lambda > \lambda_c$ , které způsobí jejich postupnou termalizaci.

### 5.1.3 Dva symetrické svazky

Uvažujme nyní dva stejné svazky pohybující se symetricky proti sobě. Disperzní relace má jednoduchý jednodimenzionální tvar

$$\frac{\omega_p^2}{(\omega - ku_0)^2} + \frac{\omega_p^2}{(\omega + ku_0)^2} = 1. \quad (5.16)$$

Po roznásobení získáme bikvadratickou rovnici pro úhlovou frekvenci, která má řešení

$$\omega^2 = \omega_p^2 + k^2 u_0^2 \pm \omega_p \sqrt{\omega_p^2 + 4k^2 u_0^2}. \quad (5.17)$$

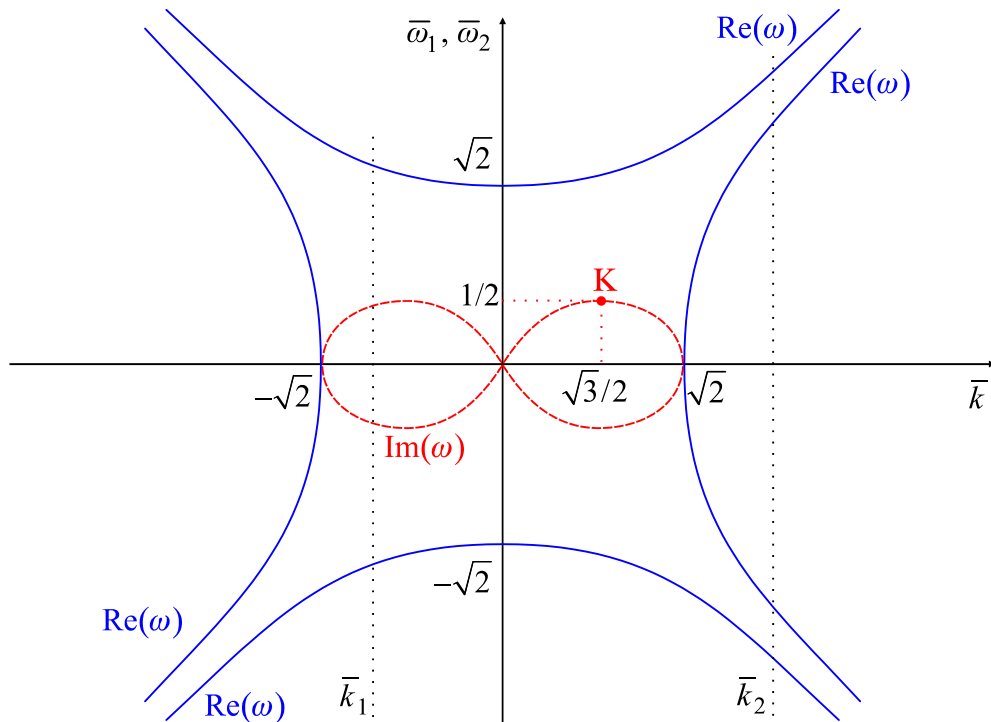
Je zřejmé, že po prvním odmocnění jsou všechna řešení reálná. Oblast komplexních řešení (a tedy nestability) získáme buď přímo z relace (5.17) nebo z již připravené Bunemanovy podmínky (5.15):

$$k^2 < 2 \frac{\omega_p}{u_0} \Rightarrow \bar{k} \equiv \frac{ku_0}{\omega_p} \in (-\sqrt{2}, +\sqrt{2}). \quad (5.18)$$

Disperzní relaci (5.17) je výhodné přepsat do bezrozměrného tvaru

$$\begin{aligned} \bar{\omega}^2 &= 1 + \bar{k}^2 \pm \sqrt{1 + 4\bar{k}^2}; \\ \bar{\omega} &\equiv \frac{\omega}{\omega_p}; \quad \bar{k} \equiv \frac{ku_0}{\omega_p}. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Po odmocnění dostaneme čtyři řešení, obecně komplexní ve tvaru  $\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 + i\bar{\omega}_2$ . Reálné i imaginární části disperzní relace jsou vykresleny v následujícím grafu:



Povšimněte si, že pro velké vlnové vektory (na obrázku  $\bar{k}_2$ ) jsou 4 reálná řešení v  $\omega$ . Pro malé vlnové vektory z intervalu  $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$  existují jen dvě reálná řešení a dvě komplexní (na obrázku vektor  $\bar{k}_1$ ). Pro nestabilitu je klíčový bod K na obrázku, ve kterém je největší

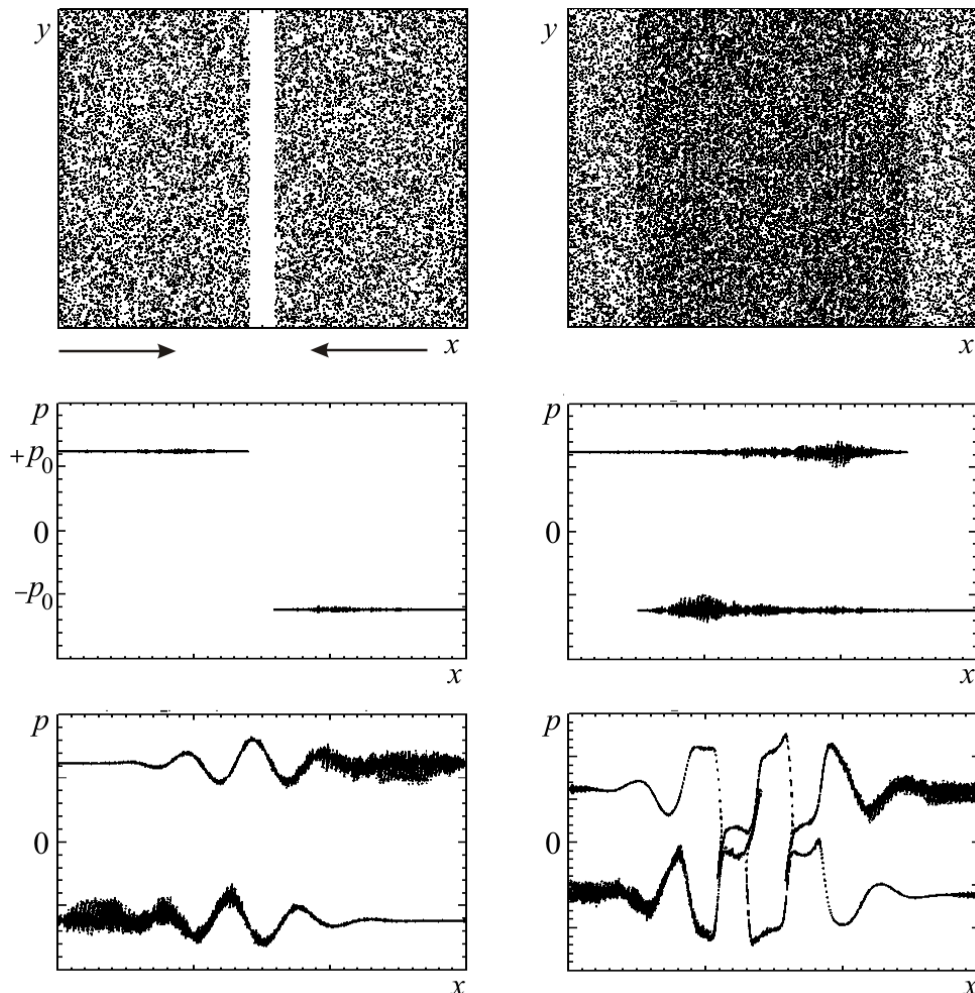
hodnota imaginární části úhlové frekvence a tím i největší koeficient nárůstu nestability. Jeho vodorovnou souřadnici nalezneme jako lokální maximum disperzní relace (5.19). Derivaci pravé strany položíme rovnu nule a získáme hodnotu  $\bar{k} = \sqrt{3}/2$ . V tomto bodě dává disperzní relace (5.19) čtyři řešení

$$\bar{\omega} = \pm \frac{\sqrt{15}}{2}; \quad \bar{\omega} = \pm \frac{i}{2}.$$

Z hlediska nestability nás zajímá imaginární řešení, souřadnice bodu K jsou  $(\sqrt{3}/2, 1/2)$  a koeficient maximálního růstu nestability

$$\gamma = \text{Im}(\omega) = \text{Im}(\bar{\omega}) \omega_p = \frac{\omega_p}{2}. \quad (5.20)$$

Pro dva různé svazky lze provést obdobný rozbor, jen disperzní relace již nebude symetrická jako v našem případě. Nástup dvousvazkové nestability znamená rozvoj vln a následnou termalizaci obou svazků. Jejich energie se tedy nakonec promění v energii tepelnou. Tam již ale naše přiblížení chladného plazmatu neplatí. Nestabilita dvou symetrických svazků se často používá k testování různých simulačních algoritmů pro pohyby nabitých částic. Elegantní analytické řešení a oblast nástupu nestability je v numerické simulaci snadno ověřitelná.



Numerická simulace dvousvazkové nestability (P. Orestes, I. Hastings, Rice University) pro dva svazky prolínajících se pozitronů. Na spodních čtyřech obrázcích je časový vývoj nestability ve fázovém prostoru  $(x, p)$ . Na počátku měly svazky hybnosti  $\pm p_0$ .

### 5.1.4 Nestabilita typu svazek-plazma

Věnujme nyní pozornost svazku, který interaguje s klidným plazmatem. Z obecné disperzní relace (5.12) máme

$$\frac{\omega_{pb}^2}{(\omega - ku_b)^2} + \frac{\omega_p^2}{\omega^2} = 1, \quad (5.21)$$

kde jsme označili  $\omega_p$  plazmovou frekvencí plazmatu,  $\omega_{pb}$  plazmovou frekvencí svazku a  $u_b$  jeho rychlost. Podmínku (5.15) pro rozvoj nestability snadno přepíšeme do tvaru

$$k < \frac{\omega_p}{u_b} \left[ 1 + \left( \frac{\omega_{pb}}{\omega_p} \right)^{2/3} \right]^{3/2}. \quad (5.22)$$

V limitě slabého svazku (tak se nazývá situace, kdy platí  $\omega_b \ll \omega_p$ , například pro ionty pronikající do elektronového plazmatu) je přibližně  $k < \omega_p/u_b$ .

Disperzní relaci (5.21) lze snadno přepsat do jiného elegantního tvaru:

$$\left[ \omega^2 - \omega_p^2 \right] \cdot \left[ (\omega - ku_b)^2 - \omega_{pb}^2 \right] = \omega_{pb}^2 \omega_p^2. \quad (5.23)$$

Jde o tvar analogický (5.8), v našem případě jsou čtyři vlnové módy svázané vazbou. Někdy se hovoří o *čtyřvlnné interakci*. Limita slabého svazku je současně limitou slabé vazby, tj. malé konstanty na pravé straně.

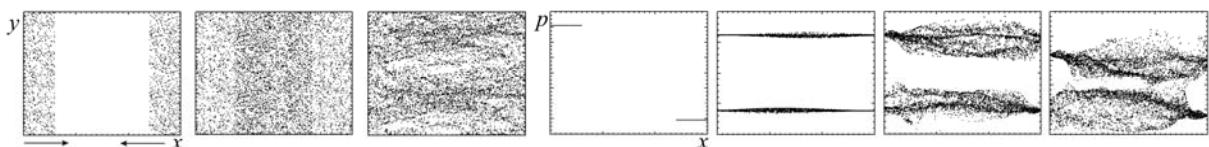
Nestabilita typu svazek-plazma je velmi častá. Objevuje se ve slunečním větru v blízkosti rázových vln planet, při prostupu různých plazmových výtrysků okolním prostředím. Výsledkem je termalizace svazku. Té lze využívat i při ohřevu plazmatu pomocí svazků nabitých částic.

### 5.1.5 Další nestability (driftová, Weibelova)

Další situace, kdy se v plazmatu pohybují dvě tekutiny opačným směrem, nastává v přítomnosti driftových pohybů. U většiny driftů se elektrony a ionty pohybují opačným směrem, a proto může dojít k rozvoji nestability. Podmínka (5.15) pro tento případ dává

$$|k| < \frac{\omega_{pe}}{|v_{Di} - v_{De}|} \left[ 1 + \left( \frac{\omega_{pi}}{\omega_{pe}} \right)^{2/3} \right]^{3/2} \quad (5.24)$$

Nestability vzniklé vzájemným prolínáním dvou nebo více prostředí s různými rychlostmi obecně nazýváme vícesvazkové nestability. Není to název příliš šťastný, neboť ne vždy musí jít o svazky. V jednodimenzionálním případě (rychlosti všech prostředí, elektrické pole a vlnový vektor mají stejný směr) hovoříme o Bunemanově nestabilitě. V případě anizotropie v rychlostním prostoru (2D a 3D případ) hovoříme o Weibelově nestabilitě (E. S. Weibel).



Weibelova nestabilita. První tři obrázky jsou v  $(x, y)$  prostoru a další 4 v  $(x, p)$  prostoru. (P. Orestes, I. Hastings, Rice University)



## 5.2 Plazma s hranicí

### 5.2.1 Základní vztahy

Budeme uvažovat plazmatické prostředí s rozhraním v rámci ideální magnetohydrodynamiky. Tedy zanedbáme difúzní člen, posuvný proud (vysokofrekvenční děje) a samozřejmě předpokládáme, že vlnová délka dějů je větší než střední volná dráha všech částic (jinak by nebylo možné použít teorii kontinua).

Přítomnost hranice značně komplikuje řešení úlohy. Musíme nalézt řešení na obou stranách hranice a tato řešení na hranici navázat. Tato úloha vyžaduje znalost průběhu perturbované hranice a budeme se jí zabývat v této kapitole. Další komplikací je, že základní neperturované řešení již zpravidla není konstantní, ale závisí na některých proměnných, například na vzdálenosti od hranice. V takových proměnných již není možné hledat periodickou poruchu jako dříve. Uvažme nejprve rovinné rozhraní a poté válcové rozhraní (plazmové vlákno).

#### ■ Rovinné rozhraní

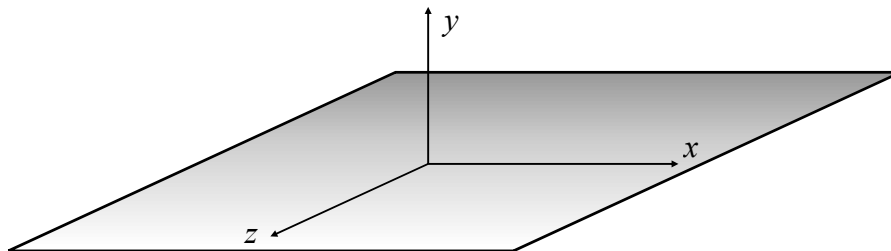
Předpokládejme rozhraní v rovině ( $xz$ ). Klidové řešení může být funkcí vzdálenosti, tedy funkcí  $y$ . Perturbace klidového řešení proto bude mít tvar

$$\psi(t, \mathbf{x}) = \psi_0(y) + \delta\psi; \quad \delta\psi = \psi_1(y) e^{ik_x x + ik_z z - i\omega t}. \quad (5.25)$$

Porucha se nyní skládá ze dvou částí: neperiodické, kterou označujeme  $\psi_1$  a periodické, která je obsažena v kmitavé exponenciále. Periodická část povede na algebraické vztahy jako dříve, neperiodická na diferenciální rovnice, které bude třeba řešit. Index 1 u neperiodické části označuje, že se nacházíme v prvním řádu poruchové teorie. V proměnných, kde to je možné, provedeme opět rozklad na parciální vlny, což povede na sadu pravidel pro příslušnou Fourierovu transformaci:

$$\partial_t \rightarrow -i\omega; \quad \partial_x \rightarrow ik_x; \quad \partial_y \rightarrow d/dy; \quad \partial_z \rightarrow ik_z. \quad (5.26)$$

Jedinou změnou je tedy to, že v proměnné  $y$ , která nemůže být díky hranici periodická, derivace zůstane. Stane se však obyčejnou derivací, protože po aplikaci pravidel již ve výrazech žádná jiná proměnná než  $y$  nezůstane.



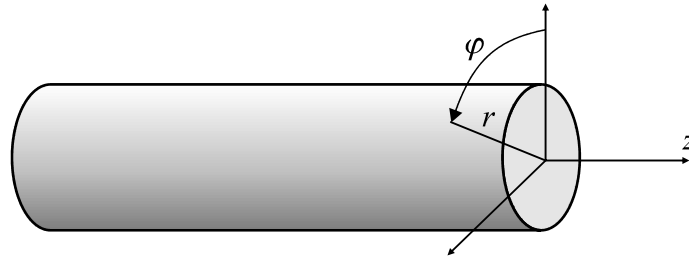
#### ■ Válcové rozhraní

Předpokládejme nyní válcové rozhraní plazmového vlákna neboli pinče. Klidové řešení (například Bennettovo řešení) bude funkcí radiální vzdálenosti od osy vlákna. Perturbace klidového řešení proto bude mít ve válcových souřadnicích tvar

$$\psi(t, r, \varphi, z) = \psi_0(r) + \psi_1(r) e^{ik_\varphi \varphi + ik_z z - i\omega t}. \quad (5.27)$$

Porucha  $\delta\psi$  se opět bude skládat z neperiodické části  $\psi_1(r)$  a kmitavé exponenciely. Řešení musí splňovat periodicitu v polárním úhlu  $\varphi$ :

$$\psi(t, r, \varphi + 2\pi, z) = \psi(t, r, \varphi, z). \quad (5.28)$$



Tuto podmínku splníme, pokud platí

$$e^{ik_\varphi\varphi} = e^{ik_\varphi(\varphi+2\pi)} \Rightarrow e^{i2\pi k_\varphi} = 1 \Rightarrow k_\varphi = m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

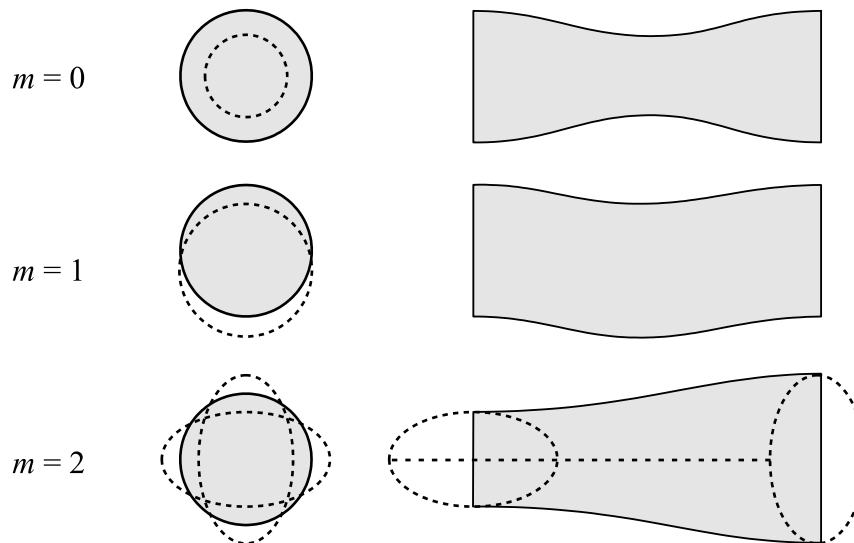
Číslo  $m$  nazýváme řád (mod) poruchy resp. nestability a výraz (5.27) získá tvar

$$\psi(t, r, \varphi, z) = \psi_0(r) + \psi_1(r)e^{im\varphi + ik_z z - i\omega t}; \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (5.29)$$

Odpovídající pravidla pro rozklad do parciálních vln jsou

$$\partial_t \rightarrow -i\omega; \quad \partial_r \rightarrow d/dr; \quad \partial_\varphi \rightarrow im; \quad \partial_z \rightarrow ik. \quad (5.30)$$

Proměnná  $r$  je neperiodická a v rovnicích zůstane včetně svých derivací. První tři mody poruchy jsou znázorněny na následujícím obrázku



**Poznámka 1:** Pokud bychom ztotožnili levý a pravý okraj vlákna (jde o jednoduché přiblížení toroidální geometrie), musí platit  $\psi(t, r, \varphi, z) = \psi(t, r, \varphi, z+L)$ , kde  $L$  je délka vlákna, což vede na

$$k = \frac{2\pi}{L} n; \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (5.31)$$

**Poznámka 2:** Obecná hranice vede na poruchu tvaru

$$\psi(t, \mathbf{q}_n, \mathbf{q}_p) = \psi_0(\mathbf{q}_n) + \psi_1(\mathbf{q}_n)e^{i\mathbf{q}_p \cdot \mathbf{k}_p - i\omega t}, \quad (5.32)$$

kde  $\mathbf{q}_n$  jsou neperiodické proměnné a  $\mathbf{q}_p$  periodické proměnné.

### ■ Vektor posunutí

U problému s hranicí nás většinou nezajímá rychlostní pole, ale vektor posunutí zvolené oblasti plazmatu definovaný vztahem

$$\delta \boldsymbol{\xi}(t, \mathbf{x}) = \int_{t_0}^t \delta \mathbf{u}(t', \mathbf{x}) dt'. \quad (5.33)$$

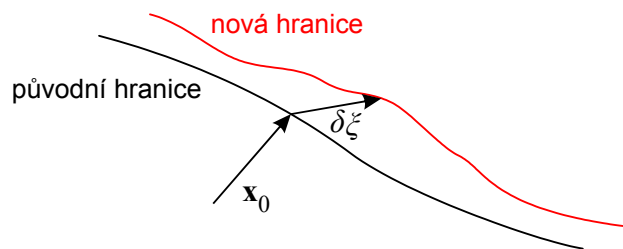
Opačná relace má tvar

$$\delta \mathbf{u} = \frac{\partial \delta \boldsymbol{\xi}}{\partial t}. \quad (5.34)$$

V počátečním čase je vektor posunutí nulový. Tato vlastnost ale již neplatí pro jeho parciální Fourierovy komponenty, ze kterých se výsledný vektor složí. Opět budou mít periodickou ( $\mathbf{q}_p$ ) i neperiodickou ( $\mathbf{q}_n$ ) část:

$$\delta \boldsymbol{\xi}_\omega = \boldsymbol{\xi}_{1\omega}(\mathbf{q}_n) e^{i\mathbf{q}_p \cdot \mathbf{k}_p - i\omega t}; \quad \delta \boldsymbol{\xi} = \int \delta \boldsymbol{\xi}_\omega e^{-i\omega t} d\omega. \quad (5.35)$$

U parciálních vln se index  $\omega$  zpravidla píše jen tehdy, mohlo-li by dojít k záměně. Vektor posunutí vyjadřuje posunutí každého vnitřního elementu plazmatu v průběhu poruchy. Právě přes tento vektor bude definován i tvar nové, narušené hranice.



### ■ Základní rovnice pro vektor posunutí

Vyjděme ze standardní soustavy ideální magnetohydrodynamiky pro jednosložkové plazma s polytropní stavovou rovnicí (3.56), k pohybové rovnici přidáme člen s tíhovým zrychlením:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) &= 0, \\ \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} &= -\nabla p + \rho \mathbf{g} - \nabla \left( \frac{\mathbf{B}^2}{2\mu_0} \right) + \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B}, \\ \frac{\partial p}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) p + \gamma p \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0, \\ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= \operatorname{rot}(\mathbf{u} \times \mathbf{B}). \end{aligned} \quad (5.36)$$

Nyní provedeme linearizaci:

$$\rho = \rho_0(\mathbf{q}_n) + \delta \rho; \quad \mathbf{u} = \delta \mathbf{u}; \quad p = p_0(\mathbf{q}_n) + \delta p; \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_0(\mathbf{q}_n) + \delta \mathbf{B}. \quad (5.37)$$

Základní řešení je ovšem funkcí některých prostorových proměnných, proto již nebudeme moci přesouvat toto řešení před prostorové derivace a nebo pokládat jeho derivaci rovnou nule. Výsledkem linearizace bude soustava

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \delta \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_0 \delta \mathbf{u}) &= 0, \\
\rho_0 \frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial t} &= -\nabla \delta p + \mathbf{g} \delta \rho - \frac{1}{\mu_0} \nabla (\mathbf{B}_0 \cdot \delta \mathbf{B}) + \frac{1}{\mu_0} (\delta \mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B}_0 + \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{B}_0 \cdot \nabla) \delta \mathbf{B}, \\
\frac{\partial \delta p}{\partial t} + (\delta \mathbf{u} \cdot \nabla) p_0 + \gamma p_0 \operatorname{div} \delta \mathbf{u} &= 0, \\
\frac{\partial \delta \mathbf{B}}{\partial t} &= \operatorname{rot}(\delta \mathbf{u} \times \mathbf{B}_0).
\end{aligned} \tag{5.38}$$

V dalším kroku dosadíme za poruchu rychlostního pole  $\delta \mathbf{u} = \partial \delta \xi / \partial t$ . Využijeme, že v linearizované soustavě jsou jediné časové závislosti v perturbovaných členech typu  $\delta \psi$ . Veličiny typu  $\psi_0$  jsou jen prostorově závislé. S výjimkou druhé rovnice bude možné všechny integrovat v čase. Integrační konstanty jsou v prvním řádu poruchové teorie nulové:

$$\begin{aligned}
\delta \rho + \operatorname{div}(\rho_0 \delta \xi) &= 0, \\
\rho_0 \frac{\partial^2 \delta \xi}{\partial t^2} &= -\nabla \delta p + \mathbf{g} \delta \rho - \frac{1}{\mu_0} \nabla (\mathbf{B}_0 \cdot \delta \mathbf{B}) + \frac{1}{\mu_0} (\delta \mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B}_0 + \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{B}_0 \cdot \nabla) \delta \mathbf{B}, \\
\delta p + (\delta \xi \cdot \nabla) p_0 + \gamma p_0 \operatorname{div} \delta \xi &= 0, \\
\delta \mathbf{B} &= \operatorname{rot}(\delta \xi \times \mathbf{B}_0).
\end{aligned} \tag{5.39}$$

Druhá rovnice (pohybová rovnice) je rovnicí pro vektor posunutí. Z posledních dvou rovnic do ní dosadíme za  $\delta p$  a  $\delta \mathbf{B}$ , z první rovnice za  $\delta \rho$ . Výsledek je

$$\begin{aligned}
\rho_0 \frac{\partial^2 \delta \xi}{\partial t^2} &= \nabla (\delta \xi \cdot \nabla) p_0 + \nabla \gamma p_0 \operatorname{div} \delta \xi - \mathbf{g} \operatorname{div}(\rho_0 \delta \xi) - \\
&\quad - \frac{1}{\mu_0} \nabla [\mathbf{B}_0 \cdot \operatorname{rot}(\delta \xi \times \mathbf{B}_0)] + \\
&\quad + \frac{1}{\mu_0} [\operatorname{rot}(\delta \xi \times \mathbf{B}_0) \cdot \nabla] \mathbf{B}_0 + \\
&\quad + \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{B}_0 \cdot \nabla) \operatorname{rot}(\delta \xi \times \mathbf{B}_0).
\end{aligned} \tag{5.40}$$

Pravá strana je lineárním diferenciálním operátorem působícím na poruchu vektoru posunutí

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \delta \xi}{\partial t^2} = \hat{\mathbf{L}} \delta \xi \tag{5.41}$$

V celém odvození nebyl proveden Fourierův rozklad na parciální vlny. Budeme-li předpokládat časový průběh ve tvaru  $\exp[-i\omega t]$ , máme

$$\hat{\mathbf{L}} \delta \xi = -\rho_0 \omega^2 \delta \xi. \tag{5.42}$$

Jde o problém vlastních hodnot operátoru  $\hat{\mathbf{L}}$ , vlastní číslo je funkcí úhlové frekvence. Na navazování řešení na hranici závisí, zda bude mít operátor diskrétní spektrum a tím poruchy diskrétní módy s frekvencemi  $\omega_n$  a nebo bude mít spojitě spektrum a frekvence poruch bude libovolná. Celkové řešení potom složíme obvyklým způsobem

$$\delta\xi = \sum_n \delta\xi_n e^{-i\omega_n t}; \quad \text{resp.} \quad \delta\xi = \int \delta\xi_\omega e^{-i\omega t} d\omega. \quad (5.43)$$

Lze ukázat, že operátor má reálná vlastní čísla a tedy mohou nastat jen případy  $\omega^2 > 0$  (stabilní řešení) nebo  $\omega^2 < 0$  (frekvence je ryze imaginární a řešení nestabilní). V ryze imaginárním případě obsahuje řešení jak exponenciálně rostoucí mody, tak exponenciálně tlumené mody, nezůstane však přítomna kmitavá část. To je způsobeno ideální magnetohydrodynamikou a zanedbáním disipativního členu v rovnici pro magnetické pole. Pokud bychom ponechali disipaci magnetického pole, mohla by mít úhlová frekvence reálnou i imaginární část.

### 5.2.2 Navazování vektorových a skalárních polí na hranici

Je-li bod původní hranice  $\mathbf{x}_0$ , je bodem nové hranice v prvním řádu poruchové teorie

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \delta\xi(t, \mathbf{x}_0). \quad (5.44)$$

Po dosazení řešení za vektor posunutí pro konkrétní situaci máme rovnici nové hranice, ke které standardním postupem (zapišeme hranici v implicitním tvaru a najdeme gradient) odvodíme normálový vektor, který bude mít část nultého i prvního řádu:

$$\mathbf{n} = \mathbf{n}_0 + \delta\mathbf{n}. \quad (5.45)$$

Známe-li rovnici hranice a normálový vektor k ní, můžeme již na hranici navazovat vektorová i skalární pole.

#### ■ Spojitost normálové složky vektorového pole

Přepokládejme, že normálová složka pole je spojitá, potom na hranici platí

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{n} = \text{const}, \quad (5.46)$$

což v prvním řádu poruchové teorie dá podmínku pro navázání řešení na obou stranách

$$\mathbf{K}_0 \cdot \delta\mathbf{n} + \delta\mathbf{K} \cdot \mathbf{n}_0 = \text{const}. \quad (5.47)$$

Dosadíme-li za poruchy parciální vlny a na obou stranách rovnosti zkrátíme periodické části, máme finální podmínku pro navázání

$$\boxed{\mathbf{K}_0 \cdot \mathbf{n}_1 + \mathbf{K}_1 \cdot \mathbf{n}_0 = \text{const}}. \quad (5.48)$$

#### ■ Spojitost tečné složky vektorového pole

Přepokládejme, že tečná složka pole je spojitá, potom na hranici platí

$$\mathbf{K} \times \mathbf{n} = \text{const} \quad (5.49)$$

a obdobným způsobem jako v minulém případě dostaneme podmínku navázání

$$\boxed{\mathbf{K}_0 \times \mathbf{n}_1 + \mathbf{K}_1 \times \mathbf{n}_0 = \text{const}}. \quad (5.50)$$

#### ■ Spojitost skalárního pole

Uvažujme jakékoli skalární pole, které má být na hranici spojitě:

$$\psi(t, \mathbf{x}) = \psi_0(\mathbf{x}) + \delta\psi(t, \mathbf{x}). \quad (5.51)$$

na nové hranici bude mít pole hodnotu

$$\psi(t, \mathbf{x}_0 + \delta \boldsymbol{\xi}) = \psi_0(\mathbf{x}_0 + \delta \boldsymbol{\xi}) + \delta \psi(t, \mathbf{x}_0 + \delta \boldsymbol{\xi}).$$

Na pravé straně provedeme Taylorův rozvoj obou členů do prvního řádu (všechny členy bereme v argumentu  $\mathbf{x}_0$ ):

$$\psi(t, \mathbf{x}_0 + \delta \boldsymbol{\xi}) = \psi_0 + (\delta \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla) \psi_0 + \delta \psi + (\delta \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla) \delta \psi.$$

Předpokládejme, že v nultém řádu je naše skalární pole spojitě, potom stačí řešit spjitost v prvním řádu poruchové teorie, což dá

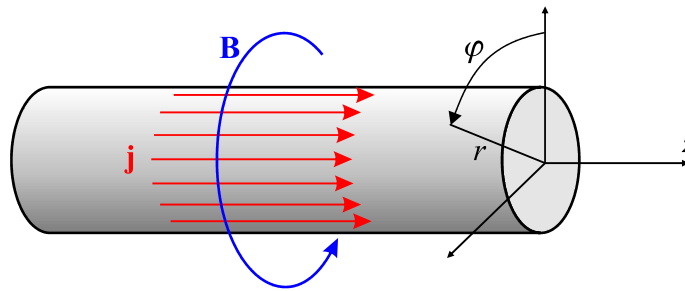
$$(\delta \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla) \psi_0 + \delta \psi = \text{const}.$$

Dosadíme-li za poruchy opět parciální vlny a na obou stranách rovnosti zkrátíme periodické části, máme finální podmínku pro navázání skalárního pole

$$\boxed{(\boldsymbol{\xi}_1 \cdot \nabla) \psi_0 + \psi_1 = \text{const}}. \quad (5.52)$$

### 5.2.3 Nestability plazmového vlákna

Uvažujme nejjednodušší možné plazmové vlákno s válcovou symetrií, ve kterém teče elektrický proud jen po povrchu. (Druhým nejjednodušším případem by byl Bennettův pinč s konstantní proudovou hustotou v celém průřezu a parabolickým průběhem tlaku.) Jedinou neperiodickou proměnnou bude radiální vzdálenost, tedy každé řešení bude mít tvar (5.29).



#### ■ Řešení uvnitř

V tomto jednoduchém případě plyne z Maxwellovy rovnice  $\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j}$ , že rovnovážné magnetické pole uvnitř je nulové a z rovnice rovnováhy  $\mathbf{j} \times \mathbf{B} = -\nabla p$ , že tlak je konstantní. Celkově tedy pro rovnovážné řešení uvnitř máme všechny veličiny konstantní (to by neplatilo u Bennettova pinče):

$$\rho_0 = p_0 = \text{const}; \quad \mathbf{u}_0 = \mathbf{B}_0 = 0. \quad (5.53)$$

Z rovnice pro vektor posunutí (5.40) v tomto případě zbude jen

$$-\rho_0 \omega^2 \delta \boldsymbol{\xi} = \gamma p_0 \nabla \text{div } \delta \boldsymbol{\xi}; \quad \delta \boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}_1(r) e^{im\varphi + ik_z z}$$

V principu můžeme vektor posunutí určit z této rovnice. Jedinou neperiodickou proměnnou je radiální souřadnice a tak jde o tři vzájemně provázané obyčejné diferenciální rovnice pro komponenty  $\xi_r, \xi_\varphi, \xi_z$ . V takto triviálním případě by ale tento postup byl zbytečně složitý. Přímou z rovnic (5.39) po dosažení rovnovážného řešení máme

$$\begin{aligned} \omega^2 \rho_0 \delta \boldsymbol{\xi} &= \nabla \delta p, \\ \delta p + \gamma p_0 \text{div } \delta \boldsymbol{\xi} &= 0, \\ \delta \mathbf{B} &= 0. \end{aligned} \quad (5.54)$$

Z poslední rovnice okamžitě vidíme, že porucha magnetického pole uvnitř vlákna je nulová a proto je nulová i neperiodická část

$$\mathbf{B}_1 = 0. \quad (5.55)$$

Z první rovnice zjistíme přímo hledaný vektor posunutí, pokud budeme znát poruchu tlaku. Tu spočteme z druhé rovnice, do které dosadíme vektor posunutí z první:

$$\left( \Delta + \frac{\omega^2}{c_s^2} \right) \delta p = 0; \quad c_s^2 \equiv \frac{\gamma p_0}{\rho_0}. \quad (5.56)$$

Nyní vyjádříme Laplaceův operátor ve válcových souřadnicích podle (C.9):

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \delta p}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \delta p}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \delta p}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{c_s^2} \delta p = 0.$$

Po aplikaci pravidel (5.30) nebo přímém dosazení  $\delta p = p_1(r) \exp[im\varphi + ikz]$  a zkrácení kmitající části řešení máme rovnici

$$r^2 \frac{d^2 p_1}{dr^2} + r \frac{dp_1}{dr} - \left[ m^2 + \left( k^2 - \frac{\omega^2}{c_s^2} \right) r^2 \right] p_1 = 0. \quad (5.57)$$

Označíme-li ( $q$  může být obecně komplexní, ale pro  $\gamma \rightarrow \infty$ , což odpovídá isochorickému ději a tedy nestlačitelné tekutině, je  $q^2 > 0$ )

$$q^2 \equiv k^2 - \frac{\omega^2}{c_s^2}; \quad x \equiv qr, \quad (5.58)$$

získá rovnice tvar modifikované Besselovy rovnice

$$x^2 \frac{d^2 p_1}{dx^2} + x \frac{dp_1}{dx} - \left[ m^2 + x^2 \right] p_1 = 0, \quad (5.59)$$

jejíž obecné řešení je (viz dodatek A4)

$$p_1(r) = AI_m(qr) + BK_m(qr). \quad (5.60)$$

Vzhledem k tomu, že pro  $r \rightarrow 0$  funkce  $K_m$  diverguje, je konstanta  $B$  nulová a řešení tedy je

$$p_1(r) = AI_m(qr). \quad (5.61)$$

Jako poslední krok nalezneme vektor posunutí z první rovnice (5.54):

$$\begin{aligned} \delta \xi &= \frac{1}{\omega^2 \rho_0} \nabla \delta p = \frac{1}{\omega^2 \rho_0} \left( \frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \frac{\partial}{\partial z} \right) AI_m(qr) e^{im\varphi + ikz} = \\ &= \left( \frac{Aq}{\omega^2 \rho_0} I'_m, \frac{imA}{\omega^2 \rho_0 r} I_m, \frac{ikA}{\omega^2 \rho_0} I_m \right) e^{[im\varphi + ikz]}. \end{aligned}$$

Pro neperiodickou část vektoru posunutí platí

$$\xi_1 = \left( \frac{Aq}{\omega^2 \rho_0} I'_m, \frac{imA}{\omega^2 \rho_0 r} I_m, \frac{ikA}{\omega^2 \rho_0} I_m \right). \quad (5.62)$$

Celkově tedy pro neperiodické části poruch máme uvnitř plazmového vlákna řešení

$$\begin{aligned}
B_{0r} = B_{0\varphi} = B_{0z} = 0, & & B_{1r} = B_{1\varphi} = B_{1z} = 0, \\
p_0 = \text{const}, & & p_1 = AI_m(qr), \\
\xi_{0r} = 0, & & \xi_{1r} = \frac{Aq}{\omega^2 \rho_0} I'_m(qr), \\
\xi_{0\varphi} = 0, & & \xi_{1\varphi} = \frac{imA}{\omega^2 \rho_0 r} I_m(qr), \\
\xi_{0z} = 0, & & \xi_{1z} = \frac{ikA}{\omega^2 \rho_0} I_m(qr).
\end{aligned} \tag{5.63}$$

### ■ Řešení vně

Vně plazmového vlákna rovnovážné magnetické pole ubývá podle Ampérova zákona jako  $1/r$  a lze pro něho psát

$$\mathbf{B}_0 = B_0(r_0) \frac{r_0}{r} \mathbf{e}_\varphi, \tag{5.64}$$

kde  $r_0$  je poloměr vlákna. Vně není plazma a tak jsou poruchy  $p_1$  i  $\xi_1$  nulové. Jedině nenulová bude porucha magnetického pole, pro kterou vně vlákna platí Maxwellova rovnice  $\text{rot } \delta\mathbf{B} = 0$ . Porucha magnetického pole je tedy nevírová a musí existovat skalární potenciál:

$$\delta\mathbf{B} = \nabla\phi. \tag{5.65}$$

Divergence magnetického pole musí být nulová, tj.  $\text{div}(\mathbf{B}_0 + \delta\mathbf{B}) = 0$ . Vzhledem k tomu, že pro rovnovážné řešení platí  $\text{div } \mathbf{B}_0 = 0$ , musí platit i  $\text{div } \delta\mathbf{B} = 0$ . Kombinací s (5.65) máme pro potenciál poruchy rovnici

$$\Delta\phi = 0. \tag{5.66}$$

Rozepíšeme-li Laplaceův operátor do válcových souřadnic, dostaneme pro jeho neperiodickou část rovnici

$$r^2 \frac{d^2 p_1}{dr^2} + r \frac{dp_1}{dr} - [m^2 + k^2 r^2] p_1 = 0. \tag{5.67}$$

Za vnitřní proměnnou tentokrát zvolíme

$$x = kr, \tag{5.68}$$

a dostaneme opět modifikovanou Besselovu rovnici

$$x^2 \frac{d^2 p_1}{dx^2} + x \frac{dp_1}{dx} - [m^2 + x^2] p_1 = 0 \tag{5.69}$$

s řešením

$$\phi_1(r) = CI_m(kr) + DK_m(kr). \tag{5.70}$$

Vně vlákna pro  $r \rightarrow \infty$  diverguje funkce  $I_m$ , takže řešení je

$$\phi_1(r) = DK_m(kr). \tag{5.71}$$

nyní již snadno nalezneme poruchu magnetického pole z rovnice (5.65), neboli



$$\delta\mathbf{B} = \nabla\phi = \left( \frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \phi_1 e^{im\varphi + ikz} = \left( \frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \frac{\partial}{\partial z} \right) DK_m(kr) e^{im\varphi + ikz}.$$

Po provedení derivací a oddělení kmitající části máme výsledek

$$\mathbf{B}_1 = \left( DkK'_m, \frac{iDm}{r} K_m, ikDK_m \right). \quad (5.72)$$

Shrňme tedy výsledky vně vlákna:

$B_{0r} = 0,$	$B_{1r} = DkK'_m(kr),$	(5.73)
$B_{0\varphi} = B_0(r_0) \frac{r_0}{r},$	$B_{1\varphi} = \frac{iDm}{r} K_m(kr),$	
$B_{0z} = 0,$	$B_{1z} = ikDK_m(kr),$	
$\xi_0 = (0, 0, 0),$	$\xi_1 = (0, 0, 0),$	
$p_0 = 0,$	$p_1 = 0.$	

### ■ Navázání řešení

Nejprve nalezneme vektor normály k hranici proudového vlákna, pro kterou platí

$$r = r_0 + r_1(r_0) e^{im\varphi + ikz}. \quad (5.74)$$

Hranici zapíšeme v implicitním tvaru

$$F(r, \varphi, z) = -r + r_0 + \xi_{1r}(r_0) e^{im\varphi + ikz} = 0 \quad (5.75)$$

a vektor normály určíme jako gradient

$$\mathbf{n} = \nabla F = \left( \frac{\partial F}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \varphi}, \frac{\partial F}{\partial z} \right) = \left( -1, \frac{im\xi_{1r}}{r} e^{im\varphi + ikz}, ik\xi_{1r} e^{im\varphi + ikz} \right). \quad (5.76)$$

Vektor normály můžeme rozdělit na původní a perturbovanou část  $\mathbf{n} = \mathbf{n}_0 + \delta\mathbf{n}$  a poté z perturbované části oddělit neperiodickou část:

$$\mathbf{n}_0 = (-1, 0, 0), \quad (5.77)$$

$$\delta\mathbf{n} = \left( 0, \frac{imr_1}{r}, ik\xi_{1r} \right) e^{im\varphi + ikz}, \quad (5.78)$$

$$\mathbf{n}_1 = \left( 0, \frac{im\xi_{1r}}{r}, ik\xi_{1r} \right). \quad (5.79)$$

To je vše co potřebujeme pro úspěšné navazování: řešení uvnitř (5.63), řešení vně (5.73) a části vektoru normály  $\mathbf{n}_0$  a  $\mathbf{n}_1$ . Jako první navažme normálovou složku magnetického pole  $\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}$  podle vztahu (5.48)

$$[\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{n}_1 + \mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{n}_0]_{\text{uvnitř}}^{\text{vně}} = 0. \quad (5.80)$$

Uvnitř vlákna je výraz nulový a venku dá  $B_{0\varphi} n_{1\varphi} + B_{1r} n_{0r} = 0$ . Vzhledem k tomu, že hranice je společná, musíme za vektor posunutí  $\xi_{1r}$  dosadit z vnitřního řešení. Ve všech výrazech provedeme limitu  $r \rightarrow r_0$ :

$$A \left[ \frac{imB_0(r_0)q}{\omega^2 \rho_0 r_0} I'_m(qr_0) \right] - D [kK'_m(kr_0)] = 0 \quad (5.81)$$

Zbývá navázat celkový tlak  $\psi = p + B^2/2\mu_0$  podle vztahu (5.52):

$$\left[ \xi_{1r} \frac{d}{dr} \frac{B_0^2}{2\mu_0} + p_1 + \frac{B_{0\varphi} B_{1\varphi}}{\mu_0} \right]_{\text{vně}}^{\text{uvnitř}} = 0.$$

Opět dosadíme nalezená řešení uvnitř i vně, hranice je společná (tedy dosazujeme vnitřní), provedeme derivaci a poté ve všech výrazech limitu  $r \rightarrow r_0$ :

$$A \left[ I_m(qr_0) + \frac{B_0^2 q}{\omega^2 \rho_0 \mu_0 r_0} I'_m(qr_0) \right] - D \left[ \frac{imB_0}{\mu_0 r_0} K_m(kr_0) \right] = 0 \quad (5.82)$$

Rovnice (5.81) a (5.82) jsou soustavou rovnic pro hledané integrační konstanty  $A$  a  $D$ . Netriviální řešení bude existovat jen tehdy, pokud bude determinant soustavy roven nule:

$$-\left[ \frac{imB_0(r_0)q}{\omega^2 \rho_0 r_0} I'_m(qr_0) \right] \left[ \frac{imB_0}{\mu_0 r_0} K_m(kr_0) \right] + [kK'_m(kr_0)] \left[ I_m(qr_0) + \frac{B_0^2 q}{\omega^2 \rho_0 \mu_0 r_0} I'_m(qr_0) \right] = 0.$$

Poslední dva výrazy roznásobíme a z rovnice vypočteme  $\omega^2$ :

$$\omega^2 = -\frac{v_A^2 q}{r_0} \frac{I'_m(qr_0)}{I_m(qr_0)} \left[ 1 + \frac{m^2}{kr_0} \frac{K_m(kr_0)}{K'_m(kr_0)} \right]; \quad v_A^2 \equiv \frac{B_0^2(r_0)}{\rho_0 \mu_0} \quad (5.83)$$

Získali jsme tak disperzní relaci v našem jednoduchém případě a současně vlastní čísla problému (5.42).

### ■ Rozbor řešení

Získaná disperzní relace je skutečně taková, jak jsme již avizovali u rovnice pro vektor posunutí – mohou nastat jen případy  $\omega^2 > 0$  (stabilní řešení) a  $\omega^2 < 0$  (frekvence je ryze imaginární a řešení nestabilní). Základní podmínka stability je

$$\frac{v_A^2}{r_0} q \frac{I'_m(qr_0)}{I_m(qr_0)} \left[ 1 + \frac{m^2}{kr_0} \frac{K_m(kr_0)}{K'_m(kr_0)} \right] < 0.$$

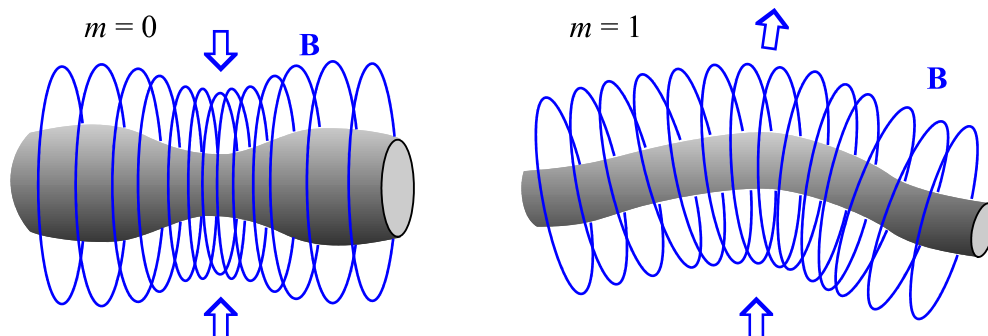
Uvědomíme-li si (viz dodatek A4), že funkce  $I_m$  je vždy kladná a stejně tak její derivace  $I'_m$ , veličina  $q^2$  je v režimu blízkém nestlačitelnému (ideální magnetohydrodynamika,  $\gamma$  velké) také kladná, získáme finální tvar podmínky stability (Kruskalovu-Shafranovovu podmínku)

$$1 + \frac{m^2}{kr_0} \frac{K_m(kr_0)}{K'_m(kr_0)} < 0 \quad (5.84)$$

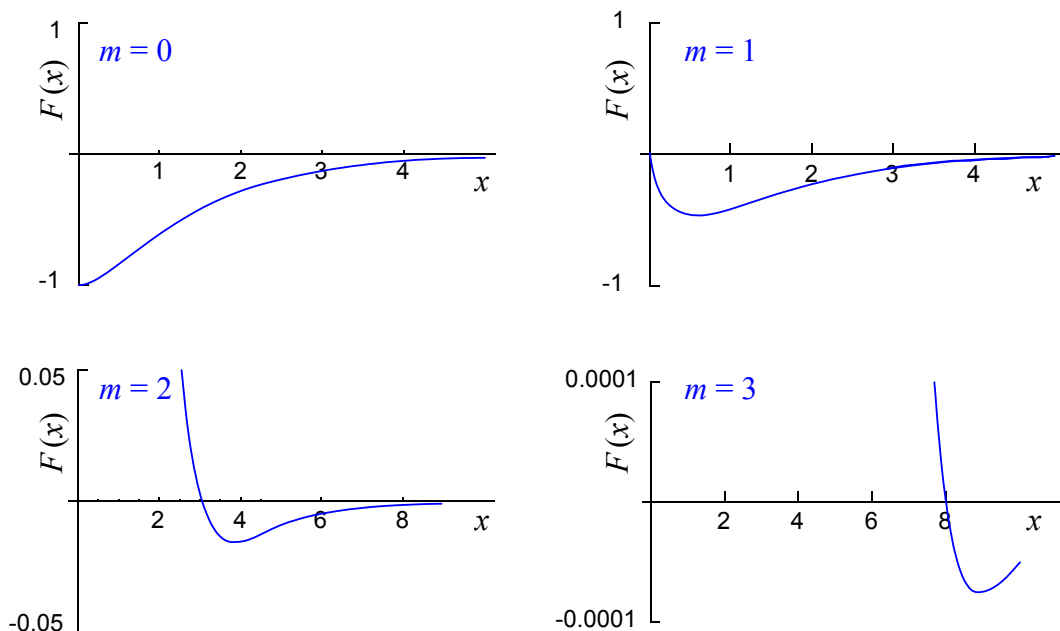
Povšimněte si, že jediná veličina obsahující materiálové vlastnosti plazmatu  $q$  ve finálním vztahu není. Označíme-li  $x \equiv kr_0$ , můžeme podmínku přepsat do tvaru ( $K_m$  je kladné,  $K'_m$  záporné):

$$F(x) \equiv xK'_m(x) + m^2 K_m(x) > 0. \quad (5.85)$$

Podmínka stability v tomto tvaru je vhodná pro grafické řešení (vykreslíme levou stranu vztahu a sledujeme, zda je výsledek kladný). Z obou posledních vztahů je okamžitě vidět, že pro  $m = 0$  neexistuje řešení a vlákno bude vždy nestabilní vůči poruchám modu 0. Totéž lze ukázat pro mod  $m = 1$ .



Nestabilitu  $m = 0$  nazýváme *korálková nestabilita* (sausage instability), nestabilitu  $m = 1$  *smyčková nestabilita* (kink instability). V obou případech se objeví silnější pole (hustší siločivky) na „nesprávném“ místě a tlak magnetického pole počáteční deformaci nadále prohlubuje.



Na grafech je vykreslena levá strana nerovnosti (5.85). První dva mody nemají žádné nulové řešení a jsou vždy nestabilní. Všechny další mody jsou stabilní pro  $x < x_0$ , které je pro nejnižší mody v tabulce

mod $m$	0	1	2	3	4	5
$x_0 = kr_0$	–	–	3.04	8.02	15.01	24.01

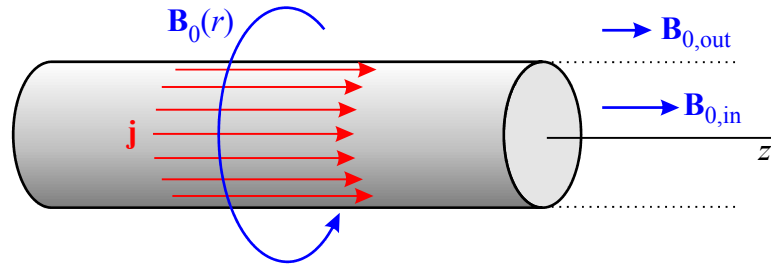
Pro  $x_0$  platí přibližná formule

$$x_0 \approx m^2 - 1 \quad (5.86)$$

Od modu 2 je řešení stabilní pro  $kr_0 < x_0$ , tedy pro vlnové délky

$$\lambda > \frac{2\pi r_0}{m^2 - 1}; \quad m = 2, 3, \dots \quad (5.87)$$

V případě, že by na počátku existovalo osové pole  $B_{0z}$ , budou první dva módy již alespoň v některých oblastech parametrů stabilní. Osově pole má na proudové vlákno stabilizující účinek.



Obdobným postupem můžeme získat disperzní relaci i v tomto případě. Uvedme již jen výsledek výpočtu:

$$\omega^2 = k^2 v_{A,\text{in}}^2 - \left( k v_{A,\text{ex}} + m \frac{v_A}{r_0} \right)^2 \frac{q I'_m(qr_0) K_m(kr_0)}{k I_m(qr_0) K'_m(kr_0)} - \frac{v_A^2 q I'_m(qr_0)}{r_0 I_m(qr_0)};$$

$$v_A^2 \equiv \frac{B_0^2(r_0)}{\rho_0 \mu_0}; \quad v_{A,\text{in}}^2 \equiv \frac{B_{0,\text{in}}^2}{\rho_0 \mu_0}; \quad v_{A,\text{ex}}^2 \equiv \frac{B_{0,\text{ex}}^2}{\rho_0 \mu_0}; \quad q^2 \equiv \frac{\left( k^2 - \frac{\omega^2}{c_s^2} \right) \left( k^2 - \frac{\omega^2}{v_{A,\text{in}}^2} \right)}{k^2 - \frac{\omega^2}{c_s^2} - \frac{\omega^2}{v_{A,\text{in}}^2}}. \quad (5.88)$$

Disperzní relaci můžeme opět řešit graficky, pro první dva módy již budou existovat stabilní oblasti řešení.

#### 5.2.4 Rayleighova-Taylorova nestabilita

Podobné, nebude ke zkoušce, dopíšu o prázdninách.

#### 5.2.5 Kelvinova-Helmholtzova nestabilita

Podobné, nebude ke zkoušce, dopíšu o prázdninách.

#### 5.2.6 Další nestability

Podobné, nebude ke zkoušce, dopíšu o prázdninách.

## 5.3 Rezistivní nestability

### 5.3.1 Základní vztahy

Konečný odpor plazmatu především umožňuje přepojování magnetických silokřivek a s tím spojenou ostrůvkovou (tearing) nestabilitu rozvíjející se na rozhraní dvou oblastí s opačným směrem magnetických silokřivek. Na hranici takové oblasti nemůžeme zanedbat difúzní člen v rovnici pro magnetické pole (3.13). Podstatné jsou ovšem i jevy spojené s případným gradientem rezistivity napříč rozhraním. Proto odvodíme rovnici pro magnetické pole ještě jednou s uvážením nenulového gradientu rezistivity. V celé kapitole budeme uvažovat opět poruchy ve tvaru

$$\psi(t, \mathbf{q}_n, \mathbf{q}_p) = \psi_0(\mathbf{q}_n) + \psi_1(\mathbf{q}_n) e^{i\mathbf{q}_p \cdot \mathbf{k}_p - i\omega t}, \quad (5.89)$$

kde  $\mathbf{q}_n$  jsou neperiodické proměnné (zpravidla kolmo na rozhraní) a  $\mathbf{q}_p$  periodické proměnné. Budeme také předpokládat „nestlačitelnost“ magnetického pole (je splněna vždy z Maxwellových rovnic) a nestlačitelnost plazmatu (je splněna, dominuje-li zamrznání plazmatu nad difúzí, tato situace platí pro naprostou většinu laboratorního i vesmírného plazmatu):

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad (5.90)$$

$$\operatorname{div} \vec{\xi} = 0. \quad (5.91)$$

#### ■ Rovnice pro magnetické pole

Vyjděme z Maxwellovy rovnice pro časový vývoj magnetického pole

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (5.92)$$

a Ohmova zákona v diferenciálním tvaru

$$\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}); \quad \sigma = \sigma(\mathbf{x}). \quad (5.93)$$

Do rovnice (5.92) dosadíme za elektrické pole z (5.93) a po přímočarých úpravách dostaneme

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{\eta}{\mu_0} \Delta \mathbf{B} + \operatorname{rot}(\mathbf{u} \times \mathbf{B}) - \frac{1}{\mu_0} (\vec{\nabla} \eta) \times \operatorname{rot} \mathbf{B}, \quad (5.94)$$

kde jsme zavedli rezistivitu vztahem

$$\eta(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sigma(\mathbf{x})}. \quad (5.95)$$

První člen popisuje difúzi pole, druhý představuje zamrznání a v dalším uvidíme, že třetí člen se chová jako nové silové pole, které může výrazně ovlivnit přepojování magnetických silokřivek. Napišme ještě linearizovaný tvar rovnice pro magnetické pole pro  $\mathbf{u}_0 = 0$  a  $\mathbf{B}_0$  splňující rovnici  $\Delta \mathbf{B}_0 = 0$  (magnetické pole splňuje vlnovou rovnici a toto je její stacionární podoba):

$$\frac{\partial \delta \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{\eta_0}{\mu_0} \Delta \delta \mathbf{B} + \operatorname{rot}(\delta \mathbf{u} \times \mathbf{B}_0) - \frac{1}{\mu_0} (\vec{\nabla} \eta_0) \times \operatorname{rot} \delta \mathbf{B} - \frac{1}{\mu_0} (\vec{\nabla} \delta \eta) \times \operatorname{rot} \mathbf{B}_0 \quad (5.96)$$

### ■ Rovnice pro rezistivitu

Původ gradientu rezistivity plazmatu může být různý. My zpravidla známe počáteční průběh rezistivity a potřebujeme zjistit její změny způsobené průchodem vlny nebo nestability. V takovém případě se nemusíme opírat o detailní mechanismus původu vodivosti plazmatu a jen konstatovat, že se díky pohybům plazmatu budou přenášet od místa k místu i oblasti s konkrétní rezistivitou, tedy bude platit  $d\eta/dt = 0$ . Po rozepsání máme rovnici pro rezistivitu ve tvaru

$$\boxed{\frac{\partial \eta}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \eta = 0} \quad (5.97)$$

Linearizovaná podoba rovnice pro rezistivitu bude

$$\frac{\partial \delta \eta}{\partial t} + (\delta \mathbf{u} \cdot \nabla) \eta_0 = 0 .$$

Oba členy lze přímo integrovat v čase

$$\delta \eta + (\delta \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla) \eta_0 = 0 .$$

Po vynechání periodických proměnných máme finální tvar

$$\boxed{\eta_1 + (\boldsymbol{\xi}_1 \cdot \nabla) \eta_0 = 0} \quad (5.98)$$

Tím, že neřešíme fyzikální mechanismy, ale pouhý přesun oblastí s danou rezistivitou, můžeme z vektoru posunutí přímo spočítat poruch rezistivity  $\eta_1$ . Celá rovnice pro rezistivitu je proto v lineárním přiblížení triviální záležitostí.

### ■ Význam gradientu $\eta_0$

Přepíšme Ohmův zákon (5.93) do tvaru s rezistivitou:

$$\eta \mathbf{j} = \mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B} .$$

V lineárním přiblížení máme

$$\delta \eta \mathbf{j}_0 + \eta_0 \delta \mathbf{j} = \delta \mathbf{E} + \delta \mathbf{u} \times \mathbf{B}_0 .$$

Vzhledem k tomu, že jde o algebraické vztahy, můžeme na obou stranách rovnosti vypustit periodickou část

$$\eta_1 \mathbf{j}_0 + \eta_0 \mathbf{j}_1 = \mathbf{E}_1 + \mathbf{u}_1 \times \mathbf{B}_0 .$$

Poruchu  $\eta_1$  dosadíme ze vztahu (5.98) a určíme poruchu proudové hustoty  $\mathbf{j}_1$ :

$$\mathbf{j}_1 = \frac{(\boldsymbol{\xi}_1 \cdot \nabla) \eta_0}{\eta_0} \mathbf{j}_0 + \frac{\mathbf{E}_1 + \mathbf{u}_1 \times \mathbf{B}_0}{\eta_0} .$$

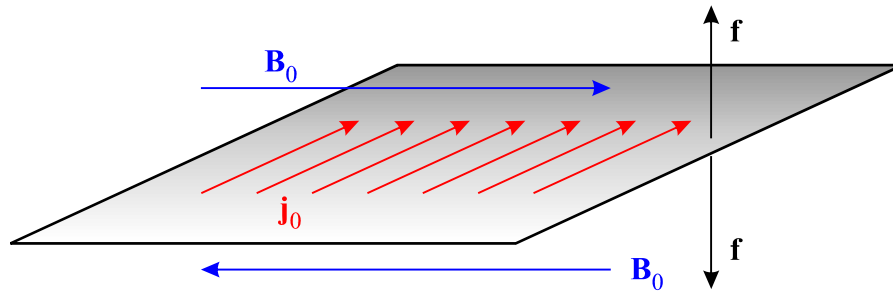
Novému elektrickému proudu bude příslušet hustota Lorentzovy síly působící na plazma

$$\mathbf{f}_1 \equiv \mathbf{j}_1 \times \mathbf{B}_0 = \frac{(\boldsymbol{\xi}_1 \cdot \nabla) \eta_0}{\eta_0} (\mathbf{j}_0 \times \mathbf{B}_0) + \frac{\mathbf{E}_1 \times \mathbf{B}_0 + (\mathbf{u}_1 \times \mathbf{B}_0) \times \mathbf{B}_0}{\eta_0}$$

Zatímco druhý člen je standardní změna proudové hustoty způsobená perturbacemi, první člen je zcela nový. Jde o sílu způsobenou gradientem počátečního rozložení rezistivity:

$$\boxed{\mathbf{f}_{\nabla \eta_0}^{(1)} \equiv \frac{(\boldsymbol{\xi}_1 \cdot \nabla) \eta_0}{\eta_0} (\mathbf{j}_0 \times \mathbf{B}_0)} \quad (5.99)$$

Pokud má magnetické pole na obou stranách rozhraní opačný směr, teče proudová hustota  $\mathbf{j}_0$  v rozhraní a nová síla má směr kolmý na rozhraní. Taková síla může výrazně vznik nestability na rozhraní ovlivnit (podobně jako tíhové zrychlení je podnětem k rozvoji Rayleighovy-Taylorovy nestability). V tomto případě bude ale na jedné straně nestabilitu podporovat a na druhé tlumit.



### ■ Rovnice pro vektor posunutí

Pohybovou rovnicí budeme uvažovat ve tvaru

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \rho \mathbf{g} + \frac{1}{\mu_0} (\text{rot } \mathbf{B}) \times \mathbf{B}, \quad (5.100)$$

po linearizaci máme

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \delta \xi}{\partial t^2} + = -\nabla \delta p + \delta \rho \mathbf{g} + \frac{1}{\mu_0} (\text{rot } \mathbf{B}_0) \times \delta \mathbf{B} + \frac{1}{\mu_0} (\text{rot } \delta \mathbf{B}) \times \mathbf{B}_0. \quad (5.101)$$

### ■ Další rovnice

Rovnice (5.96), (5.98) a (5.101) je třeba doplnit podmínkami nestlačitelnosti nebo nějakým jiným uzavřením soustavy. V případě nestlačitelnosti bude tlak i hustota sledovat pohybující se plazma obdobně jako rezistivita a můžeme tedy psát analogicky se vztahem (5.98)

$$\rho_1 + (\xi_1 \cdot \nabla) \rho_0 = 0, \quad (5.102)$$

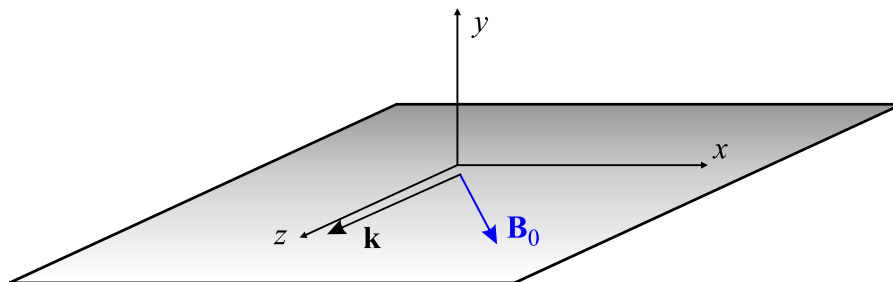
$$p_1 + (\xi_1 \cdot \nabla) p_0 = 0. \quad (5.103)$$

Jedinými skutečnými rovnicemi jsou tedy rovnice pro magnetické pole a pro vektor posunutí. Zbylé rovnice jsou jen algebraické a triviálně řešitelné.

### 5.3.2 Ostrůvková (tearing) nestabilita

#### ■ Geometrie úlohy

Uvažujme dvě oblasti opačně orientovaných magnetických polí oddělené rovinným rozhraním. Souřadnicovou soustavu zvolíme tak, aby rozhraní bylo v rovině  $y=0$ . Předpokládejme poruchu, která vede na rozvoj vlny šířící se v této rovině, za směr šíření zvolíme osu  $z$ .



U pohybů nabitých částic bylo výhodné volit v ose  $z$  magnetické pole (Larmorova rotace probíhala v nárysně). U výpočtu nestability s rozhraním je výhodné v ose  $z$  volit směr pohybu vlny, porucha libovolné veličiny potom bude mít tvar

$$\psi(t, \mathbf{x}) = \psi_0(y) + \delta\psi = \psi_0(y) + \psi_1(y) e^{ikz - i\omega t}. \quad (5.104)$$

Neperiodická proměnná je ve směru kolmém na rozhraní, z periodických proměnných se díky volbě souřadnicové soustavy uplatní jen proměnná  $z$  a výpočet se značně zjednoduší. Z podmínek nestlačitelnosti (5.90) a (5.91) budeme při této volbě mít

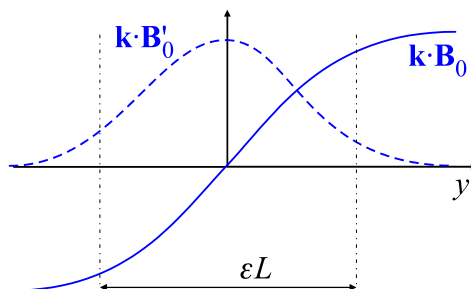
$$\operatorname{div} \delta \mathbf{B} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \delta B_x}{\partial x} + \frac{\partial \delta B_y}{\partial y} + \frac{\partial \delta B_z}{\partial z} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{dB_{1y}}{dy} + ikB_{1z} = 0}. \quad (5.105)$$

Je jasné, že v této geometrii postačí nalézt  $B_{1y}$  a hodnotu  $B_{1z}$  již lehce dopočteme. Stejná situace je s vektorem posunutí ( $\operatorname{div} \xi = 0$ ), kde nemusíme hledat  $\xi_{1z}$ :

$$\boxed{\frac{d\xi_{1y}}{dy} + ik\xi_{1z} = 0}. \quad (5.106)$$

Celkem si tak ušetříme řešení dvou diferenciálních rovnic. Při známém průběhu  $\mathbf{B}_0(y)$  a  $\eta_0(y)$ , případně ostatních rovnovážných hodnot vede za předpokladu symetrie (5.104) celá soustava na několik obyčejných diferenciálních rovnic. Buď je řešíme numericky, nebo můžeme provádět různé rozměrové odhady, ve kterých vystupuje šířka přechodové oblasti mezi oběma směry pole  $\varepsilon L$ , malost přechodové oblasti je určena parametrem  $\varepsilon$ .





Na vodorovné ose je vzdálenost od rozhraní. Veličina  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0$  je vlastně projekcí pole do směru šíření vlny (až na normovací konstantu. Vidíme, že na jedné straně poloprostoru je kladná a na druhé záporná. Samotná rovina oddělující poloprostory s různým polem je definovaná vztahem

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0 = 0 \quad (5.107)$$

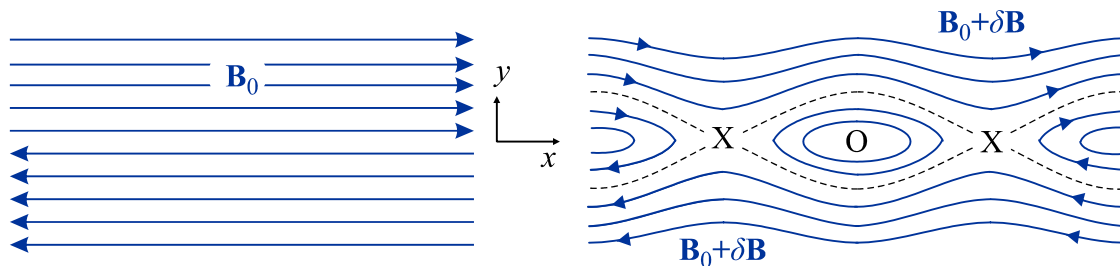
a říkáme jí rezonanční povrch. V grafu je čárkovaně vykreslena derivace této veličiny, která má v místě rezonančního povrchu maximum. V rozměrové analýze problému lze pro derivaci  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0$  psát

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}'_0 \approx \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0}{\varepsilon L}.$$

Nebo naopak, veličina  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0$ , která je nulová na rezonančním povrchu, se píše jako

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0 \approx \varepsilon L \mathbf{k} \cdot \mathbf{B}'_0.$$

Z rozměrové analýzy rovnic v popsané geometrii lze odhadnout koeficient nárůstu nestability  $\gamma$  definovaný vztahem (5.3). Numerické řešení rovnic dá kolem rezonančního povrchu charakteristický průběh magnetického pole s magnetickými ostrovy (body O) a průsečíky separatis, kde dochází k rekonekci (body X).



Elektrický proud teče i nadále v rovině rozhraní, není již ale homogenní. V místech magnetických ostrovů je proudová hustota vyšší. Dojde k rozvrstvení (roztrhání) proudové stěny. Odtud pochází anglický název *tearing instability* (tear = trhat).

### 5.3.3 Řízené rezistivní nestability

Řízenou nestabilitou nazýváme nestabilitu, jejíž chování ovlivňuje nějaká vnější síla. V případě Rayleighovy-Taylorovy nestability to může být například tíhové pole. V jednom směru tíhové pole situaci stabilizuje (tekutina s vyšší hustotou je dole) v druhém směru dochází k řízené nestabilitě (hustší tekutina je nahoře). Chování ostrůvkové nestability může ovlivnit tíhové pole také (pak hovoříme o tzv. *g módu*). Mnohem důležitější je ale ovlivnění způsobené gradientem rezistivity plazmatu, který je kolmý na rozhraní (tzv. *rippling mód*). Již jsme si ukázali, že se takový gradient projeví jako síla působící kolmo na rozhraní. Jenže na rozdíl od tíhového zrychlení má v obou poloprostorech opačný směr (buď ke rezonančnímu povrchu, nebo od něho). V jednom poloprostoru tato řídicí síla nestabilitu stabilizuje a v druhém ji naopak rozvíjí. Je zřejmé, že rozvoj nastane v poloprostoru s nižší rezistivitou, kde mohou téci vyšší proudy.

### 5.3.4 Tokamakové nestability

Jestliže v tokamaku označíme toroidální úhel  $\varphi$  a poloidální  $\theta$ , můžeme pro různé veličiny psát

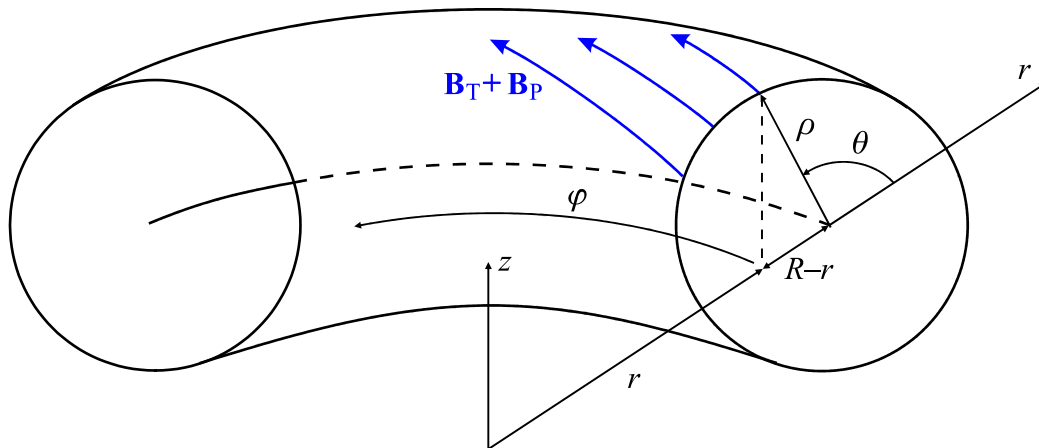
$$\psi = \psi(\rho) e^{im\theta + in\varphi - i\omega t}; \quad m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (5.108)$$

Rovnice  $\text{div } \mathbf{B} = 0$  pro magnetické pole dá

$$\frac{dB_\rho}{d\rho} + \frac{m}{\rho} B_\theta + \frac{n}{r} B_\varphi = 0. \tag{5.109}$$

Periodická část této rovnice není nic jiného než definice rezonančního povrchu:

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{B} = \frac{m}{\rho} B_\theta + \frac{n}{r} B_\varphi = 0 \tag{5.110}$$



Rovnici lze přepsat do tvaru

$$\frac{\rho}{r} \frac{B_\varphi}{B_\theta} = \frac{m}{n}.$$

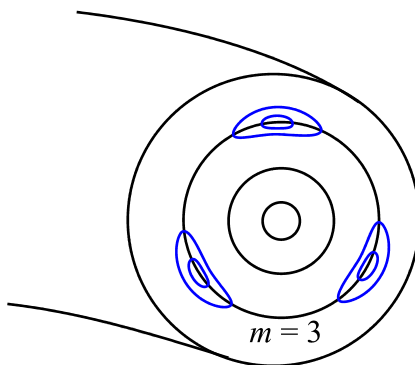
Znaménko není podstatné, obě čísla  $m, n$  mohou nabývat kladných i záporných hodnot. Veličině na levé straně se říká bezpečnostní parametr a je roven průměrnému počtu toroidálních otáček pole na jeden poloidální:

$$\frac{dl_T}{dl_P} = \frac{rd\varphi}{\rho d\theta} = \frac{B_T}{B_P} \Rightarrow q(\rho) \equiv \frac{d\varphi}{d\theta} = \frac{\rho}{r} \frac{B_T}{B_P} \approx \frac{\rho}{R} \frac{B_T}{B_P} = \frac{\rho}{R} \frac{B_\varphi}{B_\theta}.$$

V tokamacích s  $a \ll R$  platí pro rezonanční povrchy rovnice

$$q(\rho) \approx \frac{\rho}{R} \frac{B_T}{B_P} = \frac{m}{n}. \tag{5.111}$$

Na těchto tzv. „ $mn$ “ površích dochází k rozvoji ostrůvkové (tearing) nestability. Na povrchu se objeví  $m$  ostrovů. Jejich opakovaná geneze je doprovázena známými pilovitými signály elektrického pole.



## 5.4 Mikronestability

### 5.4.1 Základní vztahy

Při přechodu od statistického popisu plazmatu ke kontinuu (například k magnetohydrodynamice) ztrácíme informace o statistickém rozdělení v rychlostní části fázového prostoru. Přicházíme tak i o celou třídu lineárních nestabilit, jejichž původ je právě v přerozdělování pravděpodobnosti výskytu částic v rychlostní části fázového prostoru. V této kapitole se zaměříme na lineární nestability ve statistickém přístupu v bezsrážkovém plazmatu. Jde do jisté míry o druhý extrém. Kontinuum je dominantně srážkové, my se budeme zabývat v této kapitole plazmatem, v němž lze srážky zcela zanedbat, tedy výhradně nestabilitami způsobenými interakcí částic s poli. Za výchozí rovnici budeme považovat Boltzmannovu rovnici pro hustotu pravděpodobnosti výskytu částic druhu  $\alpha$

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}}) f_\alpha + \frac{Q_\alpha}{m_\alpha} [(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \nabla_{\mathbf{v}}] f_\alpha = 0, \quad (5.112)$$

doplněnou Maxwellovými rovnicemi pro pole

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho_Q, \quad (5.113)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad (5.114)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (5.115)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j}_Q + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad (5.116)$$

Částicová a polní část je provázána zdrojovými členy

$$\begin{aligned} \rho_Q &= \sum_{\alpha} Q_{\alpha} n_{\alpha} = \sum_{\alpha} \int Q_{\alpha} f_{\alpha} d^3 \mathbf{v}_{\alpha}, \\ \mathbf{j}_Q &= \sum_{\alpha} Q_{\alpha} n_{\alpha} \mathbf{u}_{\alpha} = \sum_{\alpha} \int Q_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha} f_{\alpha} d^3 \mathbf{v}_{\alpha}. \end{aligned} \quad (5.117)$$

S touto sadou rovnic budeme provádět lineární perturbační analýzu stejným způsobem jako v teorii kontinua. Obdobně můžeme rozčlenit i jednotlivé typy jevů:

- [Vysokofrekvenční děje bez magnetického pole.](#)  
Jde o zobecnění plazmových vln o *Landauův útlum na elektronech*.
- [Nízkofrekvenční děje bez magnetického pole.](#)  
Jde o zobecnění iontových vln o *Landauův útlum na iontech*.
- [Vysokofrekvenční děje s magnetickým polem.](#)  
Jde o přidání *Bernsteinových modů* k elektromagnetickému komplexu vln.
- [Nízkofrekvenční děje s magnetickým polem.](#)  
Jde o *magnetoakustický komplex s útlumem*.

### 5.4.2 Landauův útlum na elektronech

V kapitole 4.2.3 jsme se zabývali plazmovými vlnami, které jsou způsobeny rychlou reakcí elektronů na plazmové frekvenci. Vlny a oscilace byly tvořeny elektrickým polem a k jejich vzniku nebylo třeba žádné klidové magnetické pole. Disperzní relace, kterou jsme získali z tekutinového modelu, byla reálná a vlny nevykazovaly žádný útlum.

Ve skutečnosti i v lineární teorii dochází k útlumu vln, který souvisí se statistickým chováním částic. Tento útlum se nazývá *Landauův útlum* a není možné ho odvodit z tekutinového modelu, kdy je Boltzmannova rovnice vystředována přes momenty rychlosti a část informace se ztrácí. K odvození musí být použita Boltzmannova rovnice pro rozdělovací funkci elektronů. Samotný útlum se projevuje i bez přítomnosti srážek a proto lze využít Vlasovovu rovnici (bez srážkového členu).

Uvažujme tedy bezsrážkové plazma, interakci elektronů s plazmovou vlnou v okolí plazmové frekvence v neomezeném prostředí. Předpokládáme dále, že interakce je zprostředkována jen elektrickým polem, tj.  $\text{rot } \mathbf{E} = 0$  a jde tedy o podélné vlnění s  $\delta \mathbf{E} \parallel \mathbf{k}$ . Souřadnicovou soustavu budeme volit s osou  $x$  ve směru šíření vlnění, tj.

$$\mathbf{k} = (k, 0, 0); \quad \delta \mathbf{E} = (\delta E, 0, 0). \quad (5.118)$$

Obecná porucha bude mít tvar

$$\psi = \psi_0 + \delta \psi = \psi_0 + \psi_1 e^{ikx - i\omega t}. \quad (5.119)$$

Budeme sledovat jen pohyby elektronů, pohyby iontů v okolí plazmové frekvence zanedbáme. Proto bude mít výchozí soustava rovnic tvar:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} - \frac{e}{m} \mathbf{E} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} &= 0, \\ \text{div } \mathbf{E} &= -\frac{en}{\epsilon_0}, \end{aligned} \quad (5.120)$$

$$n(t, \mathbf{x}) = \int f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) d^3 \mathbf{v},$$

kde  $f$  je rozdělovací funkce elektronů. Poznamenejme, že rychlost  $\mathbf{v}$  zde nemá význam vystředované rychlosti proudění, ale význam fázové proměnné,  $f = f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})$ . Z celé sady Maxwellových rovnic postačí rovnice pro elektrické pole ve tvaru divergence. Je to dáno tím, že neuvažujeme magnetické pole, porucha elektrického pole je rovnoběžná se směrem šíření a jde vlastně o jednorozměrný problém. V přítomnosti magnetického pole bychom samozřejmě museli využít rovnici  $\text{rot } \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$ .

Jako první krok provedeme linearizaci výchozích rovnic (5.120) pomocí perturbací

$$f = f_0 + \delta f; \quad \mathbf{E} = \delta \mathbf{E}; \quad n = n_0 + \delta n. \quad (5.121)$$

Nulové řešení budeme předpokládat klidové homogenní (nezávislé na  $t$ ,  $\mathbf{x}$ ), rozdělovací funkci  $f_0$  za Gaussovu

$$f_0(\mathbf{v}) \equiv n_0 \left( \frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} \exp \left[ -\frac{m\mathbf{v}^2}{2k_B T} \right], \quad (5.122)$$

kterou můžeme rozložit na parciální funkce

$$f_0(\mathbf{v}) \equiv n_0 f_{0x}(v_x) f_{0y}(v_y) f_{0z}(v_z), \quad (5.123)$$

kde

$$f_{0l}(v_l) \equiv \left( \frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{1/2} \exp \left[ -\frac{mv_l^2}{2k_B T} \right]. \quad (5.124)$$

Výsledek linearizace výchozích rovnic (5.120) je v prvním řádu

$$\frac{\partial \delta f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \delta f}{\partial \mathbf{x}} - \frac{e}{m} \delta \mathbf{E} \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}} = 0, \lim_{x \rightarrow \infty}$$

$$\operatorname{div} \delta \mathbf{E} = -\frac{e \delta n}{\varepsilon_0},$$

$$\delta n(t, \mathbf{x}) = \int \delta f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) d^3 \mathbf{v}.$$

Předpokládejme nyní existenci perturbací ve tvaru vlny ve směru osy  $x$ , tj.  $\delta \psi = \psi_1 e^{ikx - i\omega t}$ :

$$-i\omega \delta f + i v_x k \delta f - \frac{e}{m} \delta E_x \cdot \frac{\partial f_0}{\partial v_x} = 0,$$

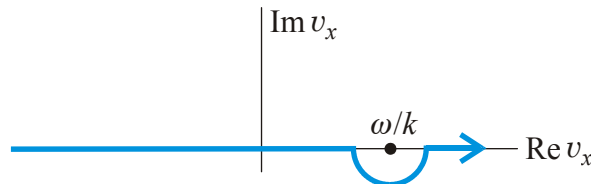
$$ik \delta E_x = -\frac{e \delta n}{\varepsilon_0},$$

$$\delta n(t, x) = \int \delta f d^3 \mathbf{v}.$$

Do poslední rovnice dosadíme za  $\delta n$  z druhé rovnice a za  $\delta f$  z první rovnice a provedeme integraci pře proměnné  $v_y$  a  $v_z$ . Výsledkem je disperzní relace:

$$k = -\omega_p^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{df_{0x}/dv_x}{\omega - kv_x} dv_x; \quad \omega_p^2 \equiv \frac{e^2 n_0}{m \varepsilon_0}.$$

Všechny veličiny se týkají elektronové složky. Hlavním problémem je pól prvního řádu v hodnotě  $v_x = \omega/k$ . Integrační cestu nelze uzavřít v horní ani dolní komplexní polorovině, protože integrand v nekonečnu na imaginární ose nekonverguje k nule (jde o Boltzmannovo rozdělení  $\exp[-\alpha v^2]$ ). Z komplexní analýzy je známo (viz dodatek A3), že správná integrační cesta má tvar podle obrázku:



Pro tuto cestu je integrál z komplexní funkce  $F$  roven

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(x) dx = V.P. \left( \int_{-\infty}^{+\infty} F(x) dx \right) + \pi i \cdot \operatorname{Res}(F) = I_1 + I_2.$$

První část je tzv. hlavní Cauchyova hodnota ( $V.P.$ ) a počítá se tak, jako by funkce byla reálná a pól neexistoval, tedy integrace v limitě, kdy obě meze rostou k nekonečnu. Výsledný integrál  $I_1$  není analyticky řešitelný, proto při výpočtu využijeme rozvoj integrované funkce do do geometrické řady (pro fázové rychlosti  $\omega/k$  velké ve srovnání s tepelnou rychlostí částic  $v_x$  nebo pro dostatečně vysoké frekvence):

$$I_1 \equiv V.P. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{df_{0x}/dv_x}{\omega - kv_x} dv_x = \frac{1}{\omega} V.P. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{df_{0x}/dv_x}{1 - \frac{kv_x}{\omega}} dv_x =$$

$$= \frac{1}{\omega} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ 1 + \left( \frac{kv_x}{\omega} \right) + \left( \frac{kv_x}{\omega} \right)^2 + \left( \frac{kv_x}{\omega} \right)^3 + \dots \right] \frac{df_{0x}}{dv_x} dv_x.$$

Nyní provedeme integraci per partes, na hranicích integračního oboru je rozdělovací funkce  $f_{0x}$  nulová:

$$\begin{aligned} I_1 &= -\frac{k}{\omega^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ 1 + 2 \left( \frac{kv_x}{\omega} \right)^1 + 3 \left( \frac{kv_x}{\omega} \right)^2 + \dots \right] f_{0x} dv_x = \\ &= -\frac{k}{\omega^2} \left[ 1 + 2 \left( \frac{k}{\omega} \right) \langle v_x \rangle + 3 \left( \frac{k}{\omega} \right)^2 \langle v_x^2 \rangle + \dots \right] = -\frac{k}{\omega^2} \left[ 1 + 3 \frac{k^2}{\omega^2} \frac{k_B T}{m} + \dots \right] \end{aligned}$$

Integrály tohoto typu z Boltzmannova rozdělení se řeší ve statistické fyzice [3]. Nyní je třeba najít druhou část, která je  $\pi i$  násobkem rezidua integrované funkce v singularitě. Postup hledání reziduí naleznete v dodatku A3.

$$I_2 = \pi i \cdot \text{Res} \left( \frac{df_{0x}/dv_x}{\omega - kv_x} \right) = -\frac{\pi i}{k} \cdot \text{Res} \left( \frac{df_{0x}/dv_x}{v_x - \omega/k} \right) = -i \frac{\pi}{k} \frac{df_{0x}}{dv_x} \Big|_{\frac{\omega}{k}} = i \frac{\pi}{k} \frac{m}{k_B T} \frac{\omega}{k} f_{0x}(\omega/k).$$

V posledním výrazu jsme provedli derivaci Boltzmannova rozdělení. Nyní obě vypočtené části integrálu dosadíme do disperzní relace (5.127):

$$k = -\omega_p^2 [I_1 + I_2] = -\omega_p^2 \left[ -\frac{k}{\omega^2} \left( 1 + 3 \frac{k^2}{\omega^2} \frac{k_B T}{m} + \dots \right) + i \frac{\pi m \omega}{k^2 k_B T} f_{0x}(\omega/k) \right].$$

Po triviální úpravě získáme disperzní rovnici ve tvaru

$$\omega^2 = \omega_p^2 + 3 \frac{\omega_p^2}{\omega^2} v_t^2 k^2 + \dots - i \frac{\pi \omega_p^2}{v_t^2} \frac{\omega^3}{k^3} f_{0x}(\omega/k), \quad (5.128)$$

kde jsme označili

$$\omega_p^2 \equiv \frac{n_0 e^2}{m \varepsilon_0}; \quad v_t^2 \equiv \frac{k_B T}{m}.$$

Plazmová frekvence i tepelná rychlost se týká elektronů. První člen disperzní relace představuje nám již známé plazmové oscilace. Druhý člen je způsoben tepelnými procesy a je-li malý oproti prvnímu, lze v něm psát  $\omega \sim \omega_p$  a přejde ve známý druhý člen disperzní relace plazmových vln. Poslední člen je zcela nový a reprezentuje Landauův útlum, zpravidla je oproti oběma prvním členům velmi malý.

Toho můžeme využít při odmocnění výrazu (5.128):

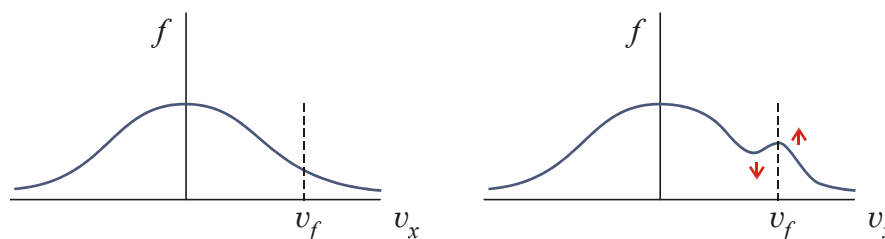
$$\begin{aligned} \omega^2 &= a + ib; & b \ll a; & \Rightarrow \\ \omega^2 &= A \exp[i\varphi]; & A = \sqrt{a^2 + b^2} \sim a; & \varphi = \text{arctg}(b/a) \approx \frac{b}{a} \Rightarrow \\ \omega^2 &\approx a \exp\left[i \frac{b}{a}\right] & \Rightarrow & \omega \approx \sqrt{a} \cos\left(\frac{b}{2a}\right) + i \sqrt{a} \sin\left(\frac{b}{2a}\right) \approx \sqrt{a} + i \frac{b}{2\sqrt{a}}. \end{aligned}$$

Výsledná frekvence bude (imaginární část odpovídající  $b$  ve výrazu (5.128) je záporná)

$$\omega \approx \omega_0 - i \frac{\pi \omega_p^2}{2 v_t^2 \omega_0} \frac{\omega^3}{k^3} f_{0x}(\omega/k); \quad \omega_0 \equiv \sqrt{\omega_p^2 + 3 \frac{\omega_p^2}{\omega^2} v_t^2 k^2 + \dots}. \quad (5.129)$$

### Fyzikální interpretace Landauova útlumu

Ze vztahu (5.129) je zřejmé, že imaginární část frekvence je záporná a jedná se skutečně o útlum. Odvození útlumu Landauem v *bezesrážkovém* plazmatu za pomoci integrace funkce komplexní proměnné bylo velkým překvapením. Později byl útlum nalezen experimentálně. Plazmová vlna je tlumena, aniž by docházelo ke srážkám částic. Podobně jako surfař surfuje na vodní hladině, můžeme si zjednodušeně představit elektrony surfující na plazmové vlně elektrického pole. Elektrony s příliš malou rychlostí se na vlně pohupují a nevyměňují s ní energii. Také elektrony s příliš velkou rychlostí nevyměňují s vlnou energii. Jen elektrony s rychlostí blízkou fázové rychlosti plazmové vlny (oblast pólu při integraci) intenzivně s vlnou vyměňují energii. Obdobně jako surfař jsou elektrony vlnou nesený. Pokud jejich rychlost byla nepatrně nižší než fázová, získávají energii na úkor vlny. Pokud je jejich rychlost vyšší než fázová, jsou bržděné, svou energii ztrácejí, a předávají ji vlně.



Podle Boltzmannova rozdělení je statisticky více elektronů s nižší rychlostí než elektronů s vyšší rychlostí. Tím převládá proces tlumení vlny, sání energie z ní. To je přibližná podstata Landauova útlumu. Boltzmannovo rozdělení je deformováno, vzniká perturbace způsobující sekundární pík (právě ten jsme počítali jako  $\delta f$ ). Na rozdělení rychlostí se objevují dvě maxima, což ve výsledku vede k dvojsvazkové (Bunemannově) nestabilitě. Pro velmi nízké fázové rychlosti plazmové vlny je možný i Landauův útlum způsobený ionty.

### Maximální podélné pole $\delta E$

Z rovnice  $\text{div } \mathbf{E} = -e\delta n/\varepsilon_0$  můžeme odhadnout maximální možnou velikost generovaného pole:

$$ik\delta E = -e\delta n/\varepsilon_0 \quad \Rightarrow \quad (\delta E)_{\max} < \left| i \frac{e\delta n}{k\varepsilon_0} \right| < \frac{en_0}{k\varepsilon_0} = \frac{m\omega_p^2}{ke} = \frac{\omega_p}{k} \frac{m\omega_p}{e} < \frac{cm\omega_p}{e}.$$

Pro maximální dosažitelné pole tedy platí relace

$$\boxed{(\delta E)_{\max} < \frac{cm\omega_p}{e}} \quad (5.130)$$

### Urychlovače LWFA (Laser Wake Field Accelerator)

Elektrony jsou pro výzkumné i praktické účely většinou urychlovány buď na kruhových drahách v betatronu nebo v synchrotronu. K největším urychlovačům tohoto typu patří americký Tevatron s obvodem 6,3 km. Další možností jsou lineární urychlovače s proměnným elektrickým polem na radiových frekvencích. Typické urychlovací pole těchto zařízení nemůže výrazně přesáhnout 100 MV/m. Na konci 70. let navrhli T. Tajima a D. Dawson zcela nový typ urychlovače, ve kterém by elektrony byly urychleny na plazmové vlně podobně jako surfař na vlně v oceánu. Tato zajímavá myšlenka čekala na praktickou realizaci více jak čtvrt století. Dnes se zdá, že nic nestojí v cestě urychlovat elektrony v urychlovači nové generace přímo na pracovním stole.

Plazmová vlna může vzniknout při průchodu intenzivního laserového pulzu plynným prostředím. Pulz ionizuje plyn na plazma a s sebou strhává lehké elektrony. Za pulzem vzniká brázda zvlněné koncentrace elektronů a podélného elektrického pole – plazmová vlna.

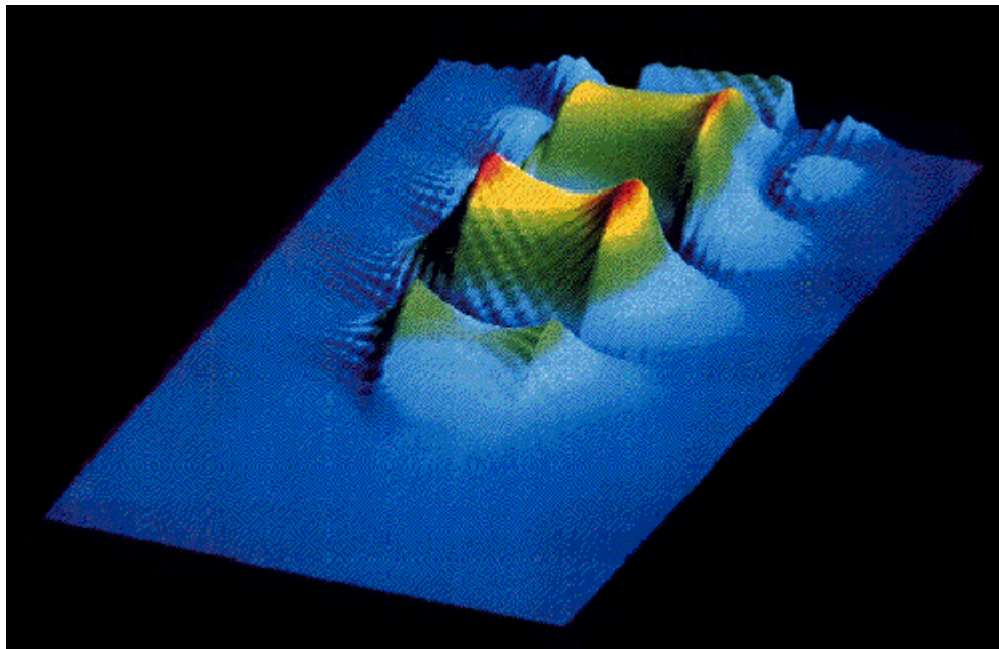


V angličtině se toto pole nazývá „wakefield“, což by snad šlo přeložit jako brázdové pole, případně pole v brázdě.

V roce 1979 napadlo T. Tajima a D. Dawsona, že by toto pole při vhodné hybnosti a energii mohlo urychlovat elektron, který by byl nesený na vlně elektrického pole podobně jako surfař na vodní vlně. Vlnou jsou ovšem zachyceny jen některé z elektronů a ty vytvoří shluky urychlených částic. To je základní princip urychlovače LWFA (Laser Wake Field Accelerator). V praktických zařízeních se využívají lasery s krátkým pulsem ( $\leq 1$  ps) a velkou intenzitou ( $\geq 10^{18}$  W/cm<sup>2</sup>). Vzniklé brázdové pole má typicky intenzitu 100 GV/m, což je o tři řády více než v konvenčních urychlovačích. Shluky elektronů o velikosti  $10^9$  elektronů (stovky pikocoulombů) mohou být urychleny na energie až 60 MeV. Jde ovšem jen o malý zlomek přítomných elektronů a parametry plazmatu a brázdového pole lze jen obtížně ovlivnit. To je hlavní nevýhodou dosud postavených zařízení, která měla spíše studijní charakter a nebylo je možné prakticky využít.

Situace se změnila po roce 2004, kdy byly navrženy urychlovače LWFA s více laserovými pulzy. Kromě základního pulzu, který generuje laserové plazma s brázdovým polem, lze dvěma dalšími pomocnými pulzy vytvořit za pulzem stojatou vlnu (rázy). Podélná složka elektrického pole může předurychlit elektron, příčná složka může fokusovat shluk elektronů. Pomocnými pulzy můžeme ovlivňovat parametry plazmatu v brázdě za základním laserovým pulzem. Urychlování je v této konfiguraci dvoustupňové. Elektrony jsou nejprve urychleny v pomalu se pohybující ( $\Delta\omega/2k_0$ ) stojaté vlně generované pomocnými pulzy a teprve poté v rychlé ( $\sim c$ ) brázdové vlně za hlavním pulzem. V současných systémech je brázdové pole až 270 GV/m a bylo dosaženo energií až 250 MeV na pouhých dvou milimetrech dráhy. Spektrum urychlených elektronů je monoenergetické.

Urychlovače LWFA znamenají revoluci v možnostech urychlování nabitých částic. Hlavní výhodou jsou především malé rozměry urychlovačů tohoto typu, některé mohou být postaveny přímo na pracovním stole. Předurychlení pomocnými pulzy umožňuje ovlivňování parametrů urychlení, bez kterého nejsou možné praktické aplikace. Vývoj probíhá na Coloradské univerzitě, UCB, UCLA, LLNL a dalších pracovištích.



Wakefield – brázdové pole. Za laserovým pulzem vzniká při průchodu prostředím typické zvlněné podélné pole. Na obrázku je různou barvou znázorněna velikost pole.



**5.4.3 Landauův útlum na iontech**

Nebude ke zkoušce, dopíšu o prázdninách

**5.4.4 Bernsteinovy módy**

Nebude ke zkoušce, dopíšu o prázdninách

**5.4.5 Parametrické nestability**

Nebude ke zkoušce, dopíšu o prázdninách

**5.4.6 Modulační nestability**

Nebude ke zkoušce, dopíšu o prázdninách

**DODATEK A – UŽITEČNÉ VZTAHY**

Ve vztazích je označeno  $n! = n(n-1)\dots 1$ ;  $n!! = n(n-2)(n-4)\dots 1$ .

**A1. Některé integrály a řady**

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-ax} dx = \frac{n!}{a^{n+1}}; a > 0; n = 1, 2, \dots \quad (\text{A.1})$$

$$\int_0^{\infty} x^{2n} e^{-ax^2} dx = \frac{(2n-1)!! \sqrt{\pi}}{2^{n+1} a^{(2n+1)/2}}; a > 0; n = 1, 2, \dots \quad (\text{A.2})$$

$$\int_0^{\infty} x^{2n+1} e^{-ax^2} dx = \frac{n!}{2a^{n+1}}; a > 0; n = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{A.3})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}; a > 0 \quad (\text{Gaussův integrál}) \quad (\text{A.4})$$

$$\int_0^{\infty} e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}}; a > 0 \quad (\text{A.5})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2+bx} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-b^2/4a}; a > 0 \quad (\text{A.6})$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\arccos\left(\frac{x}{a}\right) \quad (\text{A.7})$$

$$\int_0^{\infty} \frac{x^3}{e^x+1} dx \cong 5.6822; \quad \int_0^{\infty} \frac{x^3}{e^x-1} dx = \frac{\pi^4}{15}. \quad (\text{A.8})$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}; |q| < 1 \quad (\text{součet geometrické řady}) \quad (\text{A.9})$$

$$V_{2N} = \frac{\pi^N}{N!} R^{2N}; \quad (\text{objem koule v sudém počtu dimenzí}) \quad (\text{A.10})$$

## A2. Vektorový součin a některé vektorové identity

Při úpravách výrazů s vektorovým součinem je někdy výhodný zápis pomocí Levi-Civitova tenzoru. Jde o totálně antisymetrický tenzor 3. řádu, který má jedinou nezávislou složku

$$\varepsilon_{123} = 1; \quad \varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{ikj} = -\varepsilon_{jik} = -\varepsilon_{kji}. \quad (\text{A.11})$$

Složky tohoto tenzoru mají hodnotu +1, -1 nebo 0. Všechny složky s dvěma nebo více shodnými indexy jsou nutně nulové (základní vlastnost antisymetrických matic, například  $\varepsilon_{112}$ ,  $\varepsilon_{233}$ ,  $\varepsilon_{222}$ , ...). Ukažme nulovost například pro složku  $\varepsilon_{112}$ : Zaměňme první dva indexy, z antisymetrie platí

$$\varepsilon_{112} = -\varepsilon_{112} \quad \Rightarrow \quad 2\varepsilon_{112} = 0 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_{112} = 0.$$

Pro Levi-Civitův tenzor platí velmi užitečný vztah:

$$\varepsilon_{kij} \varepsilon_{klm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl} \quad (\text{A.12})$$

Přes index  $k$  se automaticky sčítá. Důkaz je možné provést buď z úvah o symetrii tenzoru, nebo prostým rozepsáním do složek. Vektorový součin lze pomocí Levi-Civitova tenzoru definovat takto:

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}; \quad c_k = \varepsilon_{klm} a_l b_m. \quad (\text{A.13})$$

Z celého dvojného součtu jsou vždy nenulové dva členy, například pro první složku máme

$$c_1 = \varepsilon_{123} a_2 b_3 + \varepsilon_{132} a_3 b_2 = a_2 b_3 - a_3 b_2.$$

Ukažme si typické výpočty na třech jednoduchých příkladech:

### ■ Dvojný vektorový součin $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$

$$\begin{aligned} [\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})]_k &= \varepsilon_{klm} a_l (\mathbf{b} \times \mathbf{c})_m = \varepsilon_{klm} a_l \varepsilon_{mno} b_n c_o = \varepsilon_{mkl} \varepsilon_{mno} a_l b_n c_o = \\ &= (\delta_{kn} \delta_{lo} - \delta_{ko} \delta_{ln}) a_l b_n c_o = a_l b_k c_l - a_l b_l c_k = b_k (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - c_k (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \Rightarrow \\ \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) &= \mathbf{b} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}). \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

### ■ Dvojná rotace vektorového pole $\text{rot rot } \mathbf{A}$

$$\begin{aligned} [\text{rot}(\text{rot } \mathbf{A})]_k &= \varepsilon_{klm} \partial_l (\text{rot } \mathbf{A})_m = \varepsilon_{klm} \partial_l \varepsilon_{mno} \partial_n A_o = \varepsilon_{mkl} \varepsilon_{mno} \partial_l \partial_n A_o = \\ &= (\delta_{kn} \delta_{lo} - \delta_{ko} \delta_{ln}) \partial_l \partial_n A_o = \partial_l \partial_k A_l - \partial_l \partial_l A_k = \partial_k (\partial_l A_l) - (\partial_l \partial_l) A_k = \partial_k \text{div } \mathbf{A} - \Delta A_k \Rightarrow \\ \text{rot}(\text{rot } \mathbf{A}) &= \text{grad div } \mathbf{A} - \Delta \mathbf{A}. \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

### ■ Divergence vektorového součinu

$$\begin{aligned} \text{div}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) &= \partial_k \varepsilon_{klm} a_l b_m = \varepsilon_{klm} (\partial_k a_l) b_m + \varepsilon_{klm} a_l (\partial_k b_m) = \mathbf{b} \cdot \text{rot } \mathbf{a} - \mathbf{a} \cdot \text{rot } \mathbf{b} \Rightarrow \\ \text{div}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) &= \mathbf{b} \cdot \text{rot } \mathbf{a} - \mathbf{a} \cdot \text{rot } \mathbf{b} \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

### ■ Člen zamrzání v magnetohydrodynamice $\text{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$

$$[\text{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{B})]_k = \varepsilon_{klm} \partial_l (\mathbf{v} \times \mathbf{B})_m = \varepsilon_{klm} \partial_l \varepsilon_{mno} v_n B_o = \varepsilon_{mkl} \varepsilon_{mno} \partial_l (v_n B_o) =$$

$$\begin{aligned}
&= (\delta_{kn}\delta_{lo} - \delta_{ko}\delta_{ln}) \left( \frac{\partial v_n}{\partial x_l} B_o + v_n \frac{\partial B_o}{\partial x_l} \right) = \frac{\partial v_k}{\partial x_l} B_l + v_k \frac{\partial B_l}{\partial x_l} - \frac{\partial v_l}{\partial x_l} B_k - v_l \frac{\partial B_k}{\partial x_l} = \\
&= (\mathbf{B} \cdot \nabla) v_k + v_k \operatorname{div} \mathbf{B} - B_k \operatorname{div} \mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \nabla) B_k \Rightarrow \\
&\quad \operatorname{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{v} - \mathbf{B} \operatorname{div} \mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{B} . \tag{A.17}
\end{aligned}$$

■ Lorentzova síla  $Q \mathbf{v} \times \mathbf{B}$

$$\begin{aligned}
F_k &= [Q \mathbf{v} \times \mathbf{B}]_k = [Q \mathbf{v} \times (\operatorname{rot} \mathbf{A})]_k = \varepsilon_{klm} v_l (\nabla \times \mathbf{A})_m = \varepsilon_{klm} v_l \varepsilon_{mno} \partial_n A_o = \\
&= \varepsilon_{mkl} \varepsilon_{mno} v_l \partial_n A_o = (\delta_{kn}\delta_{lo} - \delta_{ko}\delta_{ln}) v_l \partial_n A_o = v_l \partial_k A_l - v_l \partial_l A_k \Rightarrow \\
&\quad F_k = Q [\mathbf{v} \times \operatorname{rot} \mathbf{A}]_k = v_l \left( \frac{\partial A_l}{\partial x_k} - \frac{\partial A_k}{\partial x_l} \right) . \tag{A.18}
\end{aligned}$$

### A3. Základní vztahy z komplexní analýzy

#### A4. Některé speciální funkce

**Besselovy funkce** – jsou řešenými Laplaceovy nebo Helmholtzovy rovnice ve válcových souřadnicích

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - m^2) y = 0. \quad (\text{A.19})$$

Obecné řešení má tvar

$$y(x) = c_1 J_m(x) + c_2 Y_m(x). \quad (\text{A.20})$$

Funkce  $J_m$  nazýváme Besselovy funkce prvního druhu a mají v počátku konečné hodnoty. Funkce  $Y_m$  nazýváme Besselovy funkce druhého druhu a v počátku jsou singulární. Funkce  $J_0(x)$  koresponduje ve válcových souřadnicích s funkcí kosinus z kartézských souřadnic a funkce  $J_1(x)$  koresponduje se sinem. Platí mezi nimi i obdobný vztah:

$$\frac{d J_0(x)}{dx} = -J_1(x). \quad (\text{A.21})$$

Funkce prvního druhu lze jednoduše zapsat pomocí řady, pro druhý druh je přehlednější integrální vyjádření:

$$J_m(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+m)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+m}, \quad (\text{A.22})$$

$$Y_m(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(x \sin \theta - n\theta) d\theta - \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left[ e^{mt} + (-1)^m e^{-mt} \right] e^{-x \operatorname{sh} t} dt.$$

Besselovy funkce lze bez problémů definovat i pro neceločíselný index  $m$  (faktoriály v definiční řadě nahradí  $\Gamma$  funkce) nebo pro komplexní argument. Z komplexních argumentů je nejdůležitější ryze imaginární argument ( $x \rightarrow ix$ ). V tomto případě rovnice (A.19) přejde v

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} - (x^2 + m^2) y = 0, \quad (\text{A.23})$$

jejímž řešením je analogie hyperbolických funkcí

$$y(x) = c_1 I_m(x) + c_2 K_m(x), \quad (\text{A.24})$$

kde  $I_m$ ,  $K_m$  nazýváme hyperbolické neboli modifikované Besselovy funkce. Funkce  $I_m$  mají konečné hodnoty v počátku a v nekonečnu divergují (analogicky jako  $\exp[x]$ ), snadno se definují pomocí řady. Naopak funkce  $K_m$  divergují v počátku a v nekonečnu se blíží nule (analogicky jako  $\exp[-x]$ ) a jednodušší je jejich integrální vyjádření:

$$I_m(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!(k+m)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+m}; \quad (\text{A.25})$$

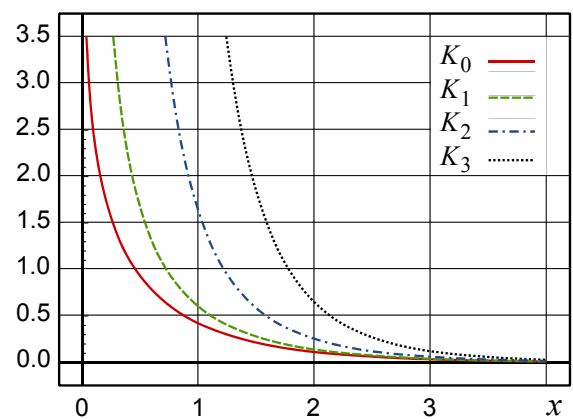
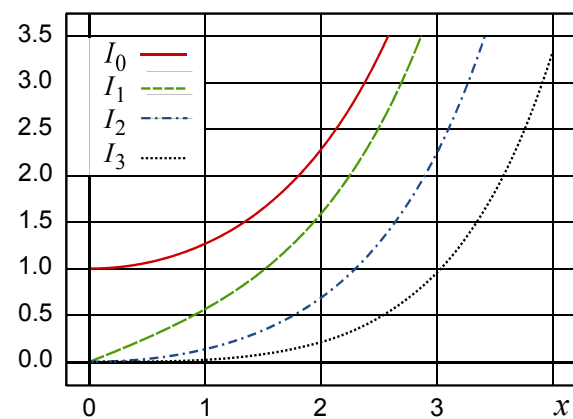
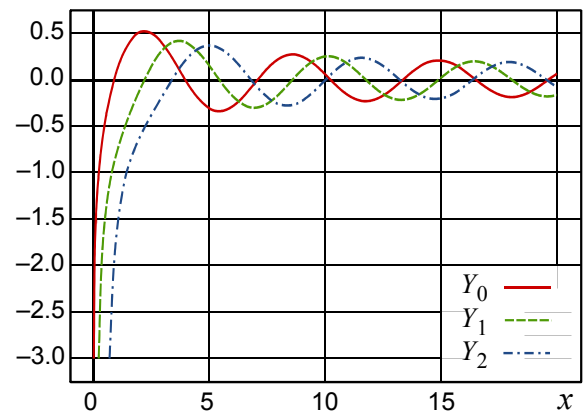
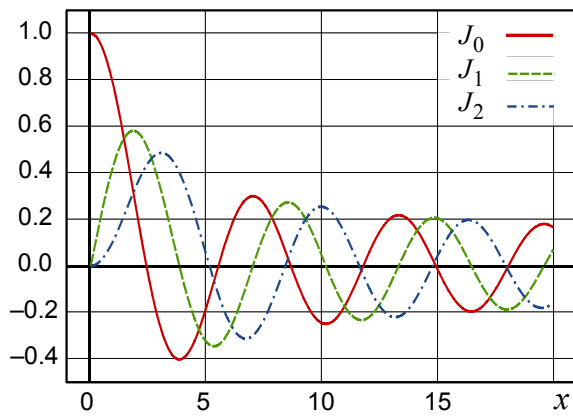
$$K_m(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{(m-1/2)!} \left(\frac{x}{2}\right)^m \int_1^{\infty} e^{-tx} (t^2 - 1)^{m-1/2} dt$$

Asymptotické vztahy v okolí počátku ( $x \ll 1$ ):

$$\begin{aligned}
 J_m(x) &\approx \frac{1}{m!} \left(\frac{x}{2}\right)^m, \\
 Y_m(x) &\approx \frac{(m-1)!}{\pi} \left(\frac{x}{2}\right)^{-m}; \quad m > 0, \\
 I_m(x) &\approx \frac{1}{m!} \left(\frac{x}{2}\right)^m, \\
 K_m(x) &\approx \frac{(m-1)!}{\pi} \left(\frac{x}{2}\right)^{-m}; \quad m > 0.
 \end{aligned}
 \tag{A.26}$$

Asymptotické vztahy v nekonečnu ( $x \gg 1$ ):

$$\begin{aligned}
 J_m(x) &\approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{m\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right), \\
 Y_m(x) &\approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{m\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right), \\
 I_m(x) &\approx \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^x, \\
 K_m(x) &\approx \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x}.
 \end{aligned}
 \tag{A.27}$$



**Kulové funkce** – báze pro sféricky symetrický potenciál v kvantové teorii, viz [2]. Jsou vhodné pro rozvoje úhlových částí funkcí ve sférických souřadnicích. Kulové funkce jsou definovány vztahy ( $\varphi$  je azimutální,  $\theta$  polární úhel ve sférických souřadnicích)

$$Y_{lm}(\varphi, \theta) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi} P_{lm}(\cos\theta); \quad (A.28)$$

$$P_{lm}(x) \equiv \frac{(1-x^2)^{m/2}}{2^l l!} \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}} (x^2-1)^l; \quad l=0, 1, 2, \dots; \quad |m| \leq l; \quad m=0, \pm 1, \dots$$

Polynomy  $P_{lm}$  se nazývají přidružené Legendreovy polynomy. Pro  $m=0$  se nazývají Legendreovy polynomy:

$$P_l(x) \equiv \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2-1)^l; \quad l=0, 1, 2, \quad (A.29)$$

Jiný způsob, jak zapsat Legendreův polynom je v komplexní rovině za pomoci křivkového integrálu po křivce, která proti směru hodinových ručiček oběhne počátek souřadnic  $z, t \in \mathbb{C}$ :

$$P_l(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} (1-2tz+t^2)^{-1/2} t^{-l-1} dt. \quad (A.30)$$

Pro Legendreovy polynomy platí některé užitečné vztahy, například

$$\int_{-1}^{+1} P_l(x) dx = 2\delta_{0l}; \quad \int_{-1}^{+1} x P_l(x) dx = \frac{2}{3} \delta_{1l}, \quad (A.31)$$

v prvním případě je tedy nenulový jen integrál z  $P_0(x)$ , v druhém případě z  $P_1(x)$ . Je to zjevné ze vztahu (A.29). Jiným užitečným výrazem je rozvoj

$$\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\min^l(r, r')}{\max^{l+1}(r, r')} P_l(\cos\theta), \quad (A.32)$$

kde  $\theta$  je úhel mezi vektory  $\mathbf{r}, \mathbf{r}'$ .

**Chybová funkce** – funkce, pomocí níž lze vyjádřit první Rosenbluthův potenciál  $H$  pro Maxwellovo rozdělení.

$$\phi(x) \equiv \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\xi^2} d\xi \quad (A.33)$$

**Chandrasekharova funkce** – funkce vystupující v dynamickém třecím členu Fokkerovy-Planckovy rovnice pro Maxwellovo rozdělení. Pomocí této funkce se popisují *runaway* řešení.

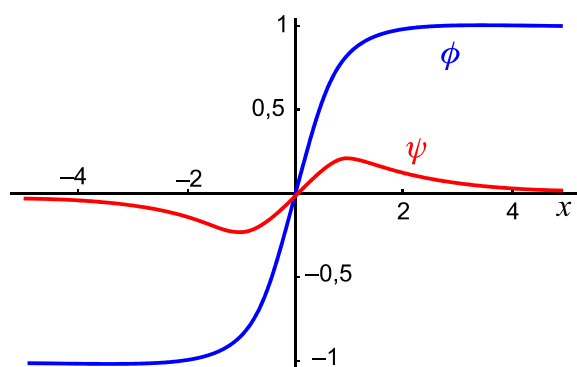
$$\psi(x) \equiv \frac{\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \xi^2 e^{-\xi^2} d\xi}{x^2}. \quad (A.34)$$

Mezi Chandrasekharovou funkcí a chybovou funkcí platí jednoduchý vztah:

$$\psi(x) = \frac{\phi - x\phi'}{2x^2}. \quad (A.35)$$

Využijeme-li, že  $\phi' = 2e^{-x^2}/\sqrt{\pi}$ , můžeme snadno vztah obrátit:

$$\phi = 2x^2\psi + \frac{2x}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}. \quad (\text{A.36})$$





### A5. Výpočet Rosenbluthových potenciálů pro Maxwellovo rozdělení rychlostí

Určeme nyní oba Rosenbluthovy potenciály pro Maxwellovo rozdělení terče, tedy výrazy

$$H(\mathbf{v}_\alpha) \equiv \int \frac{f_\beta}{|\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v}_\beta|} d^3 \mathbf{v}_\beta; \quad G(\mathbf{v}_\alpha) \equiv \int |\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v}_\beta| f_\beta d^3 \mathbf{v}_\beta, \quad (\text{A.37})$$

kde index  $\alpha$  označuje sledovanou částici a  $\beta$  částici terče. Rozdělení  $f_\beta$  předpokládáme Maxwellovo:

$$f_\beta = n_\beta \left( \frac{m_\beta}{2\pi k_B T_\beta} \right)^{3/2} e^{-\frac{mv_\beta^2}{2k_B T_\beta}}. \quad (\text{A.38})$$

#### Výpočet potenciálu H

Z izotropie terče (funkce  $f_\beta$ ) plyne, že výsledný potenciál může záviset jen na velikosti rychlosti  $v_\alpha$ . Jmenovatel integrandu rozvineme do Legendreových polynomů podle vztahu (A.32):

$$H(v_\alpha) \equiv \int \frac{f_\beta}{|\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v}_\beta|} d^3 \mathbf{v}_\beta = \sum_{l=0}^{\infty} \iiint f_\beta(v_\beta) \frac{\min^l(v_\alpha, v_\beta)}{\max^{l+1}(v_\alpha, v_\beta)} P_l(\cos \theta) v_\beta^2 \sin \theta d\varphi d\theta dv_\beta.$$

Integrace přes azimutální úhel  $\varphi$  je triviální a dá  $2\pi$ . Integrace přes úhel  $\theta$  mezi vektory  $\mathbf{v}_\alpha, \mathbf{v}_\beta$  je také jednoduchá. Budeme substituovat  $\cos \theta = x$ :

$$H(v_\alpha) = 2\pi \sum_{l=0}^{\infty} \left[ \int_0^\infty \frac{v_\beta^2 \min^l(v_\alpha, v_\beta)}{\max^{l+1}(v_\alpha, v_\beta)} \left( \int_{-1}^1 P_l(x) dx \right) f_\beta(v_\beta) dv_\beta \right].$$

Podle vztahu (A.31) je ale integrál z Legendreova polynomu nenulový jen pro  $l=0$  a má hodnotu 2. Z celé řady tedy zůstane jen nultý člen:

$$H(v_\alpha) = 4\pi \int_0^\infty \frac{v_\beta^2 f_\beta(v_\beta)}{\max(v_\alpha, v_\beta)} dv_\beta \quad \Rightarrow$$

$$H(v_\alpha) = 4\pi \left[ \frac{1}{v_\alpha} \int_0^{v_\alpha} v_\beta^2 f_\beta(v_\beta) dv_\beta + \int_{v_\alpha}^\infty v_\beta f_\beta(v_\beta) dv_\beta \right]. \quad (\text{A.39})$$

Pól v původním integrálu tak rozdělil integraci na dvě části. Jde o obecný vztah, do kterého lze nyní dosadit jakékoli rozdělení  $f_\beta$ , tedy například Maxwellovo nebo Fermiho-Diracovo rozdělení. V našem případě dosadíme Maxwellovo rozdělení (A.38) a snadno získáme

$$H(v_\alpha) = n_\beta \sqrt{\frac{m_\beta}{2k_B T_\beta}} \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{x} \int_0^x \xi^2 e^{-\xi^2} d\xi + n_\beta \sqrt{\frac{m_\beta}{2k_B T_\beta}} \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}; \quad x \equiv \frac{v_\alpha}{\sqrt{2k_B T_\beta / m_\beta}}.$$

Tento výsledek lze přepsat pomocí definice Chandrasekharovy funkce (A.34) do tvaru

$$H(v_\alpha) = n_\beta \sqrt{\frac{m_\beta}{2k_B T_\beta}} \left[ \frac{2}{x} \psi(x) + \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} \right].$$

Pomocí vztahu (A.36) máme ihned výsledný výraz pro potenciál  $H$ :

$$H(v_\alpha) = \left( \frac{2k_B T_\beta}{m_\beta} \right)^{-1/2} n_\beta \frac{\phi(x)}{x}; \quad x \equiv \frac{v_\alpha}{\sqrt{2k_B T_\beta / m_\beta}}. \quad (\text{A.40})$$

### Výpočet potenciálu G

Postup je obdobný, jen využijeme vztahu

$$|\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v}_\beta| = \frac{|\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v}_\beta|^2}{|\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v}_\beta|} = \frac{v_\alpha^2 - 2v_\alpha v_\beta \cos \theta + v_\beta^2}{|\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v}_\beta|}.$$

Jmenovatele opět rozvineme do řady Legendreových polynomů a postupujeme analogicky jako u potenciálu  $H$ :

$$\begin{aligned} G(v_\alpha) &\equiv \int |\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v}_\beta| f_\beta d^3 \mathbf{v}_\beta = \int \frac{v_\alpha^2 - 2v_\alpha v_\beta \cos \theta + v_\beta^2}{|\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v}_\beta|} f_\beta d^3 \mathbf{v}_\beta = \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \iiint f_\beta(v_\beta) (v_\alpha^2 - 2v_\alpha v_\beta \cos \theta + v_\beta^2) \frac{\min^l(v_\alpha, v_\beta)}{\max^{l+1}(v_\alpha, v_\beta)} P_l(\cos \theta) v_\beta^2 \sin \theta d\varphi d\theta dv_\beta = \\ &= 2\pi \sum_{l=0}^{\infty} \left[ \int_0^\infty \frac{\min^l(v_\alpha, v_\beta)}{\max^{l+1}(v_\alpha, v_\beta)} v_\beta^2 f_\beta(v_\beta) \left( \int_{-1}^1 (v_\alpha^2 - 2v_\alpha v_\beta x + v_\beta^2) P_l(x) dx \right) dv_\beta \right]. \end{aligned}$$

Každá z integrací přes Legendreův polynom ponechá podle vztahu (A.31) jediný nenulový člen z celé řady. Obdobným postupem jako pro potenciál  $H$  získáme

$$G(v_\alpha) = \frac{4\pi v_\alpha}{3} \left[ \int_0^{v_\alpha} \left( 3v_\beta^2 + \frac{v_\beta^4}{v_\alpha^2} \right) f_\beta(v_\beta) dv_\beta + \int_{v_\alpha}^\infty \left( \frac{3v_\beta^3}{v_\alpha} + v_\alpha v_\beta \right) f_\beta(v_\beta) dv_\beta \right]. \quad (\text{A.41})$$

Opět jde o obecný výraz pro jakékoli rozdělení  $f_\beta$ . Pro Maxwellovo rozdělení lze provést výpočet analogicky, jako pro potenciál  $H$ . Výsledek lze opět zapsat za pomoci chybové funkce a její derivace:

$$G(v_\alpha) = \left( \frac{2k_B T_\beta}{m_\beta} \right)^{+1/2} n_\beta \left[ x\phi(x) + \frac{\phi(x)}{2x} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} \right]; \quad x \equiv \frac{v_\alpha}{\sqrt{2k_B T_\beta / m_\beta}}. \quad (\text{A.42})$$

Jednoduše zapsatelná je první derivace tohoto potenciálu podle rychlosti:

$$\frac{\partial G(v_\alpha)}{\partial v_\alpha} = n_\beta [\phi(x) - \psi(x)]. \quad (\text{A.43})$$

## DODATEK B – ZOBECNĚNÉ FUNKCE

### B1. Diracova distribuce

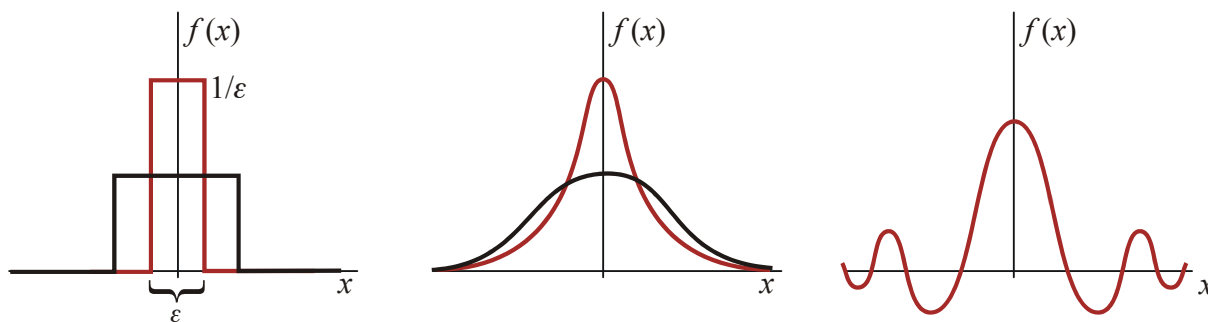
Ve fyzice se velmi často setkáváme s nutností popsat bodový náboj nebo hmotný bod. Náboj či hmotnost částice si představujeme lokalizované v jediném místě, což s sebou nese problém nekonečné hustoty náboje či hmoty v tomto místě. Řešením je zavedení tzv. zobecněných funkcí, zejména Diracovy distribuce. Ukažme si problém na lineární hustotě náboje lokalizovaného v místě  $x = 0$ :

$$\rho(x) = \begin{cases} 0; & x \neq 0 \\ \neq 0 & x = 0. \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

Integrál z hustoty ale musí dát celkový náboj  $Q$ :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x) dx = Q. \quad (\text{B.2})$$

Je jasné, že hustota náboje není „normální“ funkcí. Má nenulovou hodnotu v jediném bodě a integrál z ní by přesto měl dát konečné číslo. Takové funkce ale neexistují, můžeme je zavádět jako limitu posloupností funkcí a jejich význam je jen ve skalárním součinu s jinou, tzv. testovací funkcí.



#### Posloupnost obdélníků

Zaveďme si obdélníkové funkce

$$f_{\varepsilon}(x) \equiv \begin{cases} 1/\varepsilon, & x \in \langle -\varepsilon/2, \varepsilon/2 \rangle; \\ 0, & x \notin \langle -\varepsilon/2, \varepsilon/2 \rangle. \end{cases} \quad (\text{B.3})$$

Všechny obdélníky mají stejnou plochu rovnou jedné a funkce mají zajímavé vlastnosti:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\varepsilon}(x) dx = 1; \quad f_{\varepsilon}(0) = \frac{1}{\varepsilon}; \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_{\varepsilon}(x) = \begin{cases} \infty & \text{pro } x = 0 \\ 0 & \text{pro } x \neq 0 \end{cases}. \quad (\text{B.4})$$

Diracovu distribuci můžeme formálně zavést jako limitu těchto obdélníkových funkcí

$$\delta(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_{\varepsilon}(x). \quad (\text{B.5})$$

#### Posloupnost kopečků (Cauchyových-Lorentzových rozdělení)

Obdélníky z předchozí ukázky nejsou hladké funkce. To ale není nepřekonatelný problém, místo obdélníků můžeme použít funkce spojitě se všemi svými derivacemi podle vztahu

$$f_{\varepsilon}(x) \equiv \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + x^2}. \quad (\text{B.6})$$

Plocha pod těmito funkcemi je rovna jedné pro každé  $\varepsilon$ , protože

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\varepsilon}(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + x^2} dx = \frac{1}{\pi} \left[ \arctan \frac{x}{\varepsilon} \right]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{1}{\pi} \left( \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) = 1. \quad (\text{B.7})$$

Pro malá  $\varepsilon$  se „kopce“ zužují a přitom se zvětšuje jejich výška:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\varepsilon}(x) dx = 1; \quad f_{\varepsilon}(0) = \frac{1}{\pi \varepsilon}; \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_{\varepsilon}(x) = \begin{cases} \infty & \text{pro } x = 0 \\ 0 & \text{pro } x \neq 0 \end{cases}. \quad (\text{B.8})$$

Opět můžeme zavést Diracovu distribuci jako limitu těchto spojitých funkcí:

$$\delta(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_{\varepsilon}(x). \quad (\text{B.9})$$

Cauchy-Lorentzovo rozdělení, ze kterého jsme nyní zkonstruovali Diracovu distribuci popisuje ve spektroskopii tvar spektrálních čar a nebo v teorii vynucených kmitů rezonanční křivku. Je pojmenováno podle francouzského matematika Augustina Cauchyho (1759–1857) a holandského fyzika Hendrika Lorentze (1853–1928).

### Posloupnost Dirichletových jader

Diracovu Distribuci můžeme zavést také pomocí jednoduché funkce

$$f(x) \equiv \frac{\sin x}{x}; \quad f(0) \rightarrow 1; \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \pi.$$

Zavedme posloupnost

$$f_k(x) = \frac{k}{\pi} \frac{\sin kx}{kx}, \quad (\text{B.10})$$

která má jednoduché vlastnosti

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_k(x) dx = 1; \quad f_k(0) = \frac{k}{\pi}; \quad \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = \begin{cases} \infty & \text{pro } x = 0 \\ 0 & \text{pro } x \neq 0 \end{cases}.$$

Diracovu distribuci lze zavést jako limitu funkcí

$$\delta(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x).$$

Poznamenejme, že funkce  $f_k(x)$  jsou známé z důkazu věty o Fourierově rozvoji do řady a nazývají se *Dirichletovo jádro*. Je pojmenováno podle německého matematika Johanna Petera Gustava Lejeunea Dirichleta (1805–1859).

### Fourierův obraz jednotkové funkce

Spočtěme nejprve následující integrál:

$$\int_{-k}^{+k} e^{ikx} dk = \left[ \frac{1}{ix} e^{ikx} \right]_{-k}^{+k} = \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{ix} = 2k \frac{\sin kx}{kx}.$$

Integrál až na koeficient  $\pi/2$  dává Dirichletovo jádro. Diracovu distribuci lze proto napsat jako

$$\delta(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-k}^{+k} e^{ikx} dk = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} dk. \quad (\text{B.11})$$

Integrál v nevládních mezích chápeme právě ve smyslu uvedené limity. Diracova distribuce je tak Fourierovým obrazem jednotkové funkce.

Diracova distribuce nemá vlastnosti běžných funkcí. Přestože je její hodnota nenulová v jediném bodě, dá integrál z ní nenulovou hodnotu. To plyne z limitního charakteru zavedení této distribuce. K jejím základním vlastnostem patří:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) f(0) dx = f(0) \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = f(0). \quad (\text{B.12})$$

Důvod je snad zřejmý. Distribuce  $\delta$  je všude nulová kromě jediného bodu  $x=0$ . Proto výsledek integrálu může ovlivnit jen hodnota funkce  $f$  v počátku. Tu však můžeme vytknout před integrál a dostaneme jako výsledek hodnotu funkce v počátku.

**Poznámka 1.:** Distribuci lze také chápat jako velmi jednoduché zobrazení, které přiřadí funkci její hodnotu v počátku (zobrazení, které přiřadí funkci číslo, se nazývá *funkcionál*).

$$\hat{T}_\delta f(x) \equiv f(0); \quad \text{resp. } f(x) \xrightarrow{T_\delta} f(0).$$

**Poznámka 2.:** Distribuci lze chápat jako funkcional daný skalárním součinem

$$\hat{T}_g f(x) \equiv \langle g | f \rangle;$$

Skalární součin působí na libovolnou funkci  $f$  z tzv. prostoru testovacích funkcí. Funkce  $g$  je pevně daná, definuje toto zobrazení a nazývá se temperovaná distribuce. Čím hezčí vlastnosti budou mít funkce z testovacího prostoru (například budou dostatečně rychle konvergovat k nule na hranicích oblasti), tím horší vlastnosti může mít funkce  $g$  definující zobrazení. Za prostor testovacích funkcí může posloužit například Sobolevův prostor.

**Poznámka 3.:** Často se hledají řešení celých rovnic „ve smyslu skalárního součinu“. Například místo rovnice

$$\Delta \varphi = f$$

řešíme rovnici

$$\langle \Delta \varphi - f | \psi \rangle = 0,$$

kde  $\varphi$  je hledané řešení a  $\psi$  je libovolná funkce z prostoru testovacích funkcí. Tato řešení se nazývají slabá řešení. Jejich třída je mnohem bohatší než byla třída řešení původní rovnice. Nacházená řešení mohou mít „divočejší“ charakter a jsou bližší fyzikální realitě. Jejich hledáním se zabývala vynikající matematika Ladyženská.

## B2. Konvoluce

Na separabilních prostorech (se spočetnou bází) můžeme zobrazení  $\hat{A}|f\rangle = |g\rangle$  psát v konkrétní reprezentaci v maticovém tvaru

$$\sum_l A_{kl} f_l = g_k. \quad (\text{B.13})$$

Jednotkové zobrazení  $\hat{1}|f\rangle = |f\rangle$  je dáno jednotkovou maticí, jejíž prvky tvoří Kroneckerův symbol:

$$\sum_l \delta_{kl} f_l = f_k. \quad (\text{B.14})$$

V případě neseparabilních prostorů je zobrazení dáno funkcí dvou proměnných

$$\int_{\Omega} A(x, y) f(y) dy = g(x). \quad (\text{B.15})$$

Integrál (B.15) se nazývá *konvoluce* a označuje se

$$A^* f \equiv \int_{\Omega} A(x, y) f(y) dy. \quad (\text{B.16})$$

Konvoluce je analogií maticového násobení na neseparabilních prostorech. Roli indexů přebírají spojité proměnné  $x$  a  $y$ . Roli matice přebírá tzv. *jádro konvoluce*  $A(x, y)$ . Speciálním případem konvolucí jsou různé integrální transformace (Laplaceova, Fourierova, Abelova, atd.). Jádrem jednotkového operátoru je Diracova distribuce (je nenulová jen pro  $x = y$ ):

$$\int \delta(x - y) f(y) dy = f(x)$$

Diracova distribuce tak na neseparabilních prostorech přebírá úlohu Kroneckerova symbolu.

### B3. Greenův operátor a Greenova funkce

Napišme maticové elementy jednotkového operátoru v  $x$  reprezentaci (maticové elementy jednotkového operátoru jsou právě Diracovou distribucí):

$$\delta(x - y) = \langle y | \hat{1} | x \rangle = \sum_n \langle y | n \rangle \langle n | x \rangle = \sum_n f_n^*(y) f_n(x).$$

Ve spojitých prostorech

$$\delta(x - y) = \int_k f_k^*(y) f_k(x) dk \quad (\text{B.17})$$

Distribuci lze tak napsat pomocí libovolných bázových funkcí, například pomocí báze

$$|k\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx},$$

dostaneme

$$\delta(x - y) = \frac{1}{2\pi} \int_k e^{-iky} e^{ikx} dk = \frac{1}{2\pi} \int_k e^{ik(x-y)} dk \quad \Rightarrow \quad \delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_k e^{ikx} dk, \quad (\text{B.18})$$

což je výše odvozený vztah (B.11).

### Greenův operátor

Hledejme řešení lineární operátorové rovnice s pravou stranou

$$\hat{L}|\phi\rangle = f. \quad (\text{B.19})$$

Z věty o spektrálním rozvoji víme, že řešení je možné zapsat pomocí vlastních vektorů (tvořili ortonormální bázi) a vlastních ve tvaru

$$|\phi\rangle = \sum_l \frac{1}{\lambda_l} |l\rangle \langle l| f\rangle.$$

Přepišme řešení takto

$$|\phi\rangle = \hat{G}|f\rangle; \quad \hat{G} = \sum_l \frac{1}{\lambda_l} |l\rangle\langle l|. \quad (\text{B.20})$$

Operátor  $\hat{G}$  se nazývá *Greenův operátor* a je inverzním operátorem k operátoru  $\hat{L}$ . V případě operátoru se spojitým spektrem přejde sumace v integraci.

### Greenova funkce

Zabývejme se nyní speciálním případem – rovnicí s lineárním operátorem a nenulovou pravou stranou na prostoru  $L^2$

$$\hat{L}\phi = f. \quad (\text{B.21})$$

Hledejme nejprve řešení pro jednotkový impuls na pravé straně (bude reprezentovaný Diracovou distribucí):

$$\hat{L}G(x) = \delta(x)$$

Toto řešení se nazývá *Greenova funkce*. Obecné řešení rovnice (B.21) je konvolucí Greenovy funkce a pravé strany rovnice

$$\phi(x) = G * f = \int G(x-y)f(y)dy.$$

Důkaz je velmi jednoduchý. Ukážeme, že působením operátoru  $\hat{L}$  na nalezené řešení dostaneme pravou stranu původní rovnice:

$$\hat{L}\phi(x) = \int \hat{L}G(x-y)f(y)dy = \int \delta(x-y)f(y)dy = f(x).$$

## DODATEK C – KŘIVOČARÉ SOUŘADNICE, KŘIVKOVÉ, PLOŠNÉ A OBJEMOVÉ INTEGRÁLY

### C1. Křivočaré souřadnice

V následujících tabulkách je k daným souřadnicím vždy uveden gradient, divergence, rotace a skaální a vektorový Laplaceův operátor. Působení Laplaceova operátoru na vektorové pole lze také určit z vektorové identity  $\Delta \mathbf{K} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{K}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{K})$ .

#### Kartézské souřadnice

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{e}_z \quad (\text{C.1})$$

$$\text{div} \mathbf{K} = \frac{\partial K_x}{\partial x} + \frac{\partial K_y}{\partial y} + \frac{\partial K_z}{\partial z}. \quad (\text{C.2})$$

$$\text{rot} \mathbf{K} = \left( \frac{\partial K_y}{\partial x} - \frac{\partial K_x}{\partial y} \right) \mathbf{e}_x + \left( \frac{\partial K_z}{\partial y} - \frac{\partial K_y}{\partial z} \right) \mathbf{e}_y + \left( \frac{\partial K_z}{\partial x} - \frac{\partial K_x}{\partial z} \right) \mathbf{e}_z \quad (\text{C.3})$$

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad (\text{C.4})$$

$$\Delta \mathbf{K} = \left( \frac{\partial^2 K_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 K_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 K_x}{\partial z^2} \right) \mathbf{e}_x + \left( \frac{\partial^2 K_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 K_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 K_y}{\partial z^2} \right) \mathbf{e}_y + \left( \frac{\partial^2 K_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 K_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 K_z}{\partial z^2} \right) \mathbf{e}_z. \quad (\text{C.5})$$

#### Válcové souřadnice

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{e}_z \quad (\text{C.6})$$

$$\text{div} \mathbf{K} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r K_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial K_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial K_z}{\partial z}. \quad (\text{C.7})$$

$$\text{rot} \mathbf{K} = \left( \frac{1}{r} \frac{\partial K_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial K_\varphi}{\partial z} \right) \mathbf{e}_r + \left( \frac{\partial K_r}{\partial z} - \frac{\partial K_z}{\partial r} \right) \mathbf{e}_\varphi + \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r K_\varphi) - \frac{1}{r} \frac{\partial K_r}{\partial \varphi} \right) \mathbf{e}_z \quad (\text{C.8})$$

$$\Delta f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad (\text{C.9})$$



$$\begin{aligned}
\Delta \mathbf{K} = & \left( \frac{\partial^2 K_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 K_r}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 K_r}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial K_r}{\partial r} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial K_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{K_r}{r^2} \right) \mathbf{e}_r + \\
& + \left( \frac{\partial^2 K_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 K_\varphi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 K_\varphi}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial K_\varphi}{\partial r} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial K_r}{\partial \varphi} - \frac{K_\varphi}{r^2} \right) \mathbf{e}_\varphi + \\
& + \left( \frac{\partial^2 K_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 K_z}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 K_z}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial K_z}{\partial r} \right) \mathbf{e}_z.
\end{aligned} \tag{C.10}$$

### Sférické souřadnice

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta \tag{C.11}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{K} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 K_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial K_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta K_\theta). \tag{C.12}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot} \mathbf{K} = & \left( \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta K_\varphi) - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial K_\theta}{\partial \varphi} \right) \mathbf{e}_r + \\
& + \left( \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial K_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r K_\varphi) \right) \mathbf{e}_\theta + \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r K_\theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial K_r}{\partial \theta} \right) \mathbf{e}_\varphi
\end{aligned} \tag{C.13}$$

$$\Delta f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \varphi} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \sin \varphi \frac{\partial f}{\partial \varphi} \right) \tag{C.14}$$

$$\begin{aligned}
\Delta \mathbf{K} = & \left( \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r K_r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 K_r}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 K_r}{\partial \varphi^2} + \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial K_r}{\partial \theta} - \right. \\
& \left. \frac{2}{r^2} \frac{\partial K_\theta}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial K_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{2 K_r}{r^2} - \frac{2 \cot \theta}{r^2} K_\theta \right) \mathbf{e}_r + \\
& + \left( \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r K_\theta)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 K_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 K_\theta}{\partial \varphi^2} + \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial K_\theta}{\partial \theta} - \right. \\
& \left. - \frac{2 \cot \theta}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial K_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial K_r}{\partial \theta} - \frac{K_\theta}{r^2 \sin^2 \theta} \right) \mathbf{e}_\theta + \\
& + \left( \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r K_\varphi)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 K_\varphi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 K_\varphi}{\partial \varphi^2} + \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial K_\varphi}{\partial \theta} - \right. \\
& \left. + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial K_r}{\partial \varphi} + \frac{2 \cot \theta}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial K_\theta}{\partial \varphi} - \frac{K_\varphi}{r^2 \sin^2 \theta} \right) \mathbf{e}_\varphi.
\end{aligned} \tag{C.15}$$

### C2. Křivkové, plošné a objemové integrály

## DODATEK D – PŘEHLED VZTAHŮ A DEFINIC Z PLAZMATU

### D1. Základní vztahy

*Transformace elektrických a magnetických polí* – Lorentzova transformace elektromagnetického pole od inerciální soustavy  $S$  k soustavě  $S'$  pohybující se rychlostí  $\mathbf{v}$  vzhledem k  $S$  dává:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}' &= \gamma(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}), \\ \mathbf{B}' &= \gamma\left(\mathbf{B} - \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{E}}{c^2}\right); \\ \gamma &\equiv \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\end{aligned}\tag{D.1}$$

*Debyeova stínící vzdálenost* – vzdálenost, na které poklesne potenciál bodového zdroje vlivem stínění na hodnotu  $1/e$  Coulombova potenciálu:

$$\lambda_D \equiv \sqrt{\frac{1}{\sum_{\alpha} \frac{Q_{\alpha}^2 n_{\alpha 0}}{\varepsilon_0 k_B T_{\alpha}}}}.\tag{D.2}$$

*Larmorův poloměr* – poloměr rotace nabitě částice kolem magnetických siločiv:

$$R_L \equiv \frac{mv_{\perp}}{QB}.\tag{D.3}$$

*Cyklotronní frekvence* – úhlová frekvence rotace nabitě částice kolem magnetických siločiv:

$$\omega_c \equiv \frac{QB}{m}.\tag{D.4}$$

*Kritický záměrný parametr* – záměrný parametr, při kterém bude úhel rozptylu  $90^\circ$ , jde tedy o spodní hranici srážek braných v úvahu v Landauově rovnici.

$$b_0 \equiv \frac{Q_{\alpha} Q_{\beta}}{4\pi\varepsilon_0 \mu g^2}; \quad g \equiv |\mathbf{v}_{\alpha} - \mathbf{v}_{\beta}|; \quad \mu \equiv \frac{m_{\alpha} m_{\beta}}{m_{\alpha} + m_{\beta}}.\tag{D.5}$$

*Coulombův logaritmus* – logaritmus podílu horní a dolní meze integrace přes záměrný parametr v Landauově nebo Fokkerově-Planckově rovnici. Za horní mez se bere Debyeova stínící vzdálenost a za dolní mez kritický záměrný parametr, při kterém je úhel rozptylu  $90^\circ$ .

$$\ln A \equiv \ln\left(\frac{\lambda_D}{b_0}\right).\tag{D.6}$$

*Rosenbluthovy potenciály* – potenciály, pomocí kterých lze zapsat pravou stranu Fokkerovy-Planckovy rovnice.

$$\begin{aligned}H(\mathbf{v}_{\alpha}) &\equiv \int \frac{1}{g} f_{\beta} d^3 \mathbf{v}_{\beta}, & G(\mathbf{v}_{\alpha}) &\equiv \int g f_{\beta} d^3 \mathbf{v}_{\beta}; \\ g &\equiv |\mathbf{v}_{\alpha} - \mathbf{v}_{\beta}|.\end{aligned}\tag{D.7}$$

*Alfvénova rychlost* – typická rychlost vln v plazmatu s magnetickým polem. Také jde o energii a tlakové energie

$$v_A \equiv \frac{B_0}{\sqrt{\mu\rho}} . \quad (\text{D.8})$$

**D2. Bezrozměrné charakteristiky plazmatu**

*Hartmannovo číslo* – odmocnina z podílu hustoty magnetické a viskózní síly ( $a$  je příčný rozměr toku plazmatu,  $\sigma$  vodivost plazmatu). U Hartmanova řešení má toto číslo význam podílu tloušťky příhraniční vrstvy proudícího plazmatu a šířky kanálu

$$\#_{\text{Ha}} \equiv B_0 a \sqrt{\frac{\sigma}{\eta}}. \quad (\text{D.9})$$

*Reynoldsovo magnetické číslo* – poměr členu zamrznání a difúze v rovnici pro časový vývoj magnetického pole ( $\sigma$  – vodivost plazmatu,  $L$  – rozměry plazmatu,  $u$  – rychlost proudění)

$$\#_{\text{Re,M}} = \sigma \mu L u. \quad (\text{D.10})$$

*Reynoldsovo číslo* – podíl setrvačných a viskózních sil

$$\#_{\text{Re}} = uL/\eta. \quad (\text{D.11})$$

*Lundquistovo číslo* – podíl rezistivního času (charakteristického času magnetické difúze) a Alfvénova času (doby, za kterou plazma proletí danou oblast Alfvénovou rychlostí). Lundquistovo číslo je rovno Reynoldsovu magnetickému číslu pro rychlost rovnou Alfvénově:

$$\#_{\text{Lu}} = S = \frac{\tau_{\text{R}}}{\tau_{\text{A}}} = \sigma \mu L v_{\text{A}}. \quad (\text{D.12})$$

*Machovo číslo* – podíl rychlosti plazmatu a rychlosti zvuku

$$\#_{\text{M}} = \frac{u}{c_{\text{S}}}. \quad (\text{D.13})$$

*Machovo Alfvénovo číslo* – podíl rychlosti plazmatu a Alfvénovy rychlosti

$$\#_{\text{MA}} = \frac{u}{v_{\text{A}}}. \quad (\text{D.14})$$

*Index rekonekce* – podíl rychlosti plazmatu proudícího směrem k neutrální vrstvě a Alfvénovy rychlosti. Liší se pro samovolnou (index sp), řízenou (index dr) a Petschekovu (index P) rekonekci. Zpravidla se vyjadřuje pomocí Lundquistova čísla  $S$ :

$$\begin{aligned} \#_{\text{rec}} &= \frac{u_{\perp}}{v_{\text{A}}}; \\ \#_{\text{sp}} &\approx \frac{1}{S}; \quad \#_{\text{dr}} \approx \frac{1}{\sqrt{S}}; \quad \#_{\text{P}} \approx \frac{1}{\ln S}. \end{aligned} \quad (\text{D.15})$$

*Beta parametr* – podíl tlaku a magnetického tlaku

$$\beta \equiv \frac{p}{p_{\text{M}}} = \frac{p}{B^2/2\mu_0}. \quad (\text{D.16})$$

*Alfvénovo číslo* – podíl magnetické a kinetické energie

$$\#_{\text{Al}} = \frac{B^2/2\mu_0}{\rho u^2/2} = \frac{B^2}{\mu_0 \rho u^2} = \frac{\#_{\text{St}}}{\#_{\text{Re,M}}}. \quad (\text{D.17})$$

*Stuartovo číslo* (parametr interakce) – podíl elektromagnetických a setrvačných sil

$$\#_{\text{St}} = \frac{\#_{\text{Ha}}}{\#_{\text{Re}}} = \frac{\sigma B^2 L}{\rho u}. \quad (\text{D.18})$$

*Batchelorovo číslo* – podíl klasické a magnetické viskozity

$$\#_{\text{Bt}} = \frac{\eta}{\eta_{\text{M}}} = \sigma \mu_0 \eta. \quad (\text{D.19})$$

*Parametr dvojvrstvy* – poměr energie úbytku potenciálu na dvojvrstvě a tepelné energie elektronů

$$\#_{\text{DL}} \equiv \frac{e \Delta \phi}{k_{\text{B}} T_{\text{e}}}. \quad (\text{D.20})$$

*Relativistický parametr dvojvrstvy* – poměr energie úbytku potenciálu na dvojvrstvě a klidové energie částice

$$\#_{\text{DL, rel}} \equiv \frac{e \Delta \phi}{m_0 c^2}. \quad (\text{D.21})$$

### D3. Potenciály elektromagnetického pole

*Homogenní elektrické pole*

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \quad \Rightarrow \quad \phi = -\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{r}. \quad (\text{D.22})$$

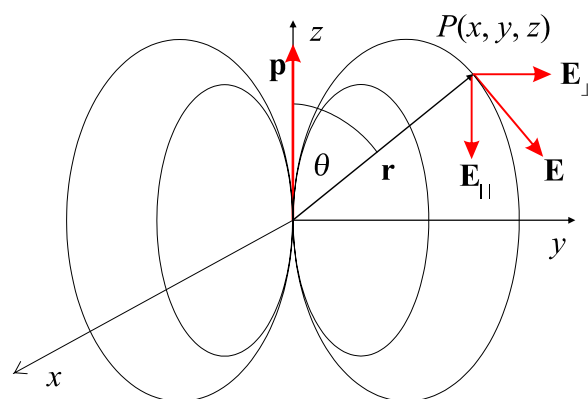
*Homogenní magnetické pole*

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A} = \frac{1}{2} \mathbf{r} \times \mathbf{B}_0. \quad (\text{D.23})$$

*Bodový náboj*

$$\phi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}. \quad (\text{D.24})$$

*Elektrický dipól*

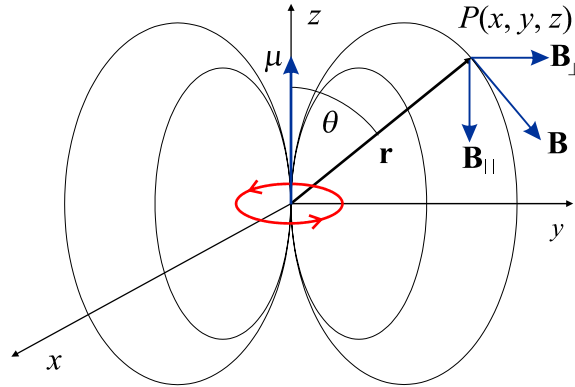


$$\phi = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} (\mathbf{p} \cdot \nabla) \frac{1}{r} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{E} = -\nabla \phi = \frac{3(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r} - r^2 \mathbf{p}}{4\pi\epsilon_0 r^5}, \quad (\text{D.25})$$

$$\mathbf{E} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{3zx}{r^5}, \frac{3zy}{r^5}, \frac{3z^2}{r^5} - \frac{1}{r^3} \right) \quad (\text{D.26})$$

$$\mathbf{E} = (E_{\perp}, E_{\parallel}) = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} (3\cos\theta\sin\theta, 3\cos^2\theta - 1) \quad (\text{D.27})$$

Magnetický dipól



$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\boldsymbol{\mu} \times \mathbf{r}}{r^3} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r} - r^2 \boldsymbol{\mu}}{r^5}, \quad (\text{D.28})$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \boldsymbol{\mu} \left( \frac{3zx}{r^5}, \frac{3zy}{r^5}, \frac{3z^2}{r^5} - \frac{1}{r^3} \right), \quad (\text{D.29})$$

$$\mathbf{B} = (B_{\perp}, B_{\parallel}) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \boldsymbol{\mu} (3\cos\theta\sin\theta, 3\cos^2\theta - 1). \quad (\text{D.30})$$

## **DODATEK E – MULTIPÓLOVÝ ROZVOJ**

***E1. Rozvoj potenciálu elektrického pole***

***E2. Rozvoj potenciálu magnetického pole***

## REJSTŘÍK NĚKTERÝCH FYZIKŮ A MATEMATIKŮ ZMÍNĚNÝCH V TEXTU

**Alen, James Alfred van (1914–2006)**, americký vědec zabývající se kosmonautikou, který prosadil umístění Geigerových počítaců na prvních amerických družicích Explorer I a Explorer III. Tyto družice objevily torusy energeticky nabitých částic okolo Země, které dnes nazýváme Van Allenovy radiační pásy. Van Allen byl vůdčí osobností amerického dobývání vesmíru během studené války.

**Alfvén, Hannes Olof Gösta (1908–1995)**, švédský fyzik a astrofyzik, jeden ze zakladatelů moderní fyziky plazmatu. Za své práce ve fyzice plazmatu získal Nobelovu cenu za fyziku pro rok 1970. Rozpracoval první varianty magnetohydrodynamiky a zavedl koncept magnetického pole zamrzlého v látce. V roce 1939 publikoval teorii magnetických bouří a polárních září, položil základy teorie magnetosféry Země. Ve fyzice plazmatu je po něm pojmenována Alfvénova rychlost a Alfvénovo číslo.

**Ampère, André Maria (1775–1836)**, francouzský matematik a fyzik, který ukázal, že kolem vodiče protékaného proudem se nachází magnetické pole. Zjistil, že cívka protékaná proudem se chová jako tyčový magnet. Také ukázal, že dva vodiče protékané proudem shodným směrem se přitahují, obráceně se pak odpuzují. Na jeho počest je pojmenována jednotka elektrického proudu (definovaná na základě silového působení dvou vodičů).

**Beltrami, Eugenio (1835–1899)**, italský matematik a fyzik. Zabýval se neeukleidovskou geometrií, elektřinou a magnetizmem. V matematice je po něm pojmenován Beltramův teorém týkající se zobrazení zakřiveného povrchu v mapách, Beltramovo pole (jehož rotace je úměrná samotnému poli) a Laplaceův-Beltramův operátor. Ve fyzice plazmatu hrají Beltramova pole klíčovou roli pro popis helikálních struktur.

**Bennett, Willard Harrison (1903–1987)**, vědec a vynálezce, narodil se ve Finsku, ale po většinu života pracoval ve Spojených státech. Studoval ionizaci plynů elektrickým polem, vynalezl radiofrekvenční hmotovou spektrografii. V roce 1934 našel Bennettovo řešení rovnováhy pinče.

**Bhatnagar, Prabhu Lal (1912–1976)**, indický matematik a fyzik. Zabýval se astrofyzikou, bílými trpaslíky a vznikem sluneční soustavy. V plazmatu spolu s Grosseem a Krookem vytvořili v roce 1954 tzv. BGK aproximaci Boltzmannovy rovnice. V pozdějších letech se zabýval nelineární hydrodynamikou. Zemřel na infarkt.

**Birkeland, Kristian (1867–1917)**, norský fyzik a vynálezce. Vyráběl umělá hnojiva, vyvíjel elektromagnetické dělo, věnoval se výzkumu polárních září a pohyby nabitých částic v magne-tickém poli. Usoudil, že při některých jevech na Slunci se uvolňují do prostoru svazky nabitých částic, které někdy zasáhnou Země a vyvolají polární záře. V laboratoři vyrobil terellu, malou napodobeninu Země, na které zkoumal podmínky vzniku polárních září. Jsou po něm pojmenovány Birkelandovy proudy tekoucí podél silokřivek magnetického pole.

**Boltzmann, Ludwig (1844–1906)**, rakouský fyzik a zakladatel statistické fyziky. Formuloval vztah mezi entropií a pravděpodobností (entropie je úměrná logaritmu počtu realizovatelných stavů, 1872) a zformuloval H teorém o narůstání entropie v nevratných procesech. Ekvipartiční teorém pokládal za základní rys kinetické teorie. Na konci života spáchal sebevraždu.

**Buneman, Oscar (1914–1993)**, významný plazmový fyzik, zabýval se teorií elektromagnetických dějů i numerickými simulacemi. Narodil se v Itálii, vyrůstal v Německu a v roce 1935 emigroval do Anglie. Střídavě působil v Anglii a Kanadě, od roku 1960 na Stanfordské univerzitě v USA. Zabýval se rozptylem na fluktuacích plazmatu, teorií hvízdů, numerickým řešením rovnic fyzika plazmatu. Je spoluautorem kódu TRASTAN, je po něm



pojmenována Bunemanova nestabilita, Bunemanovo diferenční schéma a Bunemanův potenciál.

**Carlqvist, Per (1937)**, švédský fyzik, zabýval se vývojem hvězd, slunečním větrem, teorií dvojrstev. Spolu s Alfvénem navrhl teorii slunečních vzplanutí, ve které hrají podstatnou úlohu dvojrstvy. Zobecnil Bennettovo řešení rovnováhy pinče.

**Coulomb, Charles (1736–1806)**, francouzský fyzik, který prováděl pokusy s torzními vahami. Jeho výzkumy ho vedly k závěru, že elektrické a magnetické síly ubývají s kvadrátem vzdálenosti. Pro elektrické jevy se tento vztah nazývá Coulombův zákon a popisuje ve fyzice plazmatu sílu působící při srážce nabitých částic. Před Coulombem ho objevil Robinson. Dále je po Coulombovi pojmenována jednotka elektrického náboje.

**Cowling, Thomas George (1906–1990)**, anglický astronom, který v roce 1934 dokázal, že magnetické pole Slunce a planet nemůže vznikat jednoduchým prstencovým proudem. Sluneční skvrny pochopil správně jako projevy tekutinového dynama v nitru Slunce. Klasifikoval neradiální oscilace hvězd, a tím položil základy helioseismologie.

**Debye, Peter Joseph William (1884–1966)**, holandský fyzik a chemik. Jako první popsal chování asymetrických molekul pomocí dipólového momentu a přímo je zkoumal rentgenovou difraktometrií. Dodnes se dipólový moment molekul měří v jednotkách debye. Jeho práce měla široký záběr, rozšířil Einsteinovu teorii měrného tepla o nízkofrekvenční fonony, zabýval se teorií elektrické vodivosti elektrolytů, teorií atomárních obalů, vysvětlil Comptonův jev. V roce 1936 obdržel Nobelovu cenu za chemii za příspěvek ke studiu molekulárních struktur. Ve fyzice je podle něho pojmenována Debyeova stínící vzdálenost.

**Drude, Paul Karl Ludwig (1863–1906)**, německý fyzik a optik. Prováděl experimenty s elektřinou a magnetismem a ověřoval Maxwellovu teorii elektromagnetického pole. Zavedl symbol  $c$  pro rychlost světla ve vakuu. V roce 1900 vyvinul model pro výpočet elektrických, tepelných a optických vlastností látek. Ve fyzice plazmatu se využívá Drudeho elementární teorie vodivosti.

**Fick, Adolf Eugen (1821–1901)**, německý fyziolog, který jako první vytvořil kontaktní čočky, tehdy ovšem skleněné. Jako první navrhl techniku měření průtoku krve srdcem. Formuloval zákon difúze látek, který je ve fyzice znám jako Fickův zákon.

**Fokker, Adriaan Daniël (1887–1972)**, holandský fyzik a muzikant, byl bratrancem slavného konstruktéra letadel Anthony Fokkera. Spolu s Planckem odvodil v roce 1913 Fokkerovu-Planckovu rovnici pro statistický popis plazmatu při Coulombových srážkách. Matematicky se zabýval hudebními stupnicemi, konstruoval hudební nástroje.

**Fourier, Jean-Baptiste Joseph de (1768–1830)**, francouzský fyzik a matematik. Zkoumal termoelektřinu, v roce 1822 matematicky zpracoval teorii vedení tepla a přispěl k rozvoji parních strojů. V uvedené práci položil základ tzv. Fourierovy metody řešení parciálních diferenciálních rovnic. Zabýval se statistikou a teorií pravděpodobnosti. V matematice jsou po něm pojmenovány Fourierovy řady a Fourierova transformace, ve fyzice Fourierův zákon vedení tepla, který patří k základním transportním zákonům v teorii plazmatu.

**Gibbs, Josiah (1839–1903)**, americký fyzik, který se zabýval termodynamikou a statistikou. Zformuloval pojem termodynamické rovnováhy pomocí energie a entropie. Je po něm pojmenováno Gibbsovo statistické rozdělení. Zformuloval také jednoduché pravidlo chemické rovnováhy několika fází (Gibbsovo pravidlo fází).

**Gross, Eugene (1926–1991)**, americký teoretický fyzik. Zabýval interakcí bosonů v kvantové teorii pole, bosonovými kondenzáty, kmity a vlnami v plazmatu a kinetickou teorií plazmatu. Spolu s Bhatnagarem a Krookem odvodili BGK aproximaci Boltzmannovy rovnice. Vystudoval v Princetonu.

**Hartmann, Julian**, dánský inženýr, který v roce 1937 publikoval řešení pro tok vodivé kapaliny v homogenním magnetickém poli a navrhl elektromagnetickou pumpu kapalných kovů. Experimentálně ji na rtuti otestoval F. Lazarus. Ve fyzice plazmatu je po něm pojmenováno Hartmannovo číslo a Hartmannova vrstva.

**Helmholtz, Hermann Ludwig Ferdinand von (1821–1894)**, německý lékař a fyzik, vědec s nesmírně širokým záběrem. Zabýval se teorií elektřiny a magnetizmu, termodynamikou, mechanikou, fyzikou lidského oka, teorií barevného vidění, akustikou, estetikou... Ve fyzice plazmatu používáme Helmholtzovu rovnici, kterou splňují Beltramova helikální pole.

**Hugoniot, Henri Pierre (1851–1887)**, francouzský inženýr a vynálezce. Je spoluautorem teorie rázových vln v tekutinách. Odvodil spolu s Rankinem podmínky pro skoky veličin na rázové vlně, které se nazývají Rankinovy-Hugoniotovy podmínky.

**Chandrasekhar, Subramanyan (1910–1995)**, indický astrofyzik, pracoval v Anglii, později v USA. Zabýval se zejména teorií stavby hvězd, matematickou teorií černých děr a obecnou relativitou. Odvodil maximální možnou hmotnost bílého trpaslíka (Chandrasekharovu mez). Na jeho počest byla pojmenována rentgenová družice Chandra vypuštěná v roce 1999. Ve statistické fyzice a ve fyzice plazmatu se používá Chandrasekharova funkce.

**Joule, James Prescott (1818–1889)**, anglický fyzik a sládek, který studoval povahu tepla a jeho vztah k mechanické energii. S Kelvínem spolupracoval na zavedení absolutní teplotní stupnice. Zkoumal magnetostrickci, našel vztah pro teplo generované při průchodu elektrického proudu látkou. Toto tzv. Jouleovo teplo je hlavním disipačním procesem v plazmatu. Dále je po něm pojmenována jednotka energie.

**Krook, Max (1913–1985)**, americký matematik a astrofyzik. V matematice se zabýval teorií funkcí komplexní proměnné. Ve fyzice plazmatu spolu s Bhatnagarem a Grossem odvodili BGK aproximaci Boltzmannovy rovnice, ze které se dají jednoduše odvodit různé transportní jevy.

**Kruskal, Martin David (1925–2006)**, americký matematik a fyzik. Zabýval se obecnou relativitou, zavedl Kruskalovy souřadnice ve Schwarzschildově geometrii, je po něm pojmenována Kruskalova procedura v teorii Markovových procesů. Ve fyzice plazmatu zkoumal teoretické podmínky stability pinče.

**Landau, Lev Davidovič (1908–1968)**, sovětský teoretický fyzik, nositel Nobelovy ceny za fyziku pro rok 1962 za teorii supratekutosti. Landau významně přispěl do všech odvětví teoretické fyziky, zejména kvantové mechaniky, kvantové elektrodynamiky, supratekutosti, supravodivosti, fázových přechodů, diamagnetismu, fyziky plazmatu a teorie neutrin. V plazmatu je po něm pojmenovaná Landauova rovnice pro hustotu pravděpodobnosti při Coulombových srážkách a Landauův útlum – nelineární interakce částic a vln.

**Langmuir, Irwing (1881–1957)**, americký fyzik a chemik, získal Nobelovu cenu za chemii pro rok 1932 za chemii povrchů. Zabýval se metalurgií, inertními plyny a fyzikou plazmatu. Pro ionizované prostředí jako první použil název plazma, protože mu vlastnostmi připomínalo krevní plazma. Je po něm pojmenována Langmuirova sonda pro měření potenciálu v plazmatu, Langmuirův soliton a nezávisle na Sahovi odvodil v roce 1923 Sahovu rovnici pro tepelnou ionizaci. Jako první experimentálně detekoval dvojrstvu.

**Larmor, Joseph (1857–1942)**, irský fyzik. Vysvětlil Fitz-Geraldovu kontrakci nezávisle na Lorentzovi. Vypočetl energii uvolňovanou při záření urychleného náboje, vysvětlil rozštěpení spektrálních čar v magnetickém poli. Jako jeden z prvních předpokládal, že geomagnetické bouře souvisí se slunečními vzplanutími a jsou způsobeny elektrony přicházejícími ze Slunce. Na jeho počest je pojmenován Larmorův poloměr pohybu nabitě částice v magnetickém poli.

**Lorentz, Hendrik Antoon (1853–1928)**, holandský fyzik, který jako první považoval za zdroje elektromagnetického pole oscilující nabitě částice. Předpověděl, že silné magnetické

pole má vliv na vlnovou délku generovaného světla. Experimentálně tento fakt prokázal jeho žák P. Zeeman. Oba získali Nobelovu cenu za fyziku pro rok 1902. Objevil transformaci proměnných, vůči které se Maxwellovy rovnice nemění (dnes Lorentzova transformace). Nezávisle prokázal nulový výsledek Michelsonova-Morleyho experimentu. Je po něm také pojmenována Lorentzova síla působící na částici pohybující se v magnetickém poli.

**Maxwell, James Clerk (1831–1879)**, skotský matematik a fyzik. S Clausiem vyvinuli kinetickou teorii plynů. V roce 1867 formuloval paradox Maxwellova démona. Ukázal, že druhý termodynamický zákon statisticky popisuje vlastnosti velkého počtu částic. V roce 1873 publikoval teorii elektřiny a magnetizmu. Dnešní podobu těchto rovnic vytvořili Heaviside a Hertz. Maxwell odvodil, že světlo je příčné vlnění způsobené magnetickými a elektrickými jevy. Je po něm pojmenováno Maxwellovo rozdělení rychlostí, rovnice elektromagnetického pole a tenzor toku hybnosti elektromagnetického pole.

**Moffatt, Henry Keith (1935)**, skotský astrofyzik, který se zabýval dynamikou tekutin, magnetohydrodynamikou a teorií turbulence. Je spoluautorem dnešní teorie tekutinového dynama.

**Ohm, Georg Simon (1789–1854)**, německý fyzik, který se zabýval elektřinou. Z pokusů s elektrickými články vlastní konstrukce odvodil, že proud tekoucí vodičem je přímo úměrný napětí a průřezu vodiče a nepřímo jeho délce (Ohmův zákon). Zabýval se také akustikou a optikou, formuloval zákony fyziologické akustiky. Je po něm pojmenován Ohmův zákon a jednotka elektrického odporu Ohm ( $\Omega$ ).

**Onsager, Lars (1903–1976)**, norsk-americký chemik a teoretický fyzik. V roce 1968 získal Nobelovu cenu za chemii. Zabýval se teorií elektrolytů a Brownovým pohybem iontů. Uchvátila ho statistická fyzika a termodynamika. Zkoumal difúzi částic způsobenou gradientem teploty a koncentrace a produkci entropie při těchto procesech. Svě poznatky zobecnil na tzv. Onsagerovy relace reciprocity.

**Parker, Eugene (1927)**, americký astrofyzik zabývající se teorií slunečního větru a magnetickými poli ve vesmíru. Je po něm pojmenována Parkerova plocha nulového magnetického pole Slunce (tzv. neutrální vrstva), Parkerův model přepojení magnetických silokřivek a Parkerova teorie tekutinového dynama.

**Poynting, John (1852–1914)**, anglický fyzik, zkoumal vyzařování energie v elektromagnetických vlnách. V roce 1884 publikoval, že tok energie záření je dán vektorem  $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$  (Poyntingovým vektorem). V jeho směru se přenáší energie a míří grupová rychlost. V roce 1893 měřil nezávisle na ostatních gravitační konstantu. Je po něm také pojmenován Poyntingův-Robertsonův jev popisující drift prachových částic způsobený tlakem záření.

**Rankine, William John Macquorn (1820–1872)**, skotský inženýr zabývající se dynamikou tekutin a termodynamikou. Vytvořil kompletní teorii parního stroje. Zabýval se také botanikou a hudbou. Spolu s Hugoniotem odvodil podmínky pro skoky veličin na rázové vlně. Zobecnění těchto podmínek se používá i ve fyzice plazmatu.

**Reynolds, Osborne (1842–1912)**, anglický fyzik a průkopník teorie tekutin. Zabýval se ale i termodynamikou, vylepšil tehdejší konstrukci kotle a kondenzoru u parních strojů, jako inženýr se podílel na konstrukci parníků. V teorii tekutin je po něm pojmenováno Reynoldsovo číslo, a ve fyzice plazmatu Reynoldsovo magnetické číslo.

**Rosenbluth, Marshall Nicholas (1927–2003)**, americký plazmový fyzik. Je jedním ze tří spoluautorů Metropolisova algoritmu (Monte Carlo simulace v přírodních vědách), jednoho z nejúspěšnějších algoritmů všech dob. Zabýval se rozptylem elektronů, vlnami a nestabilitami v plazmatu, turbulencemi v tokamacích. Ve statistickém popisu plazmatu zavedl Rosenbluthovy potenciály. Do roku 1999 se podílel na přípravě projektu první termojaderné elektrárny ITER.

**Saha, Mehd Nad (1893–1956)**, indický astrofyzik, který v roce 1920 odvodil rovnici (Sahovu rovnici) pro tepelnou ionizaci plazmatu a otevřel tak novou cestu pro výzkum astrofyzikálního i laboratorního plazmatu. Dnes je po něm pojmenován Sahův ústav jaderné fyziky v Kalkatě. Byl také architektem pro plánování říčních staveb v Indii.

**Schwarzschild, Martin (1912–1997)**, německo-americký astronom, syn známého fyzika Karla Schwarzschilda. Zabýval se stavbou hvězd a vývojem hvězd. Spolu s Kruskalem řešil podmínky rovnováhy a stability plazmových vláken, tzv. pinčů.

**Spitzer, Lyman (1914–1997)**, americký astrofyzik a spoluzakladatel teoretické fyziky plazmatu. Intenzivně se zabýval mezihvězdným prostředím, plyny, prachem a magnetickými poli. Na jeho počest je pojmenován vztah pro vodivost plazmatu. Jako první navrhl v roce 1946, ještě dávno před založením NASA, umístit dalekohled na oběžné dráze. Jeho nesmírné úsilí vedlo NASA k umístění dalekohledů Copernicus a HST do vesmíru. Na jeho počest je pojmenován Spitzerův vesmírný dalekohled.

**Stix, Thomas Howard (1924–2001)**, americký plazmový fyzik. Zabýval se ohřevem plazmatu elektromagnetickými vlnami na termojaderné teploty, studoval stochastické procesy při pohybu nabitých částic v plazmatu. Je držitelem mnoha cen, například Maxwellovy ceny (1980) – nejvyšší ceny udělované Americkou fyzikální společností za fyziku plazmatu. Na jeho počest jsou pojmenovány Stixovy koeficienty ve vztahu pro vysokofrekvenční permitivitu a Stixova cívka pro ohřev plazmatu.

**Vlasov, Anatolij Alexandrovič (1908–1975)**, sovětský teoretický fyzik, který se po většinu života věnoval statistické fyzice. Ve fyzice plazmatu je podle něho pojmenovaná Vlasovova rovnice pro statistický popis bezsrážkového plazmatu. Kromě fyziky plazmatu se zabýval optikou, fyzikou krystalů a teorií gravitace. Vystudoval Moskevskou státní univerzitu, kde pracoval po celý život po boku Pjotra Kapici a Lva Davidoviče Landaua.

## LITERATURA

### Na co navázat...

- [1] P. Kulhánek: *Teoretická mechanika*; studijní text pro doktorské studium; FEL ČVUT v Praze, 2001. (<http://www.aldebaran.cz/studium/mechanika.pdf>)
- [2] P. Kulhánek: *Kvantová teorie*; studijní text pro doktorské studium; FEL ČVUT v Praze, 2001. (<http://www.aldebaran.cz/studium/kvantovka.pdf>)
- [3] P. Kulhánek: *Statistická fyzika*; studijní text pro doktorské studium; FEL ČVUT v Praze, 2002. (<http://www.aldebaran.cz/studium/statistika.pdf>)

### Základní učebnice

- [4] D. R. Nicholson: *Introduction to Plasma Theory*, John Wiley & Sons Inc, ISBN: 047109045X
- [5] T. J. M. Boyd, J. J. Sanderson: *The Physics of Plasmas*, Cambridge University Press, 2003, ISBN: 0521459125.
- [6] J. P. Freidberg: *Ideal Magnetohydrodynamics*, Springer, 1987, ISBN: 0306425122.
- [7] T. H. Stix: *Waves in Plasmas* Springer, 2006, ISBN: 0883188597.
- [8] A. L. Peratt: *Physics of the Plasma Universe*, Springer-Verlag, 1991, ISBN 3-54097575-6.
- [9] T. E. Cravens: *Physics of Solar System Plasmas*, Cambridge Atmospheric and Space Science Series, Cambridge University Press, 1997, ISBN: 0-52161194-6
- [10] J. D. Huba: *NRL Plasma Formulary*, Supported by The Office of Naval Research, 2007, <http://wwwppd.nrl.navy.mil/nrlformulary/>
- [11] D. Montgomery, D. Tidman: *Plasma Kinetic Theory*, MacGraw-Hill, 1964

### Základní učebnice v češtině

- [12] J. Kracík, J. Tobiáš: *Fyzika plazmatu*; ACADEMIA Praha, 1966.
- [13] J. Kleczek: *Plazma ve vesmíru a laboratoři*; ACADEMIA; Praha 1968.
- [14] J. Kracík a kol.: *Základy klasické a kvantové fyziky plazmatu*; ACADEMIA, Praha, 1974.
- [15] F. F. Chen: *Úvod do fyziky plazmatu*; ACADEMIA, Praha 1984.
- [16] J. Kvasnica: *Teorie elektromagnetického pole*. ACADEMIA, Praha, 1985.
- [17] P. Kubeš: *Magnetohydrodynamika*, studijní text pro doktorské studium; FEL ČVUT v Praze, 2001, <http://www.aldebaran.cz/studium/MHD.pdf>

### Populární knížky o plazmatu

- [18] I. Štoll: *Tajemství kulového blesku*, Horizont 1988.
- [19] P. Kulhánek, J. Rozehnal: *Hvězdy, planety, magnety*; Mladá fronta, edice Kolumbus, 2007.