

*TF4: VLNY A NESTABILITY
V PLAZMATU*



STUDIJNÍ TEXT PRO DOKTORANDSKÉ STUDIUM

PETR KULHÁNEK

PŘEDMLUVA

O plazmatu se často hovoří jako o čtvrtém skupenství hmoty. A je to oprávněné, protože vlastnosti plazmatu jsou velmi odlišné od vlastností plynů a kapalin. Především zde hraje roli přítomnost volných nosičů náboje, které mohou reagovat na elektrická a magnetická pole a vzájemná interakce nábojů vede ke vzniku globálních kolektivních polí. Chování plazmatu je tak především ovlivněno elektrickými a magnetickými poli.

Ve Vesmíru je 99% veškeré hmoty ionizováno a nachází se ve formě plazmatu. Plazmatem je tvořeno nitro i obálky hvězd, mlhoviny, výtrysky, atd. Na Zemi se s plazmatem setkáme v kanálech blesků, v ionosféře, v podobě slunečního větru, který neustále atakuje magnetické pole Země a samozřejmě plazma nalezneme v laboratořích výzkumných ústavů.

V plazmatu existuje neuvěřitelné množství modů různých nízkofrekvenčních i vysokofrekvenčních vln. Šíření zvukových i elektromagnetických vln přítomnost plazmatu velmi výrazně ovlivní.

Pro plazma je charakteristická řada nestabilit, se kterými se dlouhá léta potýkají konstruktéři termojaderných reaktorů. Neméně zajímavé jsou nelineární jevy v plazmatu.

Z široké škály jevů v plazmatu se některými z nich budeme zabývat v tomto sylabu. U takto obsažené problematiky půjde vždy jen o úzký výběr silně ovlivněný autorem. Proto by text měl být především úvodem k dalšímu samostatnému studiu. Přeji čtenářům rychlé pochopení probíraných jevů, v případě nejasností mě kontaktujte, neboť nemusí jít o chybu vaší úvahy, ale o chybu v textu nebo závadu v mé hlavě.

Ještě jednu poznámku na závěr. V celém textu je frekvencí dějů automaticky myšlena úhlová frekvence, která je součástí relativistického čtyřvektoru a je snadno transformovatelná do jiné souřadnicové soustavy.

Petr Kulhánek

OBSAH

4.1. ZÁKLADNÍ POJMY	5
4.1.1. VLNĚNÍ	5
4.1.2. ROZMĚROVÁ ANALÝZA (VLNY NA HLUBOKÉ VODĚ)	9
4.1.3. LINEÁRNÍ TEORIE (ELEKTROMAGNETICKÉ VLNY)	11
4.1.4. NELINEÁRNÍ TEORIE (ZVUKOVÉ VLNY)	14
4.1.5. DALŠÍ PŘÍKLADY (JEANSOVO KRITÉRIUM, VLNOVÁ A KG ROVNICE)	19
4.2. MAGNETOHDRODYNAMIKA	22
4.2.1. ROVNICE PRO MAGNETICKÉ POLE	23
4.2.2. ROVNICE PRO HUSTOTU	25
4.2.3. ROVNICE PRO RYCHLOST	26
4.2.4. UZAVŘENÍ SOUSTAVY	28
4.3. PLAZMOVÉ OSCILACE A VLNY	30
4.3.1. ODVOZENÍ DISPERZNÍ RELACE	30
4.3.2. PLAZMOVÉ OSCILACE ELEKTRONŮ	32
4.3.3. VYSOKOFREKVENČNÍ ŘEŠENÍ (PLAZMOVÉ VLNY A OSCILACE ELEKTRONŮ)	32
4.3.4. NÍZKOFREKVENČNÍ ŘEŠENÍ (ZVUK A OSCILACE IONTŮ)	34
4.3.5. DALŠÍ VLIVY	35
4.4. MAGNETOAKUSTICKÉ VLNY	36
4.4.1. ODVOZENÍ DISPERZNÍ RELACE	36
4.4.2. VLNOPLOCHY MAGNETOAKUSTICKÝCH VLN	38
4.4.3. SMĚRY VEKTORŮ V MAGNETOAKUSTICKÝCH VLNÁCH	39
4.5. ELEKTROMAGNETICKÉ VLNY	40
4.5.1. ODVOZENÍ DISPERZNÍ RELACE	40
4.5.2. SPECIÁLNÍ PŘÍPADY	42
4.5.3. CMA DIAGRAM	44
4.5.4. TENZOR PERMITIVITY PRO ELEKTROMAGNETICKÉ VLNY V PLAZMATU	45
4.5.5. HVIZDY (WHISTLERS)	47
4.6. MHD NESTABILITY	49
4.6.1. DVOUSVAZKOVÁ (BUNEMANOVA) NESTABILITA	49
4.6.2. RAYLEIGH-TAYLOROVA NESTABILITA	49
4.6.3. KELVIN-HELMHOLTZOVA NESTABILITA	49
4.6.4. DIOCOTRONOVÁ NESTABILITA	49
4.7. DALŠÍ NESTABILITY	51
4.7.1. INTERCHANGE NESTABILITA	51
4.7.2. NESTABILITY NA POVRCHU VLÁKNA (KINK, SAUSAGE)	51
4.7.3. DRIFTOVÉ NESTABILITY	51
4.7.4. IONTOVÉ AKUSTICKÉ NESTABILITY	51
4.8. NELINEÁRNÍ, NEINFINITEZIMÁLNÍ A STATISTICKÉ JEVY	52
4.8.1. HARTMANOVO ŘEŠENÍ	52
4.8.2. MHD VLNY KONEČNÉ AMPLITUDY	54
4.8.4. SOLITONY	56
4.8.5. NĚKTERÁ SOLITONOVÁ ŘEŠENÍ	59
4.8.6. LANDAUŮV ÚTLUM	62
4.9. STRUKTURA MAGNETICKÝCH POLÍ	66
4.9.1. HELIKÁLNÍ STRUKTURY	66
4.9.2. MAGNETICKÁ REKONEXE	68
4.9.3. MAGNETICKÉ DYNAMO	73
4.10. KVAZIČÁSTICE	74
4.10.1. FONONY	74
4.10.2. MAGNONY	76
4.10.3. VÁZANÉ STAVY	77
4.10.4. PLASMONY	78
PŘÍLOHA - VEKTOROVÝ SOUČIN	79

4.1. ZÁKLADNÍ POJMY

4.1.1. Vlnění

Označme veličinu, jejíž hodnoty se mění v čase a prostoru $\psi(t, \mathbf{x})$ nebo $\mathbf{V}(t, \mathbf{x})$, podle toho, zda jde o skalární či vektorovou veličinu. Může jít o tlak, hustotu prostředí, teplotu, rychlostní, elektrické či magnetické pole, výšku mořské hladiny a podobně. Uvedme si nejprve některé pojmy, které se používají v teorii vln.

Vlnová funkce:

Veličina $\psi(t, \mathbf{x})$ resp. $\mathbf{V}(t, \mathbf{x})$ popisující vlnění v čase a v prostoru. Položíme-li $t = \text{const}$, pozorujeme časový snímek vlnění. Můžete si představit, že vyfotografujeme například vlnící se mořskou hladinu a prohlížíme si vzniklou fotografii. Položíme-li $\mathbf{x} = \text{const}$, pozorujeme časový průběh sledované veličiny v jednom určitém místě. Vlnění většinou popisujeme komplexní vlnovou funkcí, použití komplexních čísel významně zjednoduší některé výpočty. Fyzikální význam má ale zpravidla jen reálná část vlnové funkce. Tak jako každou komplexní funkci, můžeme vlnovou funkci zapsat pomocí dvou reálných funkcí, amplitudy A a fáze φ :

$$\psi(t, \mathbf{x}) = A(t, \mathbf{x}) e^{i\varphi(t, \mathbf{x})}; \quad \mathbf{V}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{A}(t, \mathbf{x}) e^{i\varphi(t, \mathbf{x})}. \quad (4.1)$$

Vlnoplocha:

Plocha spojující místa s konstantní hodnotou fáze φ vlnové funkce. V těchto místech je vlnění ve stejné fázi (například tlak má 75% maximální hodnoty).

Úhlová frekvence:

Změna fáze vlnění s časem,

$$\omega = -\frac{\partial \varphi}{\partial t}. \quad (4.2)$$

Minus v definici není podstatné, zajišťuje jen, aby se rovinná vlna pohybovala v kladném směru vlnového vektoru. Úhlová frekvence se může měnit jak s časem, tak od místa k místu. Je-li úhlová frekvence neproměnná, lze ji zapsat pomocí periody T jako $\omega = 2\pi/T$.

Vlnový vektor:

Změna fáze vlnění s prostorovými proměnnými,

$$\mathbf{k} = \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{x}} = \nabla \varphi. \quad (4.3)$$

Vlnový vektor míří ve směru šíření vlnění, jeho velikost i směr se může měnit s časem i od místa k místu. Je-li vlnový vektor neproměnný, lze jeho velikost zapsat pomocí vlnové délky λ jako $k = 2\pi/\lambda$.

Disperzní relace:

Vlnění je v každém místě popsáno čtyřmi čísly (ω, \mathbf{k}) , která tvoří relativistický čtyřvektor transformující se pomocí Lorentzovy transformace. Tato čísla jsou ale závislá. Vztah mezi nimi lze odvodit z rovnic popisujících daný typ vlnění. Většinou má závislost obecný tvar

$$\phi(\omega, \mathbf{k}) = 0 \quad (4.4)$$

a nazývá se disperzní relace. V některých případech je možné z disperzní relace explicitně vypočítat úhlovou frekvenci v závislosti na vlnovém vektoru

$$\omega = \omega(\mathbf{k}). \quad (4.5)$$

Tam, kde to explicitně možné není, můžeme použít větu o implicitní funkci a dopočítat lokálně alespoň parciální derivace úhlové frekvence podle složek vlnového vektoru.

Rovinná (monochromatická) vlna

Jde o nejjednodušší typ vlny, amplituda je konstantní a fáze je lineární funkcí:

$$A(t, \mathbf{x}) = A; \quad \varphi(t, \mathbf{x}) = c_0 t + c_1 x + c_2 y + c_3 z = -\omega t + k_x x + k_y y + k_z z = \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t. \quad (4.6)$$

Význam koeficientů c_k je zřejmý z definice úhlové frekvence a vlnového vektoru. Termín monochromatická v názvu vlny znamená, že ve vlně je zastoupena jediná frekvence (barva = chromos). Rovinná (monochromatická) vlna má tedy tvar

$$\psi(t, \mathbf{x}) = A e^{i[\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t]}. \quad (4.7)$$

Na první pohled je zřejmé, že plochy konstantní fáze $\varphi(t, \mathbf{x}) = \text{const}$ představují rovnice přesouvajících se rovin:

$$\varphi(t, \mathbf{x}) = \text{const} \quad \Rightarrow \quad k_x x + k_y y + k_z z - \omega t = \text{const} \quad \Rightarrow \quad c_1 x + c_2 y + c_3 z + d(t) = 0.$$

Přesun roviny budeme chápat jako kolmý k této rovině (šikmé přesuny rovin lze tak jako tak nahradit kolmým přesunem s rychlostí rovnou projekci rychlosti do kolmého směru). Směr přesunu určíme jako gradient rovnice roviny:

$$\varphi(t, \mathbf{x}) = k_x x + k_y y + k_z z - \omega t \quad \Rightarrow \quad \nabla \varphi = \mathbf{k}.$$

Vlnový vektor proto míří ve směru šíření vlnění.

Fázová rychlost

Fázová rychlost je rychlost přesunu roviny konstantní fáze. Zvolme souřadnicový systém tak, aby se roviny přesouvaly ve směru první osy, tj.

$$\mathbf{k} = (k, 0, 0)$$

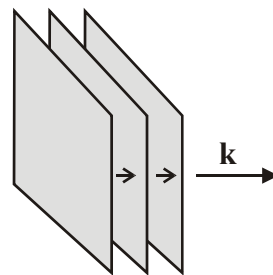
Diferencováním rovnice plochy konstantní fáze získáme velikost přesunu plochy (fázovou rychlost)

$$kx - \omega t = \text{const} \quad \Rightarrow \quad k dx - \omega dt = 0 \quad \Rightarrow \quad v_f = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k}.$$

Pro obecnou volbu souřadnicového systému platí

$$v_f = \frac{\omega}{k}; \quad \mathbf{v}_f = \frac{\omega}{k} \frac{\mathbf{k}}{k} = \frac{\omega}{k^2} \mathbf{k}. \quad (4.8)$$

První výraz určuje jen velikost fázové rychlosti, druhý výraz ukazuje, že vektor fázové rychlosti míří ve směru vlnového vektoru. Fázová rychlost souvisí jen s přesunem místa, které má stejnou fázi vlnění, nespojuje se skutečným makroskopickým přesunem hmoty (kola šířící se na vodní hladině mají zcela jinou rychlost než voda samotná). Fázová rychlost může být, a v mnoha případech je, nadsvětelná. Tvar disperzní relace určuje hodnotu fázové rychlosti pro různé frekvence. Jev, kdy se vlny různých frekvencí šíří různou rychlostí se nazývá *disperze*.



Obecná vlna

S rovinnými vlnami se velmi snadno pracuje a můžeme z nich poskládat vlnu obecnějšího tvaru:

$$\psi(t, \mathbf{x}) = \int a(\omega, \mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} d^3 \mathbf{k} \quad (4.9)$$

Jde vlastně o Fourierovu transformaci $\psi(t, \mathbf{x}) \leftrightarrow a(\omega, \mathbf{k})$. Amplitudy vln jsou Fourierovým obrazem vlnové funkce. Integrace se provádí jen přes složky vlnového vektoru. Úhlová

frekvence je na vlnovém vektoru závislá prostřednictvím disperzní relace (4.5) a proto se přes ní neintegruje.

Grupová rychlost

Zkoumejme nyní rychlost přesunu vlnového balíku – klubka vln podobných frekvencí a vlnových vektorů. Pro jednoduchost budeme uvažovat balík šířící se ve směru osy x (tak zvolíme souřadnicový systém):

$$\psi(t, x) = \int_{k_0 - \Delta k}^{k_0 + \Delta k} a(\omega, k) e^{i(kx - \omega t)} dk. \quad (4.10)$$

Amplituda vln je nenulová jen v intervalu $(k_0 - \Delta k, k_0 + \Delta k)$ a nahradíme ji konstantní amplitudou:

$$\psi(t, x) \approx a(\omega_0, k_0) \int_{k_0 - \Delta k}^{k_0 + \Delta k} e^{i(kx - \omega t)} dk.$$

V dalším kroku vytkneme z integrálu střední vlnu

$$\psi(t, x) \approx a(\omega_0, k_0) e^{i(k_0 x - \omega_0 t)} \int_{k_0 - \Delta k}^{k_0 + \Delta k} e^{i[(k - k_0)x - (\omega - \omega_0)t]} dk.$$

Nesmíme zapomenout, že $\omega = \omega(k)$ a integrace se „skrytě“ provádí i přes ω . Další úpravy jsou zřejmé:

$$\psi(t, x) \approx a(\omega_0, k_0) e^{i(k_0 x - \omega_0 t)} \int_{k_0 - \Delta k}^{k_0 + \Delta k} \exp \left[i(k - k_0) \left(x - \frac{\omega(k) - \omega_0}{k - k_0} t \right) \right] dk$$

Zlomek v argumentu exponenciely lze nahradit derivací

$$\frac{\omega(k) - \omega_0}{k - k_0} \approx \left. \frac{\partial \omega}{\partial k} \right|_{k_0} = v_g(k_0).$$

Veličina v_g má zatím význam jen označení pro výše definovanou parciální derivaci. Vlnový balík má nyní tvar:

$$\psi(t, x) \approx a(\omega_0, k_0) e^{i(k_0 x - \omega_0 t)} \int_{k_0 - \Delta k}^{k_0 + \Delta k} \exp \left[i(k - k_0) (x - v_g t) \right] dk.$$

Je zřejmé, že po integraci přes vlnový vektor bude výsledek integrálu nějakou funkcí argumentu $x - v_g t$:

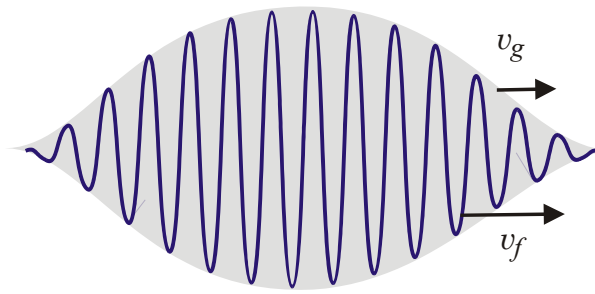
$$\psi(t, x) \approx a(\omega_0, k_0) e^{i(k_0 x - \omega_0 t)} F(x - v_g t) = A(x - v_g t) e^{i(k_0 x - \omega_0 t)}.$$

Balík má tedy obálku šířící se rychlostí v_g . Pro obecně mířící vlnový vektor je

$$\mathbf{v}_g = \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}} = \left(\frac{\partial \omega}{\partial k_x}, \frac{\partial \omega}{\partial k_y}, \frac{\partial \omega}{\partial k_z} \right). \quad (4.11)$$

Obdobný vztah ve sférické souřadnicové soustavě (k, θ, φ) má tvar

$$\mathbf{v}_g = \left(\frac{\partial \omega}{\partial k}, \frac{1}{k} \frac{\partial \omega}{\partial \theta}, \frac{1}{k \sin \theta} \frac{\partial \omega}{\partial \varphi} \right). \quad (4.12)$$



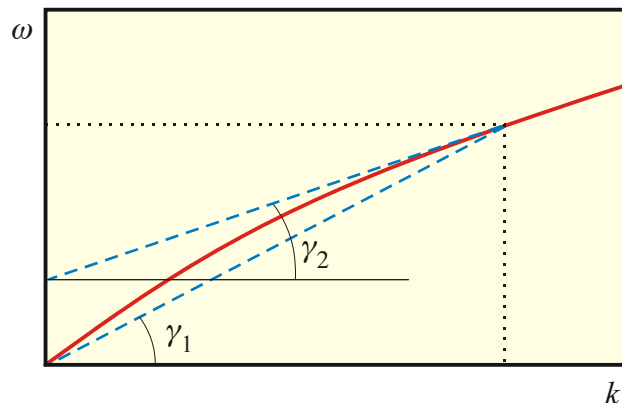
Rychlost šíření vlnového balíku jako celku se nazývá *grupová rychlost*. Je to rychlost šíření informace o tvaru balíku a rychlost přenosu energie balíku a nutně musí být podsvětelná. S využitím de Broglieho vztahů a Hamiltonových kanonických rovnic $\dot{q}_k = \partial H / \partial p_k$ snadno ukážeme, že jde o mechanickou rychlost částice kvantově spojené s vlnovým balíkem:

$$v_g = \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}} = \frac{\partial \hbar \omega}{\partial \hbar \mathbf{k}} = \frac{\partial E}{\partial \mathbf{p}} = v_{\text{mech}} .$$

Grafický význam fázové a grupové rychlosti

Grafický význam fázové a grupové rychlosti vidíme na obrázku. Fázová rychlost je dána tangentou úhlu, který svírá spojnice bodu na křivce disperzní relace s počátkem (vzhledem k vodorovné ose), grupová rychlost je dána směrnici tečny (jde o derivaci):

$$v_f = \text{tg } \gamma_1 ; \quad v_g = \text{tg } \gamma_2 . \quad (4.13)$$



Substancionální derivace

Nalezneme úplnou časovou derivaci nějakého vektorového pole $\mathbf{A}(t, \mathbf{x})$

$$\frac{d}{dt} A_k(t, \mathbf{x}) = \frac{\partial A_k}{\partial t} + \frac{\partial A_k}{\partial x_l} \frac{dx_l}{dt} = \frac{\partial A_k}{\partial t} + v_l \frac{\partial A_k}{\partial x_l} = \frac{\partial A_k}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) A_k .$$

Úplná derivace vektorového pole (tzv. substancionální derivace) se skládá ze dvou částí

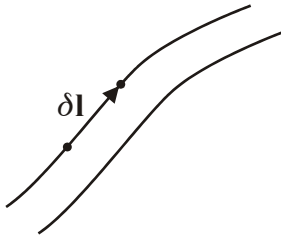
$$\frac{d}{dt} \mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{A} \quad (4.14)$$

První část odpovídá explicitním změnám polí, druhá souvisí s prouděním. Pro substancionální derivaci můžeme operátorově psát

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \quad (4.15)$$

Rovnice proudnice

Určeme nyní změnu elementu proudnice $\delta \mathbf{I}$:



$$d\delta\mathbf{l} = \delta\mathbf{v} dt,$$

$$\frac{d\delta\mathbf{l}}{dt} = \delta\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r} + \delta\mathbf{l}) - \mathbf{v}(\mathbf{r}) = (\delta\mathbf{l} \cdot \nabla) \mathbf{v},$$

$$\frac{d\delta\mathbf{l}}{dt} = (\delta\mathbf{l} \cdot \nabla) \mathbf{v}. \quad (4.16)$$

4.1.2. Rozměrová analýza (vlny na hluboké vodě)

I bez znalosti teorie a bez znalosti fyzikálních procesů probíhajících v dané situaci je někdy možné odvodit disperzní relaci. Tvar fyzikálních zákonů je mnohdy natolik omezen rozměry veličin, že zbývá jen několik málo variant. V těchto případech postačí „jen“ rozměrová analýza problému. Typickou ukázkou je problematika vln na hluboké vodě. Na mělčině závisí vlastnosti vln samozřejmě na hloubce vody a takové vlny mohou být velmi komplikované. Jsme-li ale na hluboké vodě a vlny dosahují rozměrů od milimetrů po několik desítek metrů, nemůže jejich tvar ovlivnit hloubka oceánu. Takové vlně je jedno, zda je dno 500 m pod hladinou nebo 5 km pod hladinou. Tím se problematika značně zjednodušuje. Úlohu rozdělíme na dvě části – vlny dlouhé a vlny krátké.

Dlouhé vlny na hluboké vodě

Pokusíme se určit disperzní relaci z rozměrové analýzy problému. Na čem může záviset frekvence vln? Z úvodu již víme, že frekvence nebude záviset na hloubce oceánu. Vlastnosti dlouhých vln také nebudou záviset na povrchovém napětí. To ovlivňuje prohnutí hladiny malých rozměrů, tedy vlny krátké. Vzpomeňte si na školní experiment s jehlou ležící na hladině vody. Jehlu na hladině drží právě povrchové napětí a průhyb hladiny je patrný na milimetrové vzdálenosti od jehly. Zbývá tak závislost na hustotě kapaliny, na tíhovém zrychlení a samozřejmě na vlnovém vektoru (jde o disperzní relaci, tj. vztah mezi ω a k):

$$\omega = \omega(\rho, g, k).$$

Předpokládejme nejjednodušší možnou závislost, tj. mocninou

$$\omega = \rho^\alpha g^\beta k^\gamma.$$

Na první pohled se zdá nemožné z jedné rovnice určit tři neznámé exponenty α , β , γ . Fyzikální veličiny se ale skládají z hodnoty a rozměru. Právě rozměry jsou zde podstatné. Zapišme rozměr veličin hledaného vztahu:

$$s^{-1} = kg^\alpha m^{-3\alpha} \cdot m^\beta s^{-2\beta} \cdot m^{-\gamma}.$$

Disperzní relace musí platit pro širokou škálu parametrů. To je možné jen tehdy, jestliže exponenty rozměrů budou souhlasit u všech základních jednotek SI:

$$m: \quad 0 = -3\alpha + \beta - \gamma,$$

$$kg: \quad 0 = \alpha,$$

$$s: \quad -1 = -2\beta.$$

Tyto tři rovnice mají jediné řešení:

$$\alpha = 0; \quad \beta = 1/2; \quad \gamma = 1/2$$

a hledaná disperzní relace má tvar

$$\omega = \sqrt{gk}. \quad (4.17)$$

Disperzní relaci jsme odvodili z rozměrové analýzy bez znalosti procesů probíhajících ve vlně. Je třeba přiznat, že výsledný vztah je sice jednoznačný, ale až na násobící bezrozměrný koeficient ($\omega = \text{const} \sqrt{gk}$). Ten je nutné určit experimentálně a v tomto případě je roven jedné. Ze vztahů (4.8) a (4.11) určíme fázovou a grupovou rychlost:

$$v_f = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{g}{k}} = \sqrt{\frac{\lambda g}{2\pi}},$$

$$v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{k}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\lambda g}{2\pi}} = \frac{1}{2} v_f.$$

U dlouhých vln na hluboké vodě dochází k disperzi (závislosti rychlosti vln na vlnové délce). Dlouhé vlny se šíří vyšší rychlostí. Grupová rychlost je rovna polovině fázové rychlosti. Tou se šíří balík dlouhých vln (například za lodí).

Krátké vlny na hluboké vodě

Krátké vlny jsou dominantně ovlivněny povrchovým napětím σ , naopak zanedbatelný je vliv tíhového pole (to ovlivňuje především velké vlny). Obdobnou rozměrovou analýzou můžeme získat vztah

$$\omega = \sqrt{\frac{\sigma k^3}{\rho}}. \quad (4.18)$$

Standardním postupem určíme fázovou a grupovou rychlost

$$v_f = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{\sigma k}{\rho}} = \sqrt{\frac{2\pi\sigma}{\lambda\rho}},$$

$$v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k} = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{\sigma k}{\rho}} = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{2\pi\sigma}{\lambda\rho}} = \frac{3}{2} v_f.$$

U krátkých vln je situace opačná než u dlouhých. Kratší vlny se šíří rychleji a grupová rychlost je větší než fázová ($v_g = 1.5 v_f$).

Obecné vlny na hluboké vodě

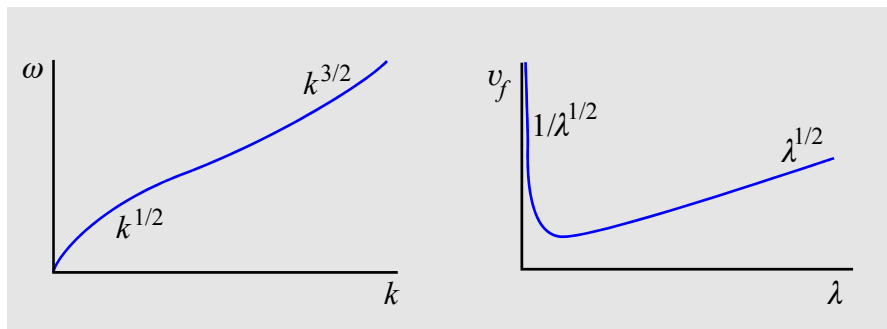
Předchozí dva limitní vztahy pro dlouhé a krátké vlny lze spojit do disperzní relace pro vlny libovolné vlnové délky:

$$\omega = \sqrt{\frac{\sigma k^3}{\rho} + gk}. \quad (4.19)$$

Pro fázovou a grupovou rychlost standardně nalezneme

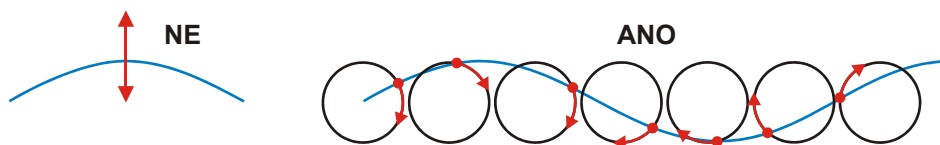
$$v_f = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{\sigma k}{\rho} + \frac{g}{k}} = \sqrt{\frac{2\pi\sigma}{\lambda\rho} + \frac{\lambda g}{2\pi}},$$

$$v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k} = \left(\frac{3}{2} \frac{\sigma k}{\rho} + \frac{1}{2} \frac{g}{k} \right) / \sqrt{\frac{\sigma k}{\rho} + \frac{g}{k}}.$$



Poznámka 1: Vztahy jsme odvodili bez znalosti fyzikálních zákonitostí. Sama teorie šíření vln na hluboké vodě není jednoduchá. Vlnění není příčné, jak by se na první pohled mohlo zdát. Částice

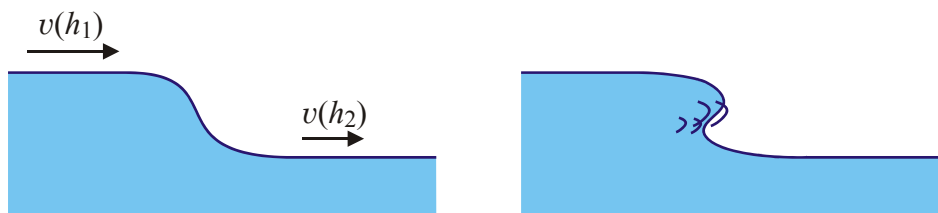
vody se nepohybují v hřebeni nahoru a dolů (nalevo). Je tomu tak proto, že voda je nestlačitelná a jde-li hřeben dolů, musí se voda roztékat do strany. Výsledkem je pohyb vodních částíček po kružnici. Vlny na vodě nejsou příčné (nejsou ani podélné, jde o směsici příčného a podélného vlnění).



Poznámka 2: Na mělčině závisí disperzní relace na hloubce vody. Tak se i fázová rychlost stává závislou na hloubce. Přibližně platí

$$v_f \sim \sqrt{gh}. \quad (4.20)$$

Vznikne-li na vodní hladině schodovitý útvar, šíří se horní část vyšší rychlostí a vlna známým způsobem přepadává.



4.1.3. Lineární teorie (elektromagnetické vlny)

Máme-li ke sledovanému jevu nějaký teoretický model, nejlépe uspořádaný do přehledné soustavy rovnic, je napůl vyhráno. Je-li navíc teorie lineární, tj. všechny neznámé se vyskytují v prvních mocninách, je další postup přímočarý:

1. Můžeme se pokusit některé proměnné ze soustavy vyloučit a snížit tak počet proměnných. Ideálem je samozřejmě získat jedinou rovnici pro jedinou neznámou. Popisuje-li model vlnění, bude výsledná rovnice nějakým druhem vlnové rovnice. Vylučování proměnných ze soustavy výchozích rovnic vůbec nemusí být jednoduché. Zpravidla jde o soustavu parciálních diferenciálních rovnic a ne každý umí s těmito rovnicemi zacházet. Naštěstí můžeme výpočet kdykoli přerušit a přejít ke kroku 2. Dokonce se o snížení počtu proměnných vůbec pokoušet nemusíme a můžeme rovnou přistoupit ke kroku 2.
2. Zcela obecné řešení (vlnu) můžeme složit z rovinných vln podle vztahu (4.10). Vzhledem k tomu, že výchozí soustava rovnic (nebo jen rovnice jediná, podařilo-li se nám snížit počet proměnných na jednu) je lineární, můžeme dosadit do soustavy jednu konkrétní rovinnou vlnu a zkoumat chování soustavy pro tuto vlnu. Kdykoli později můžeme úplné řešení z takovýchto rovinných vln složit. S rovinnými vlnami se mimořádně snadno zachází. Zkusme rovinnou vlnu derivovat podle časové a prostorové proměnné:

$$\frac{\partial}{\partial t} \psi = \frac{\partial}{\partial t} A e^{i[\mathbf{kx} - \omega t]} = -i\omega A e^{i[\mathbf{kx} - \omega t]} = -i\omega \psi,$$

$$\frac{\partial}{\partial x_l} \psi = \frac{\partial}{\partial x_l} A e^{i[\mathbf{kx} - \omega t]} = +ik_l A e^{i[\mathbf{kx} - \omega t]} = +ik_l \psi.$$

Vidíme, že parciální derivace pro rovinnou vlnu přecházejí na algebraické výrazy. Jakékoli kombinace parciálních derivací lze nahradit algebraickými výrazy plynoucími z obou uvedených relací. Sestavme je do přehledné tabulky:

Výraz	Příklad
$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow -i\omega$	$\frac{\partial f}{\partial t} = -i\omega f$
$\frac{\partial}{\partial x_l} \rightarrow +ik_l$	$\frac{\partial f}{\partial x_l} \rightarrow +ik_l f$
$\nabla \rightarrow +i\mathbf{k}$	$\nabla f \rightarrow +i\mathbf{k} f$
$\text{div} \rightarrow i\mathbf{k} \cdot$	$\text{div} \mathbf{V} = i\mathbf{k} \cdot \mathbf{V}$
$\text{rot} \rightarrow i\mathbf{k} \times$	$\text{rot} \mathbf{V} = i\mathbf{k} \times \mathbf{V}$
$\Delta \rightarrow -k^2$	$\Delta f \rightarrow -k^2 f$

Podle těchto pravidel převedeme výchozí soustavu na algebraickou soustavu rovnic, se kterou se relativně snadno zachází. Tento krok je ekvivalentní provedení Fourierovy transformace.

- Vzhledem k tomu, že hledáme nenulové řešení, musí být determinant soustavy nulový (předpokládáme, že výsledná soustava nemá pravou stranu a většinou tomu tak skutečně je). Z této podmínky získáme vztah mezi ω a \mathbf{k} , tedy disperzní relaci. Často je výhodné eliminací snížit počet proměnných soustavy a tím řád počítaného determinantu. Snižování počtu proměnných můžeme provádět před použitím pravidel Fourierovy transformace (pro parciální diferenciální rovnice, viz krok 1) i po něm v algebraické soustavě.
- Je-li disperzní relace komplexní, je vhodné řešit případnou stabilitu či nestabilitu nalezeného řešení. Komplexní úhlová frekvence nebo vlnový vektor znamená ve výrazu $\exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)]$ přítomnost exponenciálních neoscilujících členů, které mohou vést k útlumu nebo exponenciálnímu narůstání řešení (nestabilitě).
- Z disperzní relace se pokusíme určit úhlovou frekvenci a ze vztahů (4.8) a (4.11) nalezneme fázovou a grupovou rychlost vln.
- Vrátíme se k původní soustavě rovnic a zkoumáme vztahy mezi jednotlivými veličinami, zejména vzájemné směry různých vektorů, zda je vlnění příčné či podélné, atd.

Jako jednoduchý příklad na uvedený postup řešíme elektromagnetické vlny ve vakuu. Za výchozí soustavu rovnic poslouží Maxwellovy rovnice:

$$\begin{aligned}
 \text{div} \mathbf{D} &= \rho, \\
 \text{div} \mathbf{B} &= 0, \\
 \text{rot} \mathbf{H} &= \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \\
 \text{rot} \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}.
 \end{aligned} \tag{4.21}$$

Ve vakuu je $\rho = 0$, $\mathbf{j} = 0$ a platí jednoduché materiálové vztahy $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$. Jako základní ponecháme v soustavě vektory \mathbf{E} a \mathbf{B} :

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} \mathbf{E} &= 0, \\
\operatorname{div} \mathbf{B} &= 0, \\
\operatorname{rot} \mathbf{B} &= \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \\
\operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}.
\end{aligned} \tag{4.22}$$

Výsledkem je soustava Maxwellových rovnic ve vakuu. První dvě skalární rovnice jsou okrajovými podmínkami druhých dvou vektorových rovnic, které tvoří výchozí soustavu rovnic. Ukážeme dva postupy řešení. V prvním se pokusíme eliminovat proměnné ještě před provedením Fourierovy transformace (FT), v druhém až po provedení FT.

Postup 1

Z Maxwellových rovnic se pokusíme vyloučit magnetickou indukci a získat rovnici pro elektrické pole. Na čtvrtou rovnici zapůsobíme operací rotace a na pravé straně za $\operatorname{rot} \mathbf{B}$ dosadíme z třetí rovnice:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \operatorname{rot} \mathbf{B}}{\partial t} \Rightarrow \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \Rightarrow (\operatorname{grad} \operatorname{div} - \Delta) \mathbf{E} = -\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}.$$

Vzhledem k tomu, že $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$, získáváme výslednou rovnici

$$\Delta \mathbf{E} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0. \tag{4.23}$$

Jde o známou vlnovou rovnici pro elektrické pole. Obdobně bychom eliminací elektrického pole mohli z Maxwellových rovnic získat stejnou rovnici pro magnetické pole. Nyní provedeme FT podle pravidel uvedených v této kapitole:

$$(-k^2 + \varepsilon_0 \mu_0 \omega^2) \mathbf{E} = 0.$$

Parciální diferenciální rovnici jsme převedli na algebraickou rovnici bez pravé strany. Nenulové řešení bude existovat pouze tehdy, když

$$-k^2 + \varepsilon_0 \mu_0 \omega^2 = 0 \Rightarrow \omega(k) = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0}} k.$$

Z podmínky nenulovosti řešení jsme odvodili disperzní relaci. Fázová rychlost šíření (rychlost světla) je

$$c \equiv v_f = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0}}. \tag{4.24}$$

Nalezená disperzní relace tvaru $\omega = ck$ je nejjednodušší možná (přímková), fázová i grupová rychlost je stejná a vlnění nejeví disperzi (fázová rychlost není závislá na vlnové délce resp. vlnovém vektoru).

Postup 2

Budeme předpokládat, že se nám nepodařilo ze soustavy Maxwellových rovnic eliminovat rovnici pro elektrické či magnetické pole. Provedme proto FT již v původní soustavě rovnic (4.22):

$$\begin{aligned}
\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} &= 0, & \mathbf{k} \cdot \mathbf{B} &= 0, \\
\mathbf{k} \times \mathbf{B} &= -\omega \varepsilon_0 \mu_0 \mathbf{E}, & \mathbf{k} \times \mathbf{E} &= +\omega \mathbf{B}.
\end{aligned} \tag{4.25}$$

Eliminaci proměnných lze provést nyní. Dosadíme \mathbf{B} z poslední rovnice do předposlední:

$$\frac{1}{\omega} \mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) = -\omega \varepsilon_0 \mu_0 \mathbf{E} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{k}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}) - k^2 \mathbf{E} = -\omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 \mathbf{E}.$$

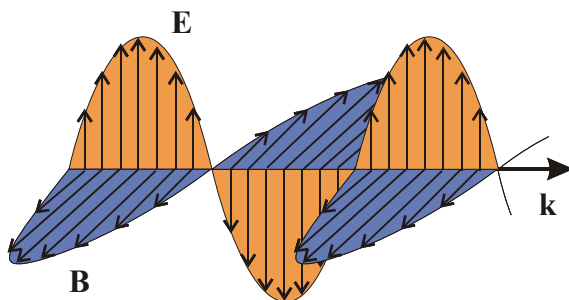
První výraz je podle první rovnice z (4.25) nulový a rovnice pro elektrické pole proto je

$$(k^2 - \varepsilon_0 \mu_0 \omega^2) \mathbf{E} = 0.$$

Podmínkou nenulovosti elektrického pole je opět disperzní relace

$$k^2 - \varepsilon_0 \mu_0 \omega^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega(k) = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0}} k = ck.$$

Z původní soustavy (4.25) snadno zjistíme, že vektory \mathbf{E} , \mathbf{B} a \mathbf{k} jsou navzájem kolmé a vlnění je proto příčné.



Poznámka: Vidíme, že není důležité, v které fázi výpočtu provedeme FT, oba postupy vedou ke stejnému výsledku. Pokud neumíme zacházet s parciálními diferenciálními rovnicemi, je výhodné provést FT co nejdříve. Nepodaří-li se nám provést eliminaci proměnných ani před, ani po FT, bude podmínkou nenulovosti řešení nulovost determinantu celé soustavy.

4.1.4. Nelineární teorie (zvukové vlny)

Je-li výchozí model nelineární, může jít o značný problém. Rovnice jsou řešitelné jen někdy a žádné obecné postupy neexistují. Rovnice je možné linearizovat, ale tím ztrácíme mnoho z vlastností skutečných řešení. Lineární aproximace je ospravedlnitelná jen pro vlny malých amplitud, které chápeme jako malé poruchy nějakého známého stacionárního řešení výchozí soustavy rovnic. Někdy je linearizace jedinou možností, jak se o řešení vůbec něco dozvědět. Z chování malých poruch můžeme obdobnými postupy jako v teoretické mechanice řešit problém stability řešení. Linearizace probíhá ve dvou krocích. Nejprve nalezneme „klidové“ řešení výchozí soustavy rovnic bez přítomnosti vln. V homogenním neomezeném prostředí jde zpravidla o konstantní řešení, u omezeného prostředí (například válcové vlákno) je situace složitější. V dalším kroku chápeme vlnu jako malou poruchu nalezeného řešení. „Malá porucha“ znamená, že relativní poruchy (vydělené nějakou charakteristickou hodnotou) se chovají jako malý bezrozměrný parametr, jehož mocniny vyšší než první zanedbáváme. V praxi řešení s přidanou poruchou dosadíme do výchozí soustavy rovnic a zanedbáme kvadráty a vyšší mocniny všech poruch. Výsledkem je lineární soustava rovnic pro poruchy, na kterou aplikujeme postup z minulé kapitoly.

U nelineární soustavy rovnic můžeme tedy použít postup založený na linearizaci, který je obdobný vyšetřování stability u soustav obyčejných diferenciálních rovnic (TF1). I zde zkoumáme chování malých poruch, které mohou být utlumeny (stabilita), exponenciálně narůstat (nestabilita) nebo mít vlnový charakter. Shrňme nyní základní kroky řešení nelineární soustavy metodou linearizace (metodou perturbací, malých poruch):

1. Nalezení stacionárního řešení.
2. Linearizace pomocí malých poruch.
3. Možná eliminace proměnných.
4. Fourierova transformace.

5. Možná eliminace proměnných (algebraická).
6. Nalezení disperzní relace (determinant soustavy = 0).
7. Vyšetření stability řešení.
8. Nalezení fázové a grupové rychlosti.
9. Nalezení vzájemných směrů mezi vektory.

V kapitole 4.1.2 (rozměrová analýza bez znalosti teorie) začínal výpočet až krokem 6, nalezená disperzní relace byla reálná a tak odpadlo vyšetřování stability (krok 7). U lineárních soustav začíná výpočet krokem 3 (kapitola 4.1.3). U nelineárních soustav musí proběhnout celý uvedený postup. Celý výpočet si ukážeme na zvukových vlnách šířících se homogenním izotropním plynným prostředím.

ZVUKOVÉ VLNY V PLYNECH

Před vlastním řešením si sestavme výchozí soustavu rovnic

Rovnice pro hustotu

Uvažujme proudění aditivní veličiny A (roste s množstvím látky, například hmotnost, náboj, energie). Proudění popisujeme čtyřmi veličinami

$$\rho_A \equiv \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta A}{\Delta V}; \quad \mathbf{j}_A \equiv \rho_A \mathbf{v}. \quad (4.26)$$

Tyto čtyři veličiny tvoří relativistický čtyřvektor a transformují se za pomoci Lorentzovy matice. Jednotlivé komponenty čtyřvektoru se nazývají:

- ρ_A - hustota veličiny A ,
- \mathbf{j}_A - tok veličiny A (množství A proteklé jednotkovou plochou za jednotku času).

Jestliže se veličina A při proudění neztrácí ani nepřibývá, musí časový úbytek veličiny z libovolného objemu být roven toku veličiny přes plochu ohraničující tento objem:

$$-\frac{d}{dt} \int_V \rho_A dV = \int_{\partial V} \mathbf{j}_A d\mathbf{S}$$

Hranice objemu V je označena ∂V . Pomocí Gaussovy věty integrálního počtu převedeme plošný integrál na objemový a oba integrály spojíme:

$$\int_V \left(\frac{\partial \rho_A}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j}_A \right) dV = 0.$$

Uvedený vztah musí při proudění platit v libovolném objemu a to je možné jen, je-li argument integrálu roven nule:

$$\frac{\partial \rho_A}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j}_A = 0 \quad (4.27)$$

Odvozený vztah se nazývá rovnice kontinuity a na pravé straně je nula, pokud se veličina A při proudění zachovává. Nezachovává-li se, není na pravé straně nula.

První ze sady rovnic popisujících zvukové vlny bude rovnice pro hustotu hmoty (proudící aditivní veličinou bude hmotnost M). Index M v (4.27) budeme vynechávat

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{v} = 0. \quad (4.28)$$

Rovnice pro rychlostní pole

Další rovnicí musí být rovnice pro časový vývoj rychlostního pole. Pro objekt o hmotnosti m platí Newtonova pohybová rovnice

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} .$$

Pro proudící prostředí zavedeme hustotu síly

$$\mathbf{f} \equiv \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{F}}{\Delta V} . \quad (4.29)$$

V hustotách bude Newtonova pohybová rovnice mít tvar

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{f} . \quad (4.30)$$

Nalezněme nyní úplnou časovou derivaci rychlostního pole. Odvození provedeme ve složkách:

$$\frac{d}{dt} v_k(t, \mathbf{x}) = \frac{\partial v_k}{\partial t} + \frac{\partial v_k}{\partial x_l} \frac{dx_l}{dt} = \frac{\partial v_k}{\partial t} + \frac{\partial v_k}{\partial x_l} v_l = \frac{\partial v_k}{\partial t} + \left(v_l \frac{\partial}{\partial x_l} \right) v_k .$$

V posledním výrazu jsme působící operátor napsali do závorky. Ve vektorovém tvaru máme

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} . \quad (4.31)$$

Změna rychlostního pole je dána dvěma členy. První souvisí s explicitními změnami proudění (změna rychlostního pole v řece v důsledku jarního tání). Druhý souvisí s prouděním samotným, s přenosem látky podél proudnic (substancionální, neboli konvektivní člen). Pohybová rovnice (4.30) proto má výsledný tvar

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \mathbf{f} . \quad (4.32)$$

Zbývá určit hustotu síly. Ta se liší podle procesů, které popisujeme. Může jít o hustotu Lorentzovy síly $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$, u zvukových vln v plynech půjde o tlakovou sílu. Standardně síla míří k minimu potenciální energie:

$$\mathbf{F} = -\nabla W_p \quad (4.33)$$

nebo v hustotách

$$\mathbf{f} = -\nabla w_p . \quad (4.34)$$

Tlaková energie je $W_p = \int p dV$, hustota tlakové energie proto je $w_p = p$ a hustota síly způsobená tlakem vychází

$$\mathbf{f} = -\nabla p . \quad (4.35)$$

Pohybová rovnice (4.32) s hustotou síly způsobenou tlakem má proto tvar

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p . \quad (4.36)$$

Jde o hledanou rovnici pro časový vývoj rychlostního pole.

Rovnice pro tlak

V rovnici pro hustotu se objevilo rychlostní pole, v rovnici pro rychlostní pole se objevil tlak. Je tedy logické hledat rovnici pro časový vývoj tlaku. V té by se ale objevily další veličiny, pro které bychom museli hledat další rovnice. Dospěli bychom tak k nekonečné soustavě rovnic (plyne ze středování Boltzmannovy rovnice přes momenty rychlosti). Tuto

nekonečnou soustavu musíme v určitém okamžiku ukončit nějakým algebraickým vztahem. Tím sice přijdeme o zajímavé jevy spojené s dalšími rovnicemi, ale na druhé straně tak získáme soustavu, která je alespoň principiálně řešitelná. Naši soustavu pro popis zvukových vln v plynech uzavřeme nyní. Nebudeme se již zabývat časovým vývojem tlaku, ale soustavu uzavřeme stavovou rovnicí ve tvaru

$$p = p(\rho). \quad (4.37)$$

Velké množství látek odpovídá polytropnímu vztahu

$$p = K \rho^\gamma \quad (4.38)$$

a tlak je úměrný nějaké mocnině hustoty. Navíc je možné zvukovou vlnu považovat za adiabatický děj. Vlnění je tak rychlé, že tepelná výměna s okolím je zanedbatelná. Polytropní děj má potom polytropní koeficient γ roven adiabatickému koeficientu κ . ($pV^\kappa = \text{const} \Rightarrow p = K\rho^\kappa$).

Zvukové vlny v nepohyblivém prostředí

Za výchozí model budeme považovat soustavu rovnic (4.28), (4.36) a (4.37):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \rho \mathbf{v} &= 0, \\ \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} &= -\nabla p, \\ p &= p(\rho). \end{aligned} \quad (4.39)$$

V soustavě je celkem pět neznámých (ρ , \mathbf{v} , p) a soustava je nelineární, vystupují zde součiny neznámých. Proto provedeme celý postup (body 1 až 9):

1. *Stacionární řešení:* Stac. řešením (například nepohyblivý plyn uzavřený v místnosti) je

$$\rho = \rho_0, \quad \mathbf{v} = 0, \quad p = p_0.$$

2. *Linearizace:* Přepokládejme přítomnost malé poruchy stacionárního řešení

$$\rho = \rho_0 + \delta\rho, \quad \mathbf{v} = \delta\mathbf{v}, \quad p = p_0 + \delta p.$$

Tuto poruchu dosadíme do soustavy (4.39):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho_0 + \delta\rho) + \text{div}[(\rho_0 + \delta\rho)(\delta\mathbf{v})] &= 0, \\ (\rho_0 + \delta\rho) \frac{\partial(\delta\mathbf{v})}{\partial t} + \rho(\delta\mathbf{v} \cdot \nabla)(\delta\mathbf{v}) &= -\nabla(p_0 + \delta p), \\ \delta p = \alpha(\rho_0) \delta\rho; \quad \alpha &\equiv \frac{\partial p}{\partial \rho}. \end{aligned}$$

V soustavě ponecháme jen poruchy prvního řádu, poruchy vyšších řádů zanedbáme. Derivace konstant jsou nulové. Ze soustavy po linearizaci proto zbude:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\delta\rho) + \text{div}[\rho_0(\delta\mathbf{v})] &= 0, \\ \rho_0 \frac{\partial(\delta\mathbf{v})}{\partial t} &= -\nabla(\delta p), \\ \delta p = \alpha(\rho_0) \delta\rho; \quad \alpha &\equiv \frac{\partial p}{\partial \rho}. \end{aligned} \quad (4.40)$$

3. *Eliminace proměnných:* Soustava (4.40) je již lineární soustavou pro neznámé $\delta\rho, \delta\mathbf{v}, \delta p$. V principu můžeme nyní eliminovat ze soustavy poruchu tlaku δp dosazením z poslední rovnice. Tento krok ale také můžeme provést později.
4. *Fourierova transformace:* Soustavu převedeme na algebraickou pomocí Fourierovy transformace. Naše soustava je již lineární a tak je tento krok ekvivalentní dosazení rovinné vlny do soustavy. Výsledkem je

$$\begin{aligned} -i\omega \delta\rho + i\rho_0(\mathbf{k} \cdot \delta\mathbf{v}) &= 0, \\ -i\omega\rho_0 \delta\mathbf{v} &= -i\mathbf{k} \delta p, \\ \delta p &= \alpha \delta\rho. \end{aligned} \quad (4.41)$$

5. *Eliminace proměnných:* Získaná soustava je pro pět neznámých a determinant by se počítal z matice 5×5 . Pomocí poslední rovnice eliminujeme tlak:

$$\begin{aligned} -\omega \delta\rho + \rho_0(\mathbf{k} \cdot \delta\mathbf{v}) &= 0, \\ \mathbf{k} \alpha \delta\rho - \omega\rho_0 \delta\mathbf{v} &= 0. \end{aligned}$$

Nyní máme jen čtyři rovnice (jednu skalární a jednu vektorovou) pro čtyři neznámé $\delta\rho, \delta\mathbf{v}$ a determinant by se počítal z matice 4×4 . Z druhé (vektorové) rovnice můžeme ještě spočítat poruchu rychlosti a dosadit do první rovnice:

$$(-\omega^2 + \alpha k^2) \delta\rho = 0.$$

Výsledkem je jedna jediná rovnice pro jednu jedinou neznámou $\delta\rho$. Ne vždy lze provést eliminaci proměnných až do konce.

6. *Disperzní relace:* Podmínkou nenulovosti řešení je nulovost kulaté závorky před $\delta\rho$ (jde o determinant matice 1×1):

$$-\omega^2 + \alpha(\rho_0)k^2 = 0. \quad (4.42)$$

Nalezenou disperzní relaci lze snadno řešit vzhledem k ω , za α dosadíme z (4.40):

$$\omega = \sqrt{\frac{\partial p}{\partial \rho}} k. \quad (4.43)$$

7. *Stabilita řešení:* Disperzní relace vyšla reálná, reálnému vlnovému vektoru odpovídá reálná úhlová frekvence a řešením jsou vlny. V systému nedochází ani k útlumu ani k nestabilitě.
8. *Fázová a grupová rychlost:* Výsledná disperzní relace je lineární, fázová a grupová rychlost mají stejnou hodnotu, zvuk se šíří rychlostí

$$c_s = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{\partial p}{\partial \rho}}. \quad (4.44)$$

Speciálně pro polytropní děje (4.38) vychází

$$c_s = \sqrt{\gamma \frac{p}{\rho}}. \quad (4.45)$$

9. *Vztahy vektorů:* Z druhé rovnice (4.41) je zřejmé, že porucha rychlostního pole míří ve směru šíření vln (vlnového vektoru) a jde tak o *vlnění podélné*.

Za pomoci rychlosti zvuku lze disperzní relaci zvukových vln zapsat v často používaném tvaru

$$\omega = c_s k. \quad (4.46)$$

Zvukové vlny v pohyblivém prostředí

Připusťme nyní nenulovou rychlost ve stacionárním řešení (to odpovídá šíření zvuku v pohybujícím se prostředí) a požadujeme řešení rychlosti ve tvaru

$$\rho = \rho_0 + \delta\rho, \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \delta\mathbf{v}, \quad p = p_0 + \delta p. \quad (4.47)$$

Co všechno se změní? Výpočet probíhá zcela analogicky, nyní ale při linearizaci přispěje i konvektivní člen v pohybové rovnici. Po snadném výpočtu získáme disperzní relaci

$$[\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_0]^2 - \alpha(\rho_0)k^2 = 0; \quad \alpha = \frac{\partial p}{\partial \rho} \quad (4.48)$$

a z ní pozorovanou úhlovou frekvenci

$$\omega = c_s k + \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_0 = c_s k + v_0 k \cos \alpha = c_s k \left(1 + \frac{v_0}{c_s} \cos \alpha \right). \quad (4.49)$$

Ve výrazu jsme α označili úhel mezi vlnovým vektorem \mathbf{k} a rychlostí prostředí \mathbf{v}_0 . Označíme-li ještě frekvenci zvuku v nepohyblivém prostředí $\omega_0 = c_s k$, máme výsledný vztah

$$\omega = \omega_0 \left(1 + \frac{v_0}{c_s} \cos \alpha \right), \quad (4.50)$$

ktejý není nic jiného než Dopplerův vzorec pro změnu frekvence vlivem pohybu zdroje vlnění.

4.1.5. Další příklady (Jeansovo kritérium, vlnová a KG rovnice)**JEANSOVO KRITÉRIUM**

Popišme nyní vlny v oblaku plynu a prachu, který je ovládán gravitačním polem (mlhovinu). Zejména se budeme zajímat o to, za jakých podmínek je generovaná zvuková vlna nestabilní a může dojít k hroucení části mlhoviny a vzniku globule – zhuštění, která je předchůdcem budoucí hvězdy.

V následující tabulce jsou porovnány veličiny popisující elektrostatičké a gravitační pole. Správný koeficient u Laplace-Poissonovy rovnice pro gravitační potenciál získáte porovnáním vztahů pro potenciální energii bodového zdroje elektrostatičkého a gravitačního pole.

Veličina	Elektrostatičké pole	Gravitační pole
Potenciál bodového zdroje	$\phi_e = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$	$\phi_g = -G \frac{M}{r}$
Potenciální energie	$W_e = q \phi_e$	$W_g = m \phi_g$
Rovnice pro potenciál	$\Delta\phi_e = -\frac{\rho_e}{\epsilon_0}$	$\Delta\phi_g = 4\pi G \rho_g$
Síla vyjádřená z energie	$\mathbf{F} = -\nabla W_e$	$\mathbf{F} = -\nabla W_g$
Síla vyjádřená z potenciálu	$\mathbf{F} = -q \nabla \phi_e$	$\mathbf{F} = -m \nabla \phi_g$
Hustota síly	$\mathbf{f} = -\rho_e \nabla \phi_e$	$\mathbf{f} = -\rho_g \nabla \phi_g$

Za výchozí sadu rovnic budeme považovat soustavu (4.39) doplněnou o hustotu gravitační síly a rovnici pro gravitační potenciál:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{v} &= 0, \\ \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} &= -\nabla p - \rho \nabla \phi, \\ \Delta \phi &= 4\pi G \rho, \\ p &= p(\rho).\end{aligned}\tag{4.51}$$

Vzhledem k tomu, že jde jen o gravitační problém bez přítomnosti elektrických polí a nemůže proto dojít k záměně hustot ani potenciálů, vynecháváme index g . Celkem máme 6 rovnic pro 6 neznámých ρ , \mathbf{v} , ϕ , p . Řešení budeme hledat v perturovaném tvaru

$$\rho = \rho_0 + \delta\rho, \quad \mathbf{v} = \delta\mathbf{v}, \quad \phi = \phi_0 + \delta\phi, \quad p = p_0 + \delta p.$$

Obdobným postupem nalezneme disperzní relaci zvukových vln ovlivněných gravitačním polem

$$\omega^2 = c_s^2 k^2 - 4\pi G \rho_0; \quad c_s^2 \equiv \frac{\partial p}{\partial \rho}.\tag{4.52}$$

Oproti relaci (4.46) je zde navíc druhý člen na pravé straně. Řešení vzhledem k ω je jednoduché:

$$\omega = \pm \sqrt{c_s^2 k^2 - 4\pi G \rho_0}.\tag{4.53}$$

Na první pohled vidíme že úhlová frekvence není za všech podmínek reálnou veličinou. Pro

$$c_s^2 k^2 < 4\pi G \rho_0\tag{4.54}$$

je úhlová frekvence ryze imaginární, $\omega = \pm i b$ a v rovinné vlně se objevují členy

$$e^{i\omega t} = e^{\mp bt}.$$

Některé typy poruch proto mohou exponenciálně narůstat a mlhovina se stává nestabilní. Právě v takovém prostředí mohou vznikat hvězdy jako původně malé poruchy narostlé do makroskopických rozměrů. Prozkoumejme proto podmínku (4.54) podrobněji:

$$c_s^2 \frac{4\pi^2}{\lambda^2} < 4\pi G \rho_0 \Rightarrow \lambda > \sqrt{\frac{\pi}{G \rho_0}} c_s = \sqrt{\frac{\pi}{G \rho_0}} \sqrt{\gamma \frac{p_0}{\rho_0}} = \sqrt{\frac{\pi}{G \rho_0}} \sqrt{\gamma \frac{n_0 kT}{n_0 m_0}} = \sqrt{\frac{\pi \gamma kT}{G \rho_0 m_0}}.$$

Při odvození jsme použili pro rychlost zvuku vztah (4.45). Poruchy s vlnovou délkou větší než určitá mez jsou gravitačně nestabilní. Aby se v mlhovině mohly tvořit hvězdy, musí mít rozměry větší než tato kritická mez. Uvedené tvrzení se nazývá Jeansovo kritérium a bylo odvozeno v roce 1902:

$$L > \sqrt{\frac{\pi \gamma kT}{G \rho_0 m_0}}.\tag{4.55}$$

Z disperzní relace (4.53) není samozřejmě problém dopočítat fázovou a grupovou rychlost šíření poruch mlhovinou.

VLNOVÁ ROVNICE

Na klasickou vlnovou rovnici narazíme v mnoha vědních odvětvích. Odpovídá jednoduchým vlnám bez disperze.

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \psi = 0 .$$

Rovnice je lineární a každé její „rozumné“ řešení je možné zapsat pomocí Fourierovy transformace jako superpozici rovinných vln. Po dosazení rovinné vlny do vlnové rovnice získáme disperzní relaci

$$\omega^2 = c^2 k^2 .$$

Standardním postupem určíme fázovou a grupovou rychlost:

$$v_f = \frac{\omega}{k} = c; \quad v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k} = c .$$

Fázová i grupová rychlost je stejná a nezávisí na vlnové délce parciální vlny.

KLEIN-GORDONOVA ROVNICE

Klein-Gordonova rovnice je správnou relativistickou rovnicí pro volnou částici se spinem rovným nule

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \mu^2\right) \psi = 0; \quad \mu^2 \equiv \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} .$$

Jde o vlnovou rovnici s konstantním členem, která limitně přechází v nerelativistickou Schrödingerovu rovnici (viz TF2). Rovnici je lineární, její řešení opět budeme chápat jako superpozici rovinných vln. Po provedení Fourierovy Klein-Gordonovy rovnice získáme disperzní relaci

$$\omega^2 = c^2 k^2 + c^2 \mu^2 .$$

Standardním postupem určíme fázovou a grupovou rychlost:

$$v_f = \frac{\omega}{k} = c \sqrt{1 + \frac{\mu^2}{k^2}} = c \sqrt{1 + \frac{\mu^2 \lambda^2}{4\pi^2}} ,$$

$$v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k} = \frac{c}{\sqrt{1 + \frac{\mu^2}{k^2}}} = \frac{c}{\sqrt{1 + \frac{\mu^2 \lambda^2}{4\pi^2}}} .$$

Na první pohled je zřejmé, že grupová rychlost je vždy podsvětelná. Oproti tomu fázová rychlost je vždy nadsvětelná a nemá význam přenosu informace. Mezi oběma rychlostmi je jednoduchý vztah $v_f v_g = c^2$. Obě rychlosti závisí na vlnové délce parciální vlny (tzv. disperze).

4.2. MAGNETOHYDRODYNAMIKA

Magnetohydrodynamika pohlíží na plazma jako na vodivou tekutinu (nebo více prolínajících se tekutin), jejíž chování dominantně ovlivňuje magnetické pole. Existuje několik možných variant výchozích předpokladů teorie, v tomto textu budeme využívat tato předpoklady:

■ Plazma lze považovat za kontinuum

Plazma je srážkově dominantní a na prostorových i časových škálách jsou srážky podstatným jevem. Střední volné dráhy částic jsou mnohem kratší než rozměry L sledovaného plazmatu a střední kolizní čas pro jednotlivé částice je mnohem kratší než doba T , po kterou plazma sledujeme:

$$\lambda_e, \lambda_i, \lambda_n \ll L; \quad \tau_e, \tau_i, \tau_n \ll T. \quad (4.56)$$

■ Plazma je kvazineutrální

V plazmatu jsou volné nosiče náboje, ovšem v každém makroskopickém objemu je stejný počet kladných a záporných nábojů. Prostorová hustota náboje je nulová

$$\rho_Q = 0; \quad \text{resp.} \quad n_e = Z n_i, \quad (4.57)$$

kde Z je stupeň ionizace plazmatu a n koncentrace částic.

■ Jednotekutinový model

Plazma lze považovat navenek za jedinou tekutinu. Uniknou-li ze systému lehčí elektrony, táhnou za sebou pomocí Coulombova pole těžší ionty (ambipolární difúze). Rychlosti elektronové i iontové složky jsou zhruba vyrovnané:

$$\mathbf{v}_e \approx \mathbf{v}_i \quad (4.58)$$

Obě rychlosti jsou přibližně rovny těžišťové rychlosti

$$\mathbf{v} = \frac{\sum m_\alpha \mathbf{v}_\alpha}{\sum m_\alpha}. \quad (4.59)$$

Nepatrný rozdíl rychlostí elektronů a iontů souvisí s proudovou hustotou tekoucí plazmatem

$$\mathbf{j} = \sum Q_\alpha n_\alpha \mathbf{v}_\alpha. \quad (4.60)$$

Pro jedenkrát zcela ionizované plazma je $n_e = n_i$ a $\mathbf{j} = en(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_e)$. V jednotekutinovém modelu používáme namísto elektronové a iontové rychlosti těžišťovou rychlost a proudovou hustotu

$$\mathbf{v}_e, \mathbf{v}_i \rightarrow \mathbf{v}, \mathbf{j}$$

Odvoďme vztah pro hustotu Lorentzovy síly

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_\alpha &= Q_\alpha \mathbf{E} + Q_\alpha \mathbf{v}_\alpha \times \mathbf{B}; \\ \mathbf{f}_\alpha &= Q_\alpha n_\alpha \mathbf{E} + Q_\alpha n_\alpha \mathbf{v}_\alpha \times \mathbf{B}; \\ \mathbf{f} &= \sum (Q_\alpha n_\alpha \mathbf{E} + Q_\alpha n_\alpha \mathbf{v}_\alpha \times \mathbf{B}) = \mathbf{j} \times \mathbf{B}. \end{aligned}$$

První člen je nulový z důvodu požadavku kvazineutrality.

■ Nerelativistické plazma

Ve všech výpočtech budeme požadovat nerelativistické rychlosti všech druhů částic, tj.

$$\frac{v}{c} \ll 1. \quad (4.61)$$

To s sebou nese relativně jednoduchou podobu Ohmova zákona (v pohybujícím se plazmatu je třeba transformovat elektrické pole do laboratorní soustavy):

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}' = \sigma \frac{\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \doteq \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (4.62)$$

■ Posuvný proud je zanedbatelný

V Maxwellově rovnici $\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j} + \partial \mathbf{D} / \partial t$ zanedbáme Maxwellův posuvný člen oproti proudové hustotě. To je možné jen pro nízkofrekvenční děje, konkrétně pro rovinnou vlnu máme podmínku

$$\left| \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right| \ll \mathbf{j} \quad \Rightarrow \quad |i\omega \varepsilon \mathbf{E}| \ll \sigma \mathbf{E} \quad \Rightarrow \quad \sigma \gg \omega \varepsilon. \quad (4.63)$$

Podmínka je splněna pro vysoce vodivé plazma a nízké frekvence dějů.

4.2.1. Rovnice pro magnetické pole

Časový vývoj magnetického pole určíme z Maxwellových rovnic doplněných Ohmovým zákonem v pohyblivém prostředí (4.62)

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}; & \rho_Q &= 0; \\ \text{rot } \mathbf{H} &= \mathbf{j}; & \mathbf{j} &= \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}); \\ \text{div } \mathbf{B} &= 0; & \mathbf{D} &= \varepsilon \mathbf{E}; \\ \text{div } \mathbf{D} &= \rho_Q; & \mathbf{H} &= \mathbf{B} / \mu. \end{aligned} \quad (4.64)$$

Z první rovnice určíme časovou změnu magnetického pole, za elektrické pole dosadíme z Ohmova zákona a za proudovou hustotu z druhé z Maxwellových rovnic:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\text{rot } \mathbf{E} = -\text{rot} \left(\frac{\mathbf{j}}{\sigma} - \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right) = -\frac{1}{\sigma \mu} \text{rot rot } \mathbf{B} + \text{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{B}).$$

Dvojnou rotaci přepíšeme pomocí vztahu (4.234) a získáme výslednou rovnici

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{1}{\sigma \mu} \Delta \mathbf{B} + \text{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (4.65)$$

Rovnici pro časový vývoj magnetického pole lze upravit do tvaru se substancionální derivací. Použijeme k tomu přepis druhého členu pomocí výrazu (4.235)

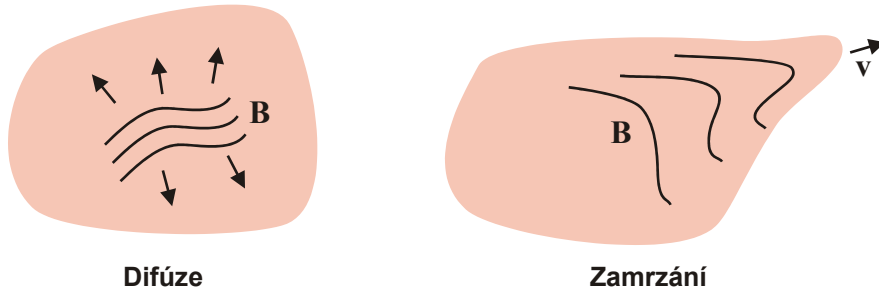
$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= \frac{1}{\sigma \mu} \Delta \mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{v} - \mathbf{B} \text{div } \mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{B}, \\ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{B} &= \frac{1}{\sigma \mu} \Delta \mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{v} - \mathbf{B} \text{div } \mathbf{v}. \end{aligned}$$

Alternativní tvar rovnice pro časový vývoj magnetického pole tedy je

$$\frac{d\mathbf{B}}{dt} = \frac{1}{\sigma \mu} \Delta \mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{v} - \mathbf{B} \text{div } \mathbf{v}. \quad (4.66)$$

Magnetické pole se může podle (4.65) změnit dvěma způsoby. První člen na pravé straně je klasická difúze – pomalé pronikání magnetického pole do okolního plazmatu. Druhý člen souvisí s pohybem plazmatu, říká se mu člen zamrznání. Magnetické silokřivky sledují pohyb plazmatu, jsou jakoby vmrznuty do plazmové tekutiny. Nyní zhruba odhadněme poměr příspěvků obou členů (tzv. Reynoldsovo magnetické číslo). Všechny vektory odhadneme jejich velikostmi a derivace převrácenou hodnotou rozměrů systému:

$$R_m = \frac{\text{člen zamrznání}}{\text{člen difúze}} \approx \frac{\frac{1}{L}vB}{\frac{1}{\sigma\mu} \frac{1}{L^2}B} = \sigma\mu vL. \quad (4.67)$$



Difúze

Zamrznání

Pro ideálně vodivé plazma ($\sigma \rightarrow \infty$) dominuje člen zamrznání ($R_m \gg 1$). Naopak pro pomalé pohyby plazmatu dominuje člen difúze ($R_m \ll 1$). Limitní případy mají tvar

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \rightarrow 0: \quad \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= \eta_m \Delta \mathbf{B}; \quad \eta_m \equiv \frac{1}{\sigma\mu}, \\ \sigma \rightarrow \infty: \quad \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= \text{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{B}). \end{aligned} \quad (4.68)$$

Difúze

Zabývejme se nyní první alternativou, difúzním členem. Koeficient η_m se nazývá koeficient magnetické difúze. Rovnice pro difúzi magnetického pole má shodný tvar se Schrödingerovou rovnicí a operátorově můžeme ihned napsat řešení

$$|\mathbf{B}(t)\rangle = e^{\eta_m \Delta (t-t_0)} |\mathbf{B}_0\rangle.$$

Standardními metodami popsanými v TF2 je třeba najít spektrum Laplaceova operátoru a poté použít větu o spektrálním rozvoji. Je možné také použít metodu Greenovy funkce a hledat časový vývoj Diracova impulsu (distribuce). V jednodimenzionálním případě má rovnice difúze

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \Delta c \quad (4.69)$$

pro počáteční podmínku ve tvaru Diracovy distribuce řešení (tzv. Greenovu funkci)

$$c(t, x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi Dt}} \exp\left[-\frac{x^2}{4Dt}\right]; \quad c(0, x) = \delta(x). \quad (4.70)$$

Je zřejmé, že Diracův impuls je gaussovsky s časem „rozmýván“. Obecné řešení je potom konvolucí počáteční podmínky a Greenovy funkce (viz přílohy k TF2).

$$c(t, x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi Dt}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{(x-y)^2}{4Dt}\right] c(0, y) dy. \quad (4.71)$$

Zamrznání

Zabývejme se nyní jen členem zamrznání

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \text{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{B}).$$

Rotaci na pravé straně upravíme pomocí dvojného vektorového součinu – viz příloha (4.235)

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{B} - \mathbf{B} \operatorname{div} \mathbf{v}.$$

Dosaďme za $\operatorname{div} \mathbf{v}$ z rovnice kontinuity

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{v} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \rho + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} - \frac{1}{\rho} (\mathbf{v} \cdot \nabla) \rho.$$

Po elementárních úpravách máme (zanedbáváme člen difúze)

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{B} + \frac{\mathbf{B}}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\mathbf{B}}{\rho} (\mathbf{v} \cdot \nabla) \rho.$$

Celou rovnici vydělme hustotou a přeskupme jednotlivé členy

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \frac{\mathbf{B}}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial t} = \left(\frac{\mathbf{B}}{\rho} \cdot \nabla \right) \mathbf{v} - \frac{1}{\rho} (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{B} + \frac{\mathbf{B}}{\rho^2} (\mathbf{v} \cdot \nabla) \rho.$$

První dva členy na levé straně lze spojit do jednoho výrazu a druhé dva členy na pravé straně také:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mathbf{B}}{\rho} \right) = \left(\frac{\mathbf{B}}{\rho} \cdot \nabla \right) \mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \nabla) \frac{\mathbf{B}}{\rho}.$$

Substitucí $\mathbf{b} \equiv \mathbf{B}/\rho$ rovnice přejde na

$$\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{b} = (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{v}.$$

Po zavedení substancionální derivace získáme rovnici proudnice (4.16)

$$\frac{d\mathbf{b}}{dt} = (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{v}. \quad (4.72)$$

Magnetické pole proto sleduje proudnice a je vmrzlé do plazmatu.

4.2.2. Rovnice pro hustotu

Časový vývoj hustoty hmoty je dán rovnicí kontinuity

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{v} = 0, \quad (4.73)$$

kterou můžeme upravit do tvaru se substancionální derivací:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \partial_k (\rho v_k) &= 0 \quad \Rightarrow \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x_k} v_k + \rho \frac{\partial v_k}{\partial x_k} &= 0 \quad \Rightarrow \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \rho + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} &= 0. \end{aligned}$$

Výsledný tvar proto je

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \quad (4.74)$$

Z posledního výrazu je zřejmé, že nestlačitelná tekutina (kapalina) splňuje

$$\rho = \text{const} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \quad (4.75)$$

4.2.3. Rovnice pro rychlost

Rovnici pro rychlost odvodíme ve třech fázích. Nejprve pro ideální hydrodynamiku (bez viskozity), poté pro viskózní proudění a nakonec pro proudění za přítomnosti magnetického a gravitačního pole. Ve všech případech nalezneme jak konzervativní tvar (ve tvaru rovnice kontinuity) tak tvar se substancionální derivací.

Ideální hydrodynamika

Rovnici pro rychlost v ideální hydrodynamice jsme již odvodili v úvodní kapitole, viz vztah (4.36)

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p, \quad \text{neboli} \quad \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p. \quad (4.76)$$

Nyní tuto rovnici přepíšeme do konzervativního tvaru, tj. budeme hledat zákon zachování hybnosti ve tvaru rovnice kontinuity. Nalezneme časový vývoj hustoty hybnosti

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_k) = \frac{\partial \rho}{\partial t} v_k + \rho \frac{\partial v_k}{\partial t}.$$

Za časovou změnu hustoty dosadíme z rovnice kontinuity (4.73) a za časovou změnu hybnosti z pohybové rovnice (4.76):

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_k) = -\partial_l(\rho v_l) v_k - \rho(v_l \partial_l) v_k - \partial_k p.$$

Všechny členy převedeme na levou stranu a upravíme:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_k) + \frac{\partial(\rho v_l)}{\partial x_l} v_k + (\rho v_l) \frac{\partial v_k}{\partial x_l} + \frac{\partial p}{\partial x_k} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_k) + \frac{\partial}{\partial x_l}(\rho v_l v_k) + \frac{\partial p}{\partial x_k} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_k) + \frac{\partial}{\partial x_l}(p \delta_{kl} + \rho v_k v_l) = 0.$$

Získali jsme zákon zachování hybnosti. V závorce v prostorových derivacích je tok hybnosti neboli tenzor tlaku. Sama hybnost je vektorová veličina a proto její tok tvoří tenzor druhého řádu. Symetrie tenzoru tlaku zajišťuje zachování momentu hybnosti v proudící kapalině. Tenzor tlaku se skládá ze dvou částí – skalární části, kterou tvoří normální tlak působící ve všech směrech stejně. Druhou částí je tenzorová část související s prouděním tekutiny. Zákon zachování hybnosti můžeme napsat ve složkovém zápise

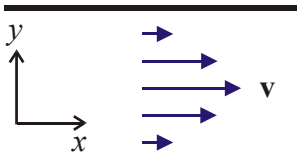
$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_k) + \frac{\partial}{\partial x_l}(T_{kl}^{(P)}) = 0; \quad T_{kl}^{(P)} \equiv p \delta_{kl} + \rho v_k v_l. \quad (4.77)$$

nebo v invariantním tvaru

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{v}) + \vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{T}}^{(P)} = 0; \quad \vec{\mathbf{T}}^{(P)} \equiv p \vec{\mathbf{1}} + \rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}. \quad (4.78)$$

Index (P) označuje tlak, později přibude tenzor viskozity a Maxwellův tenzor pnutí.

Viskózní tekutina



Pro viskózní tekutiny jsou charakteristické nenulové prostorové derivace rychlosti. Například tekutina proudící mezi dvěma deskami má u povrchu desek rychlost nulovou a mezi deskami maximální:

$$\partial v_x / \partial y \neq 0.$$

Ztráty hybnosti způsobené viskózními procesy budou dány tenzorem viskozity závislým na prostorových derivacích rychlosti

$$V_{kl} = f_{kl}(\partial v_i / \partial x_j).$$

V nejjednodušším přiblížení bude tenzor lineární v derivacích rychlostí, případně provedeme Taylorův rozvoj do prvního řádu v derivacích rychlostí. Tenzor musí být symetrický tenzor druhého řádu (z důvodu zachování momentu hybnosti). Nejobecnější tvar symetrického tenzoru za našich předpokladů bude

$$V_{kl} = a \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_l} + \frac{\partial v_l}{\partial x_k} \right) + b \delta_{kl} \frac{\partial v_n}{\partial x_n} = a \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_l} + \frac{\partial v_l}{\partial x_k} \right) + b \delta_{kl} \operatorname{div} \mathbf{v}.$$

symetrický tenzor získáme pomocí součtu derivací v závorce nebo součtem všech diagonálních členů (divergence rychlosti). V matematice i ve fyzice se dobře pracuje s tenzory s nulovou stopou (součtem diagonálních členů). Stopa tenzoru se zachovává. Proto se část druhého (skalárního) výrazu přidá k prvnímu výrazu, tak aby měl nulovou stopu:

$$V_{kl} = \eta \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_l} + \frac{\partial v_l}{\partial x_k} - \frac{2}{3} \delta_{kl} \operatorname{div} \mathbf{v} \right) + \zeta \delta_{kl} \operatorname{div} \mathbf{v}. \quad (4.79)$$

Stopa tenzorové části v kulaté závorce je nulová:

$$\operatorname{Tr}(\mathbf{V}) = V_{kk} = \eta \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_k} - \frac{2}{3} \delta_{kk} \operatorname{div} \mathbf{v} \right) = \eta \left(\operatorname{div} \mathbf{v} + \operatorname{div} \mathbf{v} - \frac{2}{3} \cdot 3 \cdot \operatorname{div} \mathbf{v} \right) = 0.$$

Koeficienty η a ζ se nazývají *první a druhá vazkost*. Konzervativní tvar zákona zachování hybnosti potom má tvar

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_k) + \frac{\partial}{\partial x_l} (T_{kl}^{(P)} - V_{kl}) = 0. \quad (4.80)$$

nebo v invariantním tvaru

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{v}) + \vec{\nabla} \cdot (\vec{\mathbf{T}}^{(P)} - \vec{\mathbf{V}}) = 0. \quad (4.81)$$

U viskózního tenzoru píšeme znaménko minus, protože jde o ztráty toku hybnosti. S touto konvencí jsou oba viskózní koeficienty kladné. Odvoďme nyní pohybovou rovnici. Ve vztahu (4.80) dosadíme za oba tenzory a provedeme všechny derivace:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_k) + \frac{\partial}{\partial x_l} \left[p \delta_{kl} + \rho v_k v_l - \eta \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_l} + \frac{\partial v_l}{\partial x_k} - \frac{2}{3} \delta_{kl} \operatorname{div} \mathbf{v} \right) - \zeta \delta_{kl} \operatorname{div} \mathbf{v} \right] = 0.$$

Po přímočarém výpočtu získáme pohybovou rovnici

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p + \eta \Delta \mathbf{v} + (\zeta + \eta/3) \nabla (\operatorname{div} \mathbf{v}). \quad (4.82)$$

Jde o slavnou *Naviere-Stokesovu rovnici* pro viskózní tekutinu. Je-li tekutina nestlačitelná (kapalina, $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$) získá pohybová rovnice jednoduchý tvar

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p + \eta \Delta \mathbf{v} \quad (4.83)$$

a kapalinu lze popsat jediným viskózním koeficientem η .

Vodivá tekutina

V případě magnetohydrodynamiky se v rovnici (4.82) objeví na pravé straně ještě hustota Lorentzovy síly:

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p + \eta \Delta \mathbf{v} + (\zeta + \eta/3) \nabla(\operatorname{div} \mathbf{v}) + \mathbf{j} \times \mathbf{B} . \quad (4.84)$$

Pro odvození konzervativního tvaru stačí upravit jen hustotu Lorentzovy síly, konzervativní podobu všech ostatních členů známe:

$$\begin{aligned} (\mathbf{j} \times \mathbf{B})_k &= (\operatorname{rot} \mathbf{H} \times \mathbf{B})_k = \varepsilon_{klm} (\operatorname{rot} \mathbf{H})_l B_m = \varepsilon_{klm} \varepsilon_{lno} \partial_n (H_o) B_m = \\ &= -\varepsilon_{lkm} \varepsilon_{lno} \partial_n (H_o) B_m = (-\delta_{kn} \delta_{mo} + \delta_{ko} \delta_{mn}) \frac{\partial H_o}{\partial x_n} B_m = -\frac{\partial H_m}{\partial x_k} B_m + \frac{\partial H_k}{\partial x_m} B_m = \\ &= -\frac{\partial H_m}{\partial x_k} B_m + \frac{\partial H_k}{\partial x_m} B_m = -\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\mathbf{H} \cdot \mathbf{B}}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_m} (H_k B_m) - H_k \frac{\partial B_m}{\partial x_m} . \end{aligned}$$

Poslední člen je nulový a v prostředním členu zaměníme sčítací index:

$$(\mathbf{j} \times \mathbf{B})_k = -\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\mathbf{H} \cdot \mathbf{B}}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_l} (H_k B_l) = -\frac{\partial}{\partial x_l} \left[\frac{\mathbf{H} \cdot \mathbf{B}}{2} \delta_{kl} - H_k B_l \right]$$

Výraz v hranaté závorce je Maxwellův tenzor pnutí pro magnetické pole. Má stejně jako tenzor tlaku skalární a vektorovou část. Po převedení na levou stranu pohybové rovnice dostaneme vztah

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho v_k) + \frac{\partial}{\partial x_l} (T_{kl}^{(P)} + T_{kl}^{(M)} - V_{kl}) = 0 . \quad (4.85)$$

Jednotlivé tenzory mají složky

$$\begin{aligned} T_{kl}^{(P)} &\equiv p \delta_{kl} + \rho v_k v_l , \\ T_{kl}^{(M)} &\equiv \frac{\mathbf{H} \cdot \mathbf{B}}{2} \delta_{kl} - H_k B_l , \\ V_{kl} &\equiv \eta \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_l} + \frac{\partial v_l}{\partial x_k} - \frac{2}{3} \delta_{kl} \operatorname{div} \mathbf{v} \right) + \zeta \delta_{kl} \operatorname{div} \mathbf{v} . \end{aligned} \quad (4.86)$$

Skalární část Maxwellova tenzoru pnutí se někdy nazývá magnetický tlak a je rovna hustotě energie magnetického pole

$$p_m = \frac{\mathbf{H} \cdot \mathbf{B}}{2} = \frac{B^2}{2\mu_0} . \quad (4.87)$$

Tenzorová část souvisí se silovým působením daným zakřivením magnetických silokřivek.

Poznámka 1: Magnetické pole přítomné ve slunečních skvrnách je zodpovědné za jejich nižší teplotu

$$p_{out} = p_{in} \quad \Rightarrow \quad nkT_{out} = \frac{B^2}{2\mu_0} + nkT_{in}$$

Tlak ve skvrně je dán magnetickou i hydrodynamickou částí.

Poznámka 2: Lorentzova síla má dvě části:

$$\mathbf{j} \times \mathbf{B} = -\nabla \cdot \mathbf{T}^{(M)} = -\nabla p_m + \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} .$$

První část je gradientem magnetického tlaku, druhá souvisí se zakřivením magnetických silokřivek.

4.2.4. Uzavření soustavy

Ve statistice jsme si ukázali, jak středování Boltzmannovy rovnice přes rychlostní část fázového prostoru vede na rovnice kontinua. Jedná se o rovnici kontinuity, rovnici pro rychlost, rovnici pro energii (teplotu, tlak), rovnici pro tepelný tok, atd. Nekonečnou soustavu

parciálních diferenciálních rovnic získanou středováním přes mocniny rychlosti je třeba v určité fázi ukončit algebraickým vztahem. My tak učiníme u rovnice pro tlak a budeme předpokládat, že tlak splňuje algebraický vztah (může jít o polytropní či jinou závislost)

$$p = p(\rho). \quad (4.88)$$

Na závěr zapišme přehledně získanou sadu MHD rovnic v konzervativním tvaru

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= \frac{1}{\sigma \mu_0} \Delta \mathbf{B} + \text{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \rho \mathbf{v} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} (\rho v_k) + \frac{\partial}{\partial x_l} (T_{kl}^{(P)} + T_{kl}^{(M)} - V_{kl}) &= 0, \\ p &= p(\rho). \end{aligned}$$

a v tvaru s úplnými časovými derivacemi:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{B}}{dt} &= \frac{1}{\sigma \mu_0} \Delta \mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{v} - \mathbf{B} \text{div } \mathbf{v}. \\ \frac{d\rho}{dt} + \rho \text{div } \mathbf{v} &= 0 \\ \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= -\nabla p - \nabla p_m + \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} + \eta \Delta \mathbf{v} + (\zeta + \eta/3) \nabla(\text{div } \mathbf{v}) \\ p &= p(\rho). \end{aligned}$$

Existují různé modifikace uvedené soustavy rovnic, rovnice kontinuity a pohybové rovnice mohou být například uvažovány pro elektronovou a iontovou složku odděleně, soustavu můžeme uzavřít až po rovnici pro energii algebraickým vztahem pro vedení tepla, rovnice lze zobecnit i pro dominantní vliv elektrického pole.

K nejčastěji používaným uzavřením soustavy MHD rovnic patří

- **Uzavření nestlačitelnou tekutinou** ($\rho = \text{const}$). Po úpravě vede na vztah

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \rho = 0. \quad (4.89)$$

- **Uzavření polytropou** ($p\rho^{-\gamma} = \text{const}$). Po úpravě

$$\frac{d}{dt} (p\rho^{-\gamma}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial t} (p\rho^{-\gamma}) + v_k \frac{\partial}{\partial x_k} (p\rho^{-\gamma}) = 0.$$

Provedeme obě derivace jako derivace součinu funkcí a za parciální derivaci hustoty podle času dosadíme z rovnice kontinuity. Po jednoduchých úpravách získáme

$$\frac{\partial p}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) p + \gamma p \text{div } \mathbf{v} = 0. \quad (4.90)$$

- **Uzavření CGL** (Chew – Goldberg – Low). Zohledňuje anizotropní chování plazmatu:

$$p\delta_{kl} \rightarrow p_{kl} = p_{\perp} \delta_{kl} + (p_{\parallel} - p_{\perp}) \frac{B_k B_l}{B^2}. \quad (4.91)$$

4.3. PLAZMOVÉ OSCILACE A VLNY

Oblast vyplněná plazmatem je schopna na základě různých vnějších podnětů přenášet mnoho druhů vlnění. V této kapitole se budeme zabývat nejjednoduššími plazmovými oscilacemi a vlnami, které probíhají bez přítomnosti magnetického pole. Hybnou silou je pouze pole elektrické, které tvoří vratnou sílu a umožňuje periodický pohyb. Počáteční porucha způsobí rozkmitání elektronové a iontové tekutiny na dvou charakteristických frekvencích a současně vznik globálního elektrického pole. Elektronová tekutina je schopna oscilací na podstatně vyšších frekvencích než iontová tekutina. Proto za výchozí soustavu rovnic nemůžeme využít jednotekutinový model, ale dvoutekutinový model. Viskózní členy zanedbáme. Pro tento typ vlnění platí Maxwellova rovnice $\text{rot } \mathbf{E} = 0$ (magnetické pole je nulové), ze které bezprostředně plyne $\mathbf{k} \times \delta \mathbf{E} = 0$. Proto platí $\delta \mathbf{E} \parallel \mathbf{k}$ a vlnění je podélné.

4.3.1. Odvození disperzní relace

Za výchozí soustavu rovnic budeme volit sadu

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_e}{\partial t} + \text{div}(n_e \mathbf{v}_e) &= 0, \\ \frac{\partial n_i}{\partial t} + \text{div}(n_i \mathbf{v}_i) &= 0, \\ m_e n_e \frac{\partial \mathbf{v}_e}{\partial t} + m_e n_e (\mathbf{v}_e \cdot \nabla) \mathbf{v}_e &= -\nabla p_e - en_e \mathbf{E}, \\ m_i n_i \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial t} + m_i n_i (\mathbf{v}_i \cdot \nabla) \mathbf{v}_i &= -\nabla p_i + Zen_i \mathbf{E}, \\ \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= -\frac{1}{\varepsilon_0} (Zen_i \mathbf{v}_i - en_e \mathbf{v}_e), \\ p_e &= n_e k_B T_e = C_e n_e^{\gamma_e}; \quad p_i = n_i k_B T_i = C_i n_i^{\gamma_i}. \end{aligned} \tag{4.92}$$

Jde o rovnici kontinuity pro elektrony a ionty, pohybové rovnice pro elektrony a ionty s tlakovým a elektrickým členem, rovnici pro elektrické pole a polytropní stavové rovnice. Rovnice pro elektrické pole je odvozena z Maxwellovy rovnice $\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j} + \partial \mathbf{D} / \partial t$, ve které je magnetické pole nulové a proudová hustota je vyjádřena ze vztahu (4.60). Uvažujeme Z násobnou ionizaci plazmatu. Uvedené rovnice budeme linearizovat, tj. provedeme perturbaci klidového řešení:

$$\begin{aligned} n_e &= n_{e0} + \delta n_e; \quad n_i = n_{i0} + \delta n_i; \quad \mathbf{v}_e = \delta \mathbf{v}_e; \quad \mathbf{v}_i = \delta \mathbf{v}_i; \\ \mathbf{E} &= \delta \mathbf{E}; \quad p_e = p_{e0} + \delta p_e; \quad p_i = p_{i0} + \delta p_i. \end{aligned} \tag{4.93}$$

Po dosazení do původní sady a zanedbání členů vyšších řádů získáme:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta n_e}{\partial t} + \text{div}(n_{e0} \delta \mathbf{v}_e) &= 0, \\ \frac{\partial \delta n_i}{\partial t} + \text{div}(n_{i0} \delta \mathbf{v}_i) &= 0, \\ m_e n_{e0} \frac{\partial \delta \mathbf{v}_e}{\partial t} &= -\nabla \delta p_e - en_{e0} \delta \mathbf{E}, \\ m_i n_{i0} \frac{\partial \delta \mathbf{v}_i}{\partial t} &= -\nabla \delta p_i + Zen_{i0} \delta \mathbf{E}, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \delta \mathbf{E}}{\partial t} = -\frac{e}{\varepsilon_0} (Zn_{i0} \delta \mathbf{v}_i - n_{e0} \delta \mathbf{v}_e),$$

$$\delta p_e = m_e c_e^2 \delta n_e; \quad c_e^2 \equiv \frac{\gamma_e k_B T_e}{m_e},$$

$$\delta p_i = m_i c_i^2 \delta n_i; \quad c_i^2 \equiv \frac{\gamma_i k_B T_i}{m_i}.$$

Další postup je přímočarý. Snížíme řád dosazením posledních dvou rovnic do předchozích a provedeme Fourierovu transformaci:

$$-\omega \delta n_e + n_{e0} (\mathbf{k} \cdot \delta \mathbf{v}_e) = 0,$$

$$-\omega \delta n_i + n_{i0} (\mathbf{k} \cdot \delta \mathbf{v}_i) = 0,$$

$$i\omega m_e n_{e0} \delta \mathbf{v}_e = i\mathbf{k} m_e c_e^2 \delta n_e + e n_{e0} \delta \mathbf{E},$$

$$i\omega m_i n_{i0} \delta \mathbf{v}_i = i\mathbf{k} m_i c_i^2 \delta n_i - Z e n_{i0} \delta \mathbf{E},$$

$$i\omega \delta \mathbf{E} = \frac{e}{\varepsilon_0} (Zn_{i0} \delta \mathbf{v}_i - n_{e0} \delta \mathbf{v}_e).$$

Jde o soustavu 11 algebraických rovnic pro jedenáct neznámých $\delta n_e, \delta n_i, \delta \mathbf{v}_e, \delta \mathbf{v}_i, \delta \mathbf{E}$. Pokusíme se snížit řád soustavy. Z třetí a čtvrté rovnice vypočteme $\delta \mathbf{v}_e, \delta \mathbf{v}_i$ a dosadíme do zbývajících. Potom z poslední rovnice vypočteme $\delta \mathbf{E}$ (bude se vyskytovat na obou stranách rovnice) a dosadíme do zbývajících dvou. Získáme výsledek

$$\left[(\omega^2 - \omega_{pe}^2 - \omega_{pi}^2)(\omega^2 - c_e^2 k^2) - \omega_{pe}^2 c_e^2 k^2 \right] \delta n_e + \left[Z \omega_{pe}^2 c_i^2 k^2 \right] \delta n_i = 0,$$

$$\left[\frac{1}{Z} \omega_{pi}^2 c_e^2 k^2 \right] \delta n_e + \left[(\omega^2 - \omega_{pe}^2 - \omega_{pi}^2)(\omega^2 - c_i^2 k^2) - \omega_{pi}^2 c_i^2 k^2 \right] \delta n_i = 0,$$

kde jsme pro vzniklé kombinace veličin využili běžných označení pro rychlost zvuku, plazmovou frekvenci a Debyeovu stínící vzdálenost:

$$c_e^2 \equiv \frac{\gamma_e k_B T_e}{m_e}; \quad c_i^2 \equiv \frac{\gamma_i k_B T_i}{m_i}, \quad (4.94)$$

$$\omega_{pe}^2 \equiv \frac{n_{e0} e^2}{m_e \varepsilon_0}; \quad \omega_{pi}^2 \equiv \frac{n_{i0} Z^2 e^2}{m_i \varepsilon_0}, \quad (4.95)$$

$$\lambda_{De}^2 \equiv \frac{\varepsilon_0 k_B T_e}{n_{e0} e^2}; \quad \lambda_{Di}^2 \equiv \frac{\varepsilon_0 k_B T_i}{n_{i0} Z^2 e^2}. \quad (4.96)$$

Mezi těmito veličinami platí jednoduchá relace

$$c_\alpha^2 = \gamma_\alpha \lambda_{D\alpha}^2 \omega_{p\alpha}^2. \quad (4.97)$$

Má-li mít vzniklá soustava nenulové řešení, musí být její determinant nulový.

$$\left[(\omega^2 - \omega_{pe}^2 - \omega_{pi}^2)(\omega^2 - c_e^2 k^2) - \omega_{pe}^2 c_e^2 k^2 \right] \cdot \left[(\omega^2 - \omega_{pe}^2 - \omega_{pi}^2)(\omega^2 - c_i^2 k^2) - \omega_{pi}^2 c_i^2 k^2 \right] - \omega_{pe}^2 \omega_{pi}^2 c_e^2 c_i^2 k^4 = 0,$$

Vhodným přeskupením členů získáme disperzní relaci

$$\left[(\omega^2 - \omega_{pe}^2)(\omega^2 - \omega_{pi}^2) - \omega_{pe}^2 \omega_{pi}^2 \right]^2 \cdot \left[(\omega^2 - \omega_{pe}^2 - c_e^2 k^2)(\omega^2 - \omega_{pi}^2 - c_i^2 k^2) - \omega_{pe}^2 \omega_{pi}^2 \right] = 0,$$

kteřá má dvě základní větve, první nezávisí na vlnovém vektoru (tzv. oscilace – kapitola 4.3.2), druhá závisí (plazmové vlny – kapitola 4.3.3 a zvuk – kapitola 4.3.4):

$$\left[(\omega^2 - \omega_{pe}^2)(\omega^2 - \omega_{pi}^2) - \omega_{pe}^2 \omega_{pi}^2 \right] = 0, \quad (4.98)$$

$$\left[(\omega^2 - \omega_{pe}^2 - c_e^2 k^2)(\omega^2 - \omega_{pi}^2 - c_i^2 k^2) - \omega_{pe}^2 \omega_{pi}^2 \right] = 0. \quad (4.99)$$

4.3.2. Plazmové oscilace elektronů

Po roznásobení rovnice (4.98) získáme nenulové řešení

$$\omega^2 = \omega_{pe}^2 + \omega_{pi}^2.$$

Kvadrát plazmové frekvence elektronů je o tři řády vyšší než iontů. Druhý člen na pravé straně představuje jen nepatrnou korekci na hmotnost iontů a většinou se vůbec neuvažuje. Upravme pravou stranu (z důvodu kvazineutality je $n_{i0} = n_{e0}/Z$)

$$\omega^2 = \omega_{pe}^2 + \omega_{pi}^2 = \frac{n_{e0}e^2}{m_e \epsilon_0} + \frac{n_{i0}Z^2 e^2}{m_i \epsilon_0} = \frac{n_{e0}e^2}{m_e \epsilon_0} + \frac{n_{e0}Z e^2}{m_i \epsilon_0} = \frac{n_{e0}e^2}{m_e \epsilon_0} \left(1 + \frac{Z m_e}{m_i} \right) \Rightarrow$$

$$\omega^2 = \omega_{pe}^2 \left(1 + \frac{Z m_e}{m_i} \right). \quad (4.100)$$

Kdyby měly ionty nekonečnou hmotnost, oscilace by probíhaly přesně na plazmové frekvenci elektronů a ionty by se vůbec nepohybovaly. Můžeme si představit, že tekutina elektronů osciluje na nehybném pozadí iontů. Druhý člen v závorce je malou korekci na konečnou hmotnost iontů. Plazmová frekvence elektronů je jednou z nejdůležitějších charakteristik plazmatu. Plazma často reaguje na vnější podněty oscilacemi nebo vlnami na plazmové frekvenci elektronů, která se pro většinu druhů plazmatu pohybuje v radiové oblasti.

4.3.3. Vysokofrekvenční řešení (plazmové vlny a oscilace elektronů)

Věnujme se nyní druhé větvi (4.99) disperzní relace. Realizujme nerovnost $m_e \ll m_i$ limitním přechodem $m_i \rightarrow \infty$. Tím budeme sledovat vysokofrekvenční oscilace, při kterých se ionty nestíhají pohybovat a efektivně mají nekonečnou hmotnost. Limitní přechod dává

$$\omega_{pi}^2 \rightarrow 0; \quad c_i^2 \rightarrow 0.$$

Z disperzní relace (4.99) zůstane jen vztah

$$\omega^2 - \omega_{pe}^2 - c_e^2 k^2 = 0,$$

ze kterého plyne disperzní relace *plazmových vln*

$$\omega^2 = \omega_{pe}^2 + c_e^2 k^2; \quad \text{resp.} \quad \omega = \sqrt{\omega_{pe}^2 + c_e^2 k^2}. \quad (4.101)$$

Limita dlouhých vln ($k \rightarrow 0$)

Pro $\lambda \gg \lambda_{De}$ je druhý člen v disperzní relaci zanedbatelný a jde o prosté oscilace na plazmové frekvenci elektronů

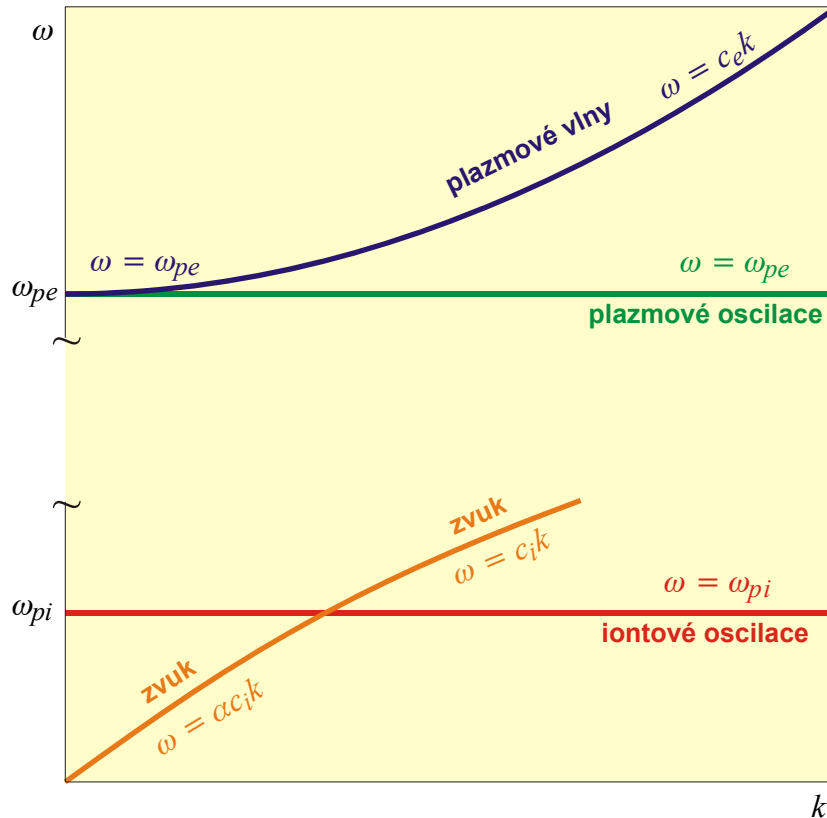
$$\omega = \omega_{pe}$$

Limita krátkých vln ($k \rightarrow \infty$)

Pro $\lambda \ll \lambda_{De}$ je první člen v disperzní relaci zanedbatelný a jde o lineární závislost

$$\omega = c_e k .$$

Směrnici závislosti je „rychlost zvuku elektronů“ (přibližně tepelná rychlost elektronů). Skutečný zvuk je samozřejmě nesen těžkými částicemi (ionty a neutrály) a má mnohem nižší frekvenci.



Poznámka 1.: Plazmové vlny jsou nejtýpčtějším vysokofrekvenčním rozvlněním plazmatu (zpravidla v oboru radiových frekvencí). Disperzní relace (4.101) připouští jen řešení

$$\omega > \omega_{pe} . \quad (4.102)$$

Při nižších frekvencích se vlna nešíří. Je to patrné jak z disperzní relace přímo, tak z přiloženého obrázku. Pro nižší frekvence než je plazmová poskytuje disperzní relace komplexní řešení a vlna je tlumená.

Poznámka 2.: Druhý člen v disperzní relaci (4.101) je dán tepelným pohybem elektronů. Kdyby neexistoval tepelný pohyb, vlny by se nešířily, šlo by jen o oscilace.

Poznámka 3.: Z disperzní relace (4.101) snadno spočteme fázovou a grupovou rychlost:

$$v_f = \frac{\omega}{k} = c_e \sqrt{1 + \frac{\omega_{pe}^2 \lambda^2}{4\pi^2 c_e^2}} ; \quad v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k} = c_e / \sqrt{1 + \frac{\omega_{pe}^2 \lambda^2}{4\pi^2 c_e^2}} . \quad (4.103)$$

Snadno nahlédneme, že pro fázovou a grupovou rychlost platí vztahy:

$$v_f > c_e ; \quad v_g < c_e ; \quad v_f v_g = c_e^2 . \quad (4.104)$$

Poznámka 4.: V přítomnosti magnetických polí přejde vysokofrekvenční větev v složitější komplex elektromagnetických vln v plazmatu. Naopak nízkofrekvenční větev popsaná v následující kapitole přejde v přítomnosti magnetických polí v komplex magnetoakustických vln.

4.3.4. Nízkofrekvenční řešení (zvuk a oscilace iontů)

Realizujme nyní nerovnost $m_e \ll m_i$ limitním přechodem $m_e \rightarrow 0$. Elektronky s nulovou hmotností se stanou jakýmsi všudypřítomným záporným oblakem. Ionty mají nyní konečnou, i když velkou hmotnost. Budou oscilovat s velmi nízkými frekvencemi na pozadí elektronů. Limitní přechod znamená

$$\omega_{pe}^2 \rightarrow \infty; \quad c_e^2 \rightarrow \infty.$$

V disperzní relaci (4.99) zůstanou podstatné členy

$$(-\omega_{pe}^2 - c_e^2 k^2)(\omega^2 - \omega_{pi}^2 - c_i^2 k^2) - \omega_{pe}^2 \omega_{pi}^2 = 0$$

Relaci snadno vyřešíme vzhledem ω :

$$\omega^2 = \omega_{pi}^2 + c_i^2 k^2 - \frac{\omega_{pi}^2 \omega_{pe}^2}{\omega_{pe}^2 + c_e^2 k^2} = \omega_{pi}^2 \left[1 + c_i^2 k^2 / \omega_{pi}^2 - \frac{1}{1 + c_e^2 k^2 / \omega_{pe}^2} \right].$$

Zavedeme-li Debyeovu stínící vzdálenost, získáme disperzní relaci v přehledném tvaru:

$$\omega^2 = \omega_{pi}^2 \left[1 + \gamma_i \lambda_{Di}^2 k^2 - \frac{1}{1 + \gamma_e \lambda_{De}^2 k^2} \right]. \quad (4.105)$$

Limita dlouhých vln ($k \rightarrow 0$)

V limitě dlouhých vln upravíme disperzní relaci takto

$$\begin{aligned} \omega^2 &= \omega_{pi}^2 \left[1 + \gamma_i \lambda_{Di}^2 k^2 - \frac{1}{1 + \gamma_e \lambda_{De}^2 k^2} \right] \approx \omega_{pi}^2 \left[1 + \gamma_i \lambda_{Di}^2 k^2 - 1 + \gamma_e \lambda_{De}^2 k^2 \right] \Rightarrow \\ \omega^2 &= \omega_{pi}^2 \gamma_i \lambda_{Di}^2 \left(1 + \frac{\gamma_e \lambda_{De}^2}{\gamma_i \lambda_{Di}^2} \right) k^2 = c_i^2 k^2 \left(1 + \frac{\gamma_e \lambda_{De}^2}{\gamma_i \lambda_{Di}^2} \right). \end{aligned}$$

Využijeme-li definici Debyeovy délky (4.96) a kvazineutralitu ($n_{i0} = n_{e0}/Z$) získáme výsledný vztah

$$\omega^2 = c_i^2 k^2 \left(1 + Z \frac{\gamma_e T_e}{\gamma_i T_i} \right); \quad \text{resp.} \quad \omega = c_i k \sqrt{1 + Z \frac{\gamma_e T_e}{\gamma_i T_i}}.$$

Jde o zvukové vlny šířící se rychlostí

$$c_s = c_i \sqrt{1 + Z \frac{\gamma_e T_e}{\gamma_i T_i}}.$$

Limita krátkých vln ($k \rightarrow \infty$)

Z disperzní relace (4.105) zbude pro krátké vlny jediný člen

$$\omega^2 \approx \omega_{pi}^2 \gamma_i \lambda_{Di}^2 k^2 = c_i^2 k^2; \quad \text{resp.} \quad \omega = c_i k.$$

Jde opět o zvukové vlny šířící se rychlostí

$$c_s = c_i.$$

Nízkofrekvenční řešení má podobu zvukových vln se slabě proměnnou rychlostí v závislosti na vlnové délce.

4.3.5. Další vlivy

Pohyb prostředí

Plazmové oscilace a vlny ovlivňuje samozřejmě celá řada dalších faktorů zde neprobíraných. Pohybuje-li se prostředí, v němž je generována vlna, změní se disperzní relace (4.99) na relaci

$$\left[(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_0)^2 - \omega_{pe}^2 - c_e^2 k^2 \right] \cdot \left[(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_0)^2 - \omega_{pi}^2 - c_i^2 k^2 \right] - \omega_{pe}^2 \omega_{pi}^2 = 0 ,$$

která v sobě přirozeným způsobem zahrnuje Dopplerův posun frekvence.

Srážky

V plazmatu mohou probíhat srážky, které by se projevíly srážkovým členem na pravé straně pohybové rovnice. Srážkový člen je úměrný rychlosti a srážkové frekvenci ν . Vzhledem k tomu, že plazmové oscilace elektronů jsou podélné, lze učinit odhad vlivu srážek na oscilace jen v jedné dimenzi a bez nepodstatných členů (tlak, atd.):

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (n_e v_e) = 0 ,$$

$$m_e n_e \frac{\partial v_e}{\partial t} = -e n_e E - n_e m_e \nu v_e ,$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon_0} e n_e v_e .$$

Po provedení perturbací a Fourierovy transformace získáme rychle disperzní relaci. Bez srážkového členu má tvar (jde asi o nejrychlejší způsob jak odvodit hodnotu plazmové frekvence)

$$\omega^2 = \omega_{pe}^2 ; \quad \omega_{pe}^2 \equiv \frac{n_0 e^2}{m_e \epsilon_0}$$

Se srážkovým členem dostaneme z podmínky na nulovost determinantu

$$\omega^2 + i\omega\nu - \omega_{pe}^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega = -i\frac{\nu}{2} \pm \sqrt{\omega_{pe}^2 - \left(\frac{\nu}{2}\right)^2} .$$

Srážky způsobují útlum plazmových oscilací s koeficientem útlumu $\delta = \nu/2$.

Magnetické pole

Přítomnost magnetického pole ovlivní charakter vln zcela zásadně. Vysokofrekvenční větev přejde v *komplex anizotropních elektromagnetických vln* a nízkofrekvenční větev v *komplex anizotropních magnetoakustických vln*. Oběma případy se budeme zabývat v následujících kapitolách.

4.4. MAGNETOAKUSTICKÉ VLNY

V této kapitole si povšimneme nízkofrekvenčních vln generovaných pohybem iontů v přítomnosti magnetického pole. Samo magnetické pole vnáší do hry zcela nový prvek - anizotropii. Dalším činitelem ovlivňujícím charakter vln je samozřejmě elektrický náboj iontů a vodivost prostředí.

4.4.1. Odvození disperzní relace

Za výchozí sadu rovnic budeme uvažovat klasickou jednotekutinovou magnetohydrodynamiku:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= \frac{1}{\sigma \mu_0} \Delta \mathbf{B} + \text{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{B}), \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{v}) &= 0, \\ \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} &= -\nabla p - \nabla \frac{B^2}{2\mu_0} + \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B}, \\ p &= p(\rho).\end{aligned}\tag{4.106}$$

Difúzní člen v rovnici pro magnetické pole je zodpovědný za útlum magnetoakustických vln. V případě vysoce vodivého plazmatu ($\sigma \rightarrow \infty$) je možné tento člen zanedbat a magnetoakustické vlny nebudou tlumené. Kdybychom tento člen v soustavě ponechali, poskytovala by disperzní relace komplexní řešení pro frekvenci a vlnový vektor a rovinná vlna by tak byla exponenciálně tlumena. Celá výchozí soustava je opět algebraicky uzavřena stavovou rovnicí.

Postupujme nyní obdobně jako v minulém případě, tj provedeme perturbace klidového řešení

$$\rho = \rho_0 + \delta\rho; \quad \mathbf{v} = \delta\mathbf{v}; \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \delta\mathbf{B}; \quad p = p_0 + \delta p.\tag{4.107}$$

Hledané řešení (4.107) dosadíme do soustavy (4.106), zanedbáme kvadráty a vyšší mocniny poruch a budeme předpokládat poruchu ve tvaru rovinné vlny. Výsledná linearizovaná algebraická soustava rovnic je:

$$\begin{aligned}-\omega \delta\rho + \rho_0 \mathbf{k} \cdot \delta\mathbf{v} &= 0, \\ \mathbf{k} \delta p - \rho_0 \omega \delta\mathbf{v} + \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{B}_0 \cdot \delta\mathbf{B}) \mathbf{k} - \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k}) \delta\mathbf{B} &= 0, \\ \mathbf{k} \times (\mathbf{B}_0 \times \delta\mathbf{v}) - \omega \delta\mathbf{B} &= 0, \\ \delta p - c_s^2 \delta\rho &= 0; \quad c_s^2 \equiv \frac{\partial p}{\partial \rho}.\end{aligned}\tag{4.108}$$

Jde o soustavu osmi rovnic (dvou skalárních a dvou vektorových) bez pravých stran. Postupnou eliminací proměnných je možné nalézt jen rovnici pro rychlost (druhá rovnice). Nejprve dosadíme za δp z poslední rovnice. Poté za $\delta\rho$ z první rovnice a nakonec za $\delta\mathbf{B}$ ze třetí rovnice (upravíme dvojný vektorový součin). Získáme tak soustavu rovnic pro perturbace rychlostního pole

$$\mathbf{M} \cdot \delta\mathbf{v} = \mathbf{0}.\tag{4.109}$$

Složky symetrické matice \mathbf{M} mají tvar

$$M_{jl} = \left[\omega^2 - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_A)^2 \right] \delta_{jl} + (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_A) (k_j v_l^{(A)} + k_l v_j^{(A)}) - (v_A^2 + c_s^2) k_j k_l.$$

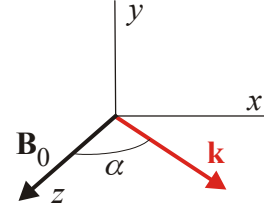
Tuto matici můžeme také zapsat v invariantním tvaru

$$\mathbf{M} = \left[\omega^2 - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_A)^2 \right] \mathbf{1} + (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_A) [\mathbf{k} \otimes \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_A \otimes \mathbf{k}] - (v_A^2 + c_S^2) \mathbf{k} \otimes \mathbf{k} .$$

Veličina v_A se nazývá Alfvénova rychlost a je definována jako

$$\mathbf{v}_A \equiv \frac{\mathbf{B}_0}{\sqrt{\mu_0 \rho_0}} . \quad (4.110)$$

Pro konkrétní dopočet disperzní relace můžeme zvolit souřadnicový systém. Osu z budeme volit ve směru magnetického pole \mathbf{B}_0 (ve směru Alfvénovy rychlosti). Kolem této osy otočíme souřadnicový systém tak, aby vlnový vektor \mathbf{k} byl v rovině (x, z) . V takto zvoleném souřadnicovém systému je $\mathbf{B}_0 = (0, 0, B_0)$, $\mathbf{v}_A = (0, 0, v_A)$ a vlnový vektor $\mathbf{k} = (k \sin \alpha, 0, k \cos \alpha)$. Úhel mezi vektory \mathbf{B}_0 a \mathbf{v}_A je označen α .



Pro tuto volbu má matice \mathbf{M} tvar:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \omega^2 - k^2 v_A^2 - c_S^2 k^2 \sin^2 \alpha & 0 & -c_S^2 k^2 \sin \alpha \cos \alpha \\ 0 & \omega^2 - k^2 v_A^2 \cos^2 \alpha & 0 \\ -c_S^2 k^2 \sin \alpha \cos \alpha & 0 & \omega^2 - c_S^2 k^2 \cos^2 \alpha \end{pmatrix}$$

Vzhledem k tomu, že hledáme nenulové řešení soustavy (4.109), musí být determinant matice \mathbf{M} nulový. Z této podmínky získáme disperzní relaci magnetoakustických vln

$$\left[\omega^2 - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_A)^2 \right] \cdot \left[\omega^4 - k^2 (v_A^2 + c_S^2) \omega^2 + c_S^2 k^2 (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_A)^2 \right] = 0 . \quad (4.111)$$

Alfvénova rychlost míří ve směru magnetického pole \mathbf{B}_0 . Již na první pohled je vidět, že magnetoakustické vlny jsou mnohem složitější než obyčejný zvuk. Bude-li výraz v první hranaté závorce nulový, získáme jeden z modů, tzv. *Alfvénovu vlnu* (A). Bude-li nulový výraz v druhé hranaté závorce, získáme snadno řešitelnou bikvadratickou rovnici pro úhlovou frekvenci. Její řešení poskytuje další dva módy magnetoakustických vln, tzv. *pomalou vlnu* (S , Slow) a *rychlou vlnu* (F , Fast). Disperzní relace jednotlivých modů zřejmě jsou (α je úhel mezi vlnovým vektorem a magnetickým polem resp. Alfvénovou rychlostí):

$$\begin{aligned} \omega^2 &= v_A^2 k^2 \cos^2 \alpha , \\ \omega^2 &= \frac{1}{2} k^2 (c_S^2 + v_A^2) - \frac{1}{2} k^2 \sqrt{(c_S^2 + v_A^2)^2 - 4c_S^2 v_A^2 \cos^2 \alpha} , \\ \omega^2 &= \frac{1}{2} k^2 (c_S^2 + v_A^2) + \frac{1}{2} k^2 \sqrt{(c_S^2 + v_A^2)^2 - 4c_S^2 v_A^2 \cos^2 \alpha} . \end{aligned} \quad (4.112)$$

Poznamenejme na závěr, že v některé literatuře se Alfvénovými vlnami nazývají všechny tři zde zavedené módy magnetoakustických vln. V klasické zvukové vlně dochází k přelévání hustoty energie mezi chaotickou (tlakovou, p) částí energie a uspořádanou (kinetickou, $\rho v^2/2$) částí energie. V magnetoakustické vlně je rovnocenným partnerem ještě hustota energie magnetického pole (magnetický tlak, $p_m = B^2/2\mu_0$). Položíme-li sobě rovny hustotu kinetické energie a magnetický tlak, získáme hodnotu Alfvénovy rychlosti:

$$\frac{1}{2} \rho v^2 = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} \quad \Rightarrow \quad v = \frac{B}{\sqrt{\mu_0 \rho}} .$$

4.4.2. Vlnoplochy magnetoakustických vln

Z disperzních relací (35) snadno určíme fázové rychlosti šíření jednotlivých módů:

$$\begin{aligned} v_{fA}^2 &= v_A^2 \cos^2 \alpha, \\ v_{fS}^2 &= \frac{1}{2} (c_s^2 + v_A^2) - \frac{1}{2} \sqrt{(c_s^2 + v_A^2)^2 - 4c_s^2 v_A^2 \cos^2 \alpha}, \\ v_{fF}^2 &= \frac{1}{2} (c_s^2 + v_A^2) + \frac{1}{2} \sqrt{(c_s^2 + v_A^2)^2 - 4c_s^2 v_A^2 \cos^2 \alpha}. \end{aligned} \quad (4.113)$$

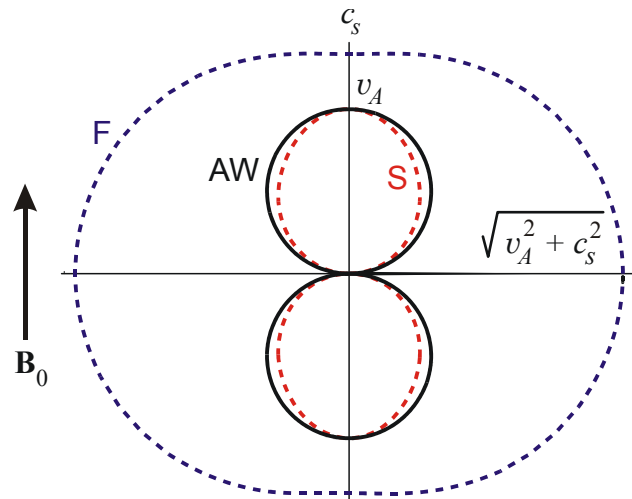
Nalezněme nyní tyto rychlosti ve směru magnetického pole \mathbf{B}_0 ($\alpha = 0$):

$$\alpha = 0 \Rightarrow v_{fA} = v_A, \quad v_{fS} = \min(v_A, c_s), \quad v_{fF} = \max(v_A, c_s). \quad (4.114)$$

Fázová rychlost Alfvénovy vlny je rovna Alfvénově rychlosti. Pomalá magnetoakustická vlna získá ve směru pole menší z obou základních rychlostí (rychlosti zvuku a Alfvénovy rychlosti) a rychlá vlna se bude šířit větší z obou rychlostí. Ve směru kolmém na původní magnetické pole ($\alpha = \pi/2$) jsou rychlosti šíření:

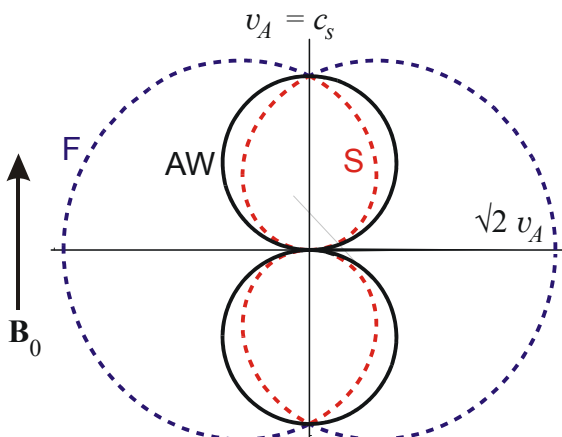
$$\alpha = \frac{\pi}{2} \Rightarrow v_{fA} = 0, \quad v_{fS} = 0, \quad v_{fF} = \sqrt{v_A^2 + c_s^2}. \quad (4.115)$$

Ve směru kolmém na pole se šíří jediné rychlá magnetoakustická vlna. Situace je dobře patrná na polárním diagramu závislosti fázové rychlosti všech tří módů. Při zmenšujícím se magnetickém poli se vlnoplochy Alfvénovy a pomalé magnetoakustické vlny zmenšují a vlnoplocha rychlé magnetoakustické vlny se stává „obyčejnou“ zvukovou vlnoplochou. Magnetické pole vnáší do šíření zvuku zjevnou anizotropii. Chování vlnoploch při různých hodnotách pole si vyzkoušejte v apletu na našem serveru <http://www.aldebaran.cz>. Aplet najdete v sekci APLETY. Tvar vlnoploch resp. polární diagram fázové rychlosti pro různé hodnoty magnetických polí si prohlédněte na obrázcích.

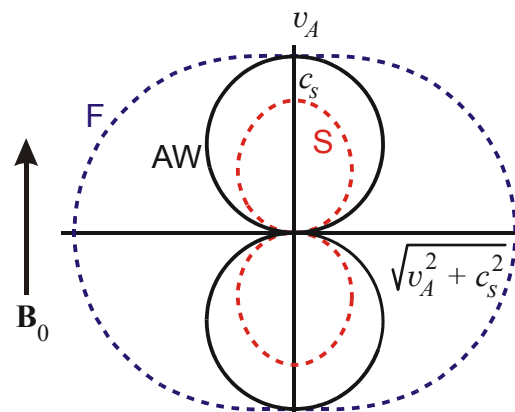


Slabé pole ($v_A < c_s$)

Rychlá vlna přechází ve zvukovou, ostatní mody se zmenšují



Magnetický tlak roven kinetickému ($v_A = c_s$)



Silné pole ($v_A > c_s$)

4.4.3. Směry vektorů v magnetoakustických vlnách

Chceme-li zkoumat směry jednotlivých poruch u konkrétního modu, musíme dosadit příslušnou disperzní relaci do původní linearizované soustavy (4.108). Volba souřadnicového systému zůstává zachována. Ze soustavy rovnic (4.108) nalezneme vzájemné směry jednotlivých vektorů. Ukazuje se, že magnetoakustické vlny jsou směsicí podélných i příčných vln. Povšimněme si nyní, z široké škály možností, tři zajímavých konfigurací.

Alfvénova vlna. Alfvénův mód je nejjednodušší ze tří nalezených disperzních relací. Ze soustavy rovnic (4.108) snadno určíme, že plazma kmitá napříč magnetickému poli i směru šíření a jde tedy o vlnu příčnou. Porucha magnetického pole je kolmá na původní magnetické pole. To způsobuje rozvlnění magnetických siločar podle obrázku. Je-li pole orientováno ve směru třetí osy, má disperzní relace tvar $\omega = v_A k \cos \alpha = v_A k_3$ a grupová rychlost je rovna

$$\mathbf{v}_g = (0, 0, v_A). \quad (4.116)$$

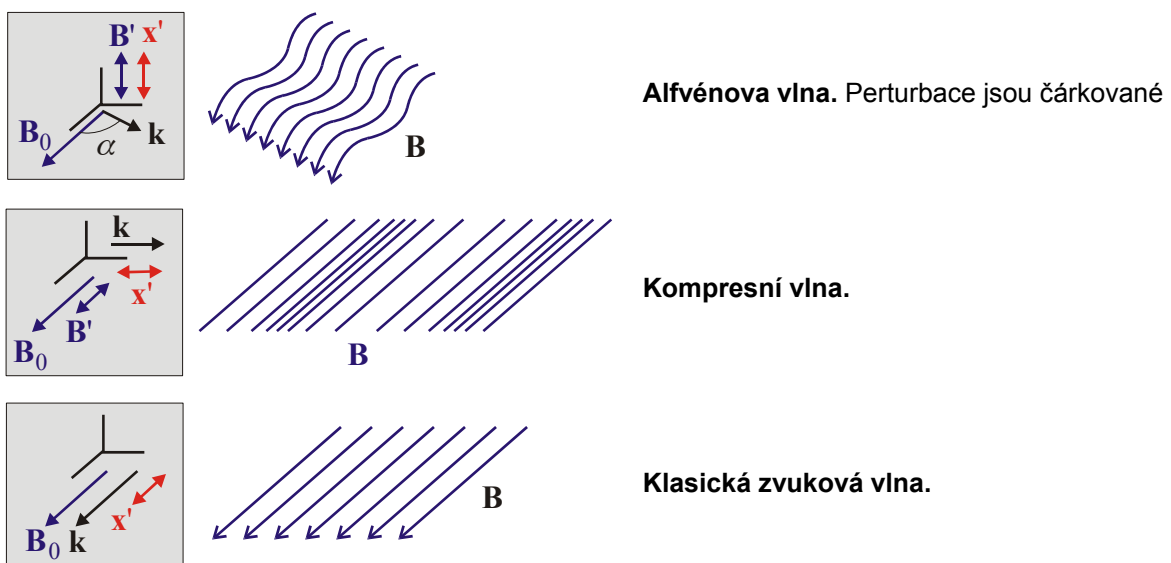
Energie se v Alfvénově vlně šíří jen podél magnetického pole \mathbf{B}_0 a to Alfvénovou rychlostí.

Kompresní vlna. V rychlé magnetoakustické vlně je při směru šíření kolmém na magnetické pole ($\mathbf{k} \perp \mathbf{B}_0$) porucha pole rovnoběžná s polem původním. Tím vzniká vlna hustších a řidších oblastí magnetických siločar, kterou nazýváme kompresní vlna. Plazma kmitá podél směru šíření vln \mathbf{k} (kolmo na pole \mathbf{B}_0). Jde proto o *podélnou vlnu*. Vlnění je velmi podobné „obyčejnému“ zvuku. Roli pružného prostředí však přebírá nejenom hydrostatický tlak p , ale i magnetický tlak $p_m = B^2/2\mu_0$. Rychlost vln je dána oběma vlivy a má hodnotu

$$v_f = \sqrt{c_s^2 + v_A^2}. \quad (4.117)$$

Směry vektorů v kompresní vlně naleznete na obrázku 6. Kompresní vlna se někdy nazývá *kompresní Alfvénova podélná vlna*.

Klasická zvuková vlna. Ve směru magnetického pole \mathbf{B}_0 se buď rychlá nebo pomalá vlna šíří rychlostí zvuku c_s (podle velikosti magnetického pole). Plazma kmitá podél směru šíření a není ovlivněno přítomností magnetického pole. Porucha magnetického pole je nulová.

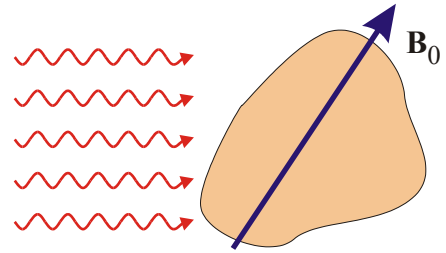


4.5. ELEKTROMAGNETICKÉ VLNY

Elektromagnetické vlny šířící se plazmatem interagují především s málo hmotnými elektrony. Ionty nemohou vysokofrekvenční děje sledovat. V elektromagnetické vlně bude vždy platit

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{B} = 0 & \Rightarrow \delta \mathbf{B} \perp \mathbf{k}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} & \Rightarrow \delta \mathbf{B} \perp \delta \mathbf{E}. \end{aligned} \quad (4.118)$$

Konstantní magnetické pole \mathbf{B}_0 způsobuje anizotropii v šíření vln, vlny se šíří jinak podél pole \mathbf{B}_0 a jinak ve směru pole \mathbf{B}_0 . Podobně jako u krystalů nalezneme v plazmatu *řádnou* a *mimořádnou* vlnu budeme-li vlny sledovat ve směru pole. Tytéž vlny se ale kolmo na pole budou jevit jako směsice *levotočivých* a *pravotočivých* modů. Velmi zajímavá je také otázka reakce materiálu na vysokofrekvenční vlny a výpočet *permutivity plazmatu*. K projevům plazmatu patří také několikasekundové nízkofrekvenční záblesky vznikající jako doprovodné efekty blesků a šířící se podél zemského magnetického pole, tzv. *hvizdy*.



4.5.1. Odvození disperzní relace

Za výchozí rovnice budeme volit rovnici kontinuity pro elektrony, pohybovou rovnici pro elektrony, a Maxwellovy rovnice pro časový vývoj elektrického a magnetického pole. Časový vývoj elektrického pole (Maxwellův posuvný proud) nelze vzhledem k frekvenci dějů zanedbat. Všude uvažujeme limitu $m_i \rightarrow \infty$; $p \rightarrow 0$, tj. pro šíření elektromagnetických vln plazmatem zanedbáváme pohyb iontů a tepelné děje v plazmatu:

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_e}{\partial t} + \operatorname{div}(n_e \mathbf{v}_e) &= 0, \\ m_e n_e \frac{\partial \mathbf{v}_e}{\partial t} + m_e n_e (\mathbf{v}_e \cdot \nabla) \mathbf{v}_e &= -en_e \mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B}, \\ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= -\operatorname{rot} \mathbf{E}, \\ \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \operatorname{rot} \mathbf{B} - \frac{\mathbf{j}}{\varepsilon_0}; \quad \mathbf{j} = -en_e \mathbf{v}_e. \end{aligned} \quad (4.119)$$

Standardním postupem provedeme linearizaci

$$n_e = n_0 + \delta n_e, \quad \mathbf{v}_e = \delta \mathbf{v}_e, \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \delta \mathbf{B}, \quad \mathbf{E} = \delta \mathbf{E}. \quad (4.120)$$

a Fourierovu transformaci soustavy (4.119). Perturbace koncentrace se nikde nevyskytuje a proto je možné rovnici kontinuity vynechat. Za proudovou hustotu všude dosadíme z poslední rovnice:

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{v}_e &= -i \frac{e}{m_e \omega} \delta \mathbf{E} - i \frac{e}{m_e \omega} \delta \mathbf{v}_e \times \mathbf{B}_0, \\ \delta \mathbf{B} &= \frac{1}{\omega} \mathbf{k} \times \delta \mathbf{E}, \\ \delta \mathbf{E} &= -i \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0 \omega} \mathbf{k} \times \delta \mathbf{B} + i \frac{en_0}{\varepsilon_0 \omega} \delta \mathbf{v}_e. \end{aligned} \quad (4.121)$$

Zavedme standardní označení

$$c^2 \equiv \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0}; \quad \omega_p^2 \equiv \frac{ne^2}{m_e \varepsilon_0}; \quad \omega_c \equiv \frac{eB_0}{m_e} \quad (4.122)$$

pro rychlost světla, plazmovou frekvenci a cyklotronní frekvenci a dále zavedme jednotkový vektor ve směru magnetického pole

$$\boldsymbol{\beta} \equiv \frac{\mathbf{B}_0}{B_0}. \quad (4.123)$$

V soustavě (4.121) budeme eliminovat proměnné, z druhé rovnice dosadíme za $\delta \mathbf{B}$ do ostatních rovnic:

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{v}_e &= -i \frac{e}{m_e \omega} \delta \mathbf{E} - i \frac{\omega_c}{\omega} \delta \mathbf{v}_e \times \boldsymbol{\beta}, \\ \delta \mathbf{E} &= -i \frac{c^2}{\omega^2} \mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \delta \mathbf{E}) + i \frac{en_0}{\varepsilon_0 \omega} \delta \mathbf{v}_e. \end{aligned}$$

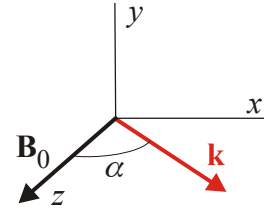
V dalším kroku vypočteme z druhé rovnice poruchu rychlostního pole a dosadíme do rovnice první (vyjádříme dvojnásobné vektorové součiny). Získáme tak samostatnou rovnici pro poruchu elektrického pole:

$$(\omega^2 - \omega_p^2 - c^2 k^2) \delta \mathbf{E} + i \frac{\omega_c}{\omega} (\omega^2 - c^2 k^2) \delta \mathbf{E} \times \boldsymbol{\beta} + c^2 (\mathbf{k} \cdot \delta \mathbf{E}) \mathbf{k} + i \frac{\omega_c}{\omega} c^2 (\mathbf{k} \cdot \delta \mathbf{E}) \mathbf{k} \times \boldsymbol{\beta} = 0.$$

Zvolíme-li souřadnicový systém stejný jako v minulé kapitole: $\mathbf{B}_0 = (0, 0, B_0)$, a vlnový vektor $\mathbf{k} = (k \sin \alpha, 0, k \cos \alpha)$, získá rovnice pro poruchu elektrického pole jednoduchý tvar

$$\mathbf{M}_{\mathbf{E}} \delta \mathbf{E} = 0$$

(4.124)



s maticí $\mathbf{M}_{\mathbf{E}}$ ve tvaru

$$\mathbf{M}_{\mathbf{E}} = \begin{pmatrix} \omega^2 - \omega_p^2 - c^2 k^2 \cos^2 \alpha & i \frac{\omega_c}{\omega} (\omega^2 - c^2 k^2) & c^2 k^2 \cos \alpha \sin \alpha \\ -i \frac{\omega_c}{\omega} (\omega^2 - c^2 k^2 \cos^2 \alpha) & \omega^2 - \omega_p^2 - c^2 k^2 & -i \frac{\omega_c}{\omega} c^2 k^2 \cos \alpha \sin \alpha \\ c^2 k^2 \cos \alpha \sin \alpha & 0 & \omega^2 - \omega_p^2 - c^2 k^2 \sin^2 \alpha \end{pmatrix}.$$

Pro netriviální řešení musí být determinant této matice rovný nule, což vede na disperzní relaci

$$\begin{aligned} & c^4 k^4 \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha \left[(\omega^2 - \omega_p^2 - c^2 k^2) - \frac{\omega_c^2}{\omega^2} (\omega^2 - c^2 k^2) \right] + \\ & + (\omega^2 - \omega_p^2 - c^2 k^2 \sin^2 \alpha) \times [(\omega^2 - \omega_p^2 - c^2 k^2 \cos^2 \alpha)(\omega^2 - \omega_p^2 - c^2 k^2) - \\ & - \frac{\omega_c^2}{\omega^2} (\omega^2 - c^2 k^2)(\omega^2 - c^2 k^2 \cos^2 \alpha)] = 0. \end{aligned} \quad (4.125)$$

4.5.2. Speciální případy

I. VLNY ŠÍŘÍCÍ SE PODÉL POLE \mathbf{B}_0 ($\alpha = 0$)

Pro $\alpha = 0$ z disperzní relace máme

$$\left(\omega^2 - \omega_p^2\right) \left[\left(\omega^2 - \omega_p^2 - c^2 k^2\right)^2 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2} \left(\omega^2 - c^2 k^2\right)^2 \right] = 0. \quad (4.126)$$

Řešení vzhledem k ω má tři základní módy. První mód získáme vynulováním levé závorky, jde o plazmové oscilace elektronů na plazmové frekvenci. Vynulováním pravé závorky získáme další dva módy, tzv. R a L vlny.

■ R a L vlny

Disperzní relaci získáme z rovnosti

$$\left(\omega^2 - \omega_p^2 - c^2 k^2\right)^2 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2} \left(\omega^2 - c^2 k^2\right)^2 = 0,$$

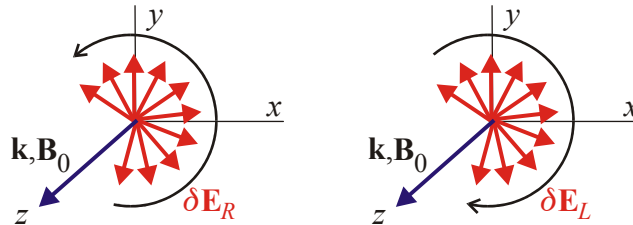
ze které nejprve vypočteme kombinaci $\omega^2 - c^2 k^2$ (vyskytuje se v obou závorkách). Získáme

$$\omega^2 = c^2 k^2 + \frac{\omega_p^2}{1 \pm \omega_c/\omega}. \quad (4.127)$$

Po dosazení disperzní relace do linearizované rovnice (4.124) pro elektrické pole zjistíme, že

$$\delta E_x = \mp i \delta E_y. \quad (4.128)$$

Imaginární jednotka znamená vzájemný fázový posun složek E_x a E_y o $\pi/2$, tj. (podobně jako u skládání dvou fázově posunutých kolmých kmitů). Jde o pravotočivě a levotočivě polarizovanou kruhovou vlnu, tzv. R vlnu (Right, horní znaménko) a L vlnu (Left, dolní znaménko). Porucha elektrického pole je kolmá na základní magnetické pole, $\delta \mathbf{E} \perp \mathbf{B}_0$.



Pro index lomu snadno nalezneme jednoduchý výraz

$$N = \frac{c}{v_f} = \frac{c}{\omega/k} = \frac{ck}{\omega}. \quad (4.129)$$

Z disperzní relace (4.127) odvodíme vztah pro index lomu

$$N^2 = 1 - \frac{\omega_p^2/\omega^2}{1 \pm \omega_c/\omega}. \quad (4.130)$$

Zajímavé jsou limitní situace, kdy index lomu je nekonečný (tzv. *rezonance*) nebo nulový (tzv. *cutoff*, mezní frekvence za kterou se vlna nešíří):

$$\begin{aligned} N \rightarrow \infty \quad (v_f \rightarrow 0) &\Rightarrow \omega = \omega_c; \\ N \rightarrow 0 \quad (v_f \rightarrow \infty) &\Rightarrow \omega = \omega_{R,L} \equiv \mp \frac{1}{2} \omega_c + \frac{1}{2} \sqrt{\omega_c^2 + 4\omega_p^2} \end{aligned} \quad (4.131)$$

Cyklotronní rezonance: První limita odpovídá cyklotronní rezonanci, při které je vlna absorbována na frekvenci Larmorova pohybu elektronů.

Mezní frekvence (pravá a levá): Druhá limita odpovídá odrazu vln. Frekvence $\omega_{R,L}$ se nazývají pravá a levá mezní frekvence. Při řešení kvadratické rovnice u druhé limity bylo použito před diskriminantem jen znaménko “+”, aby výsledná frekvence byla kladná.

II. VLNY ŠÍŘÍCÍ SE KOLMO NA POLE \mathbf{B}_0 ($\alpha = \pi / 2$)

Pro $\alpha = \pi/2$ z disperzní relace (4.125) máme

$$(\omega^2 - \omega_p^2 - c^2 k^2) \cdot [(\omega^2 - \omega_p^2)(\omega^2 - \omega_p^2 - c^2 k^2) - \omega_c^2(\omega^2 - c^2 k^2)] = 0. \quad (4.132)$$

■ Řádná vlna (O)

Anulováním první závorky získáme *řádnou vlnu* (O vlnu – Ordinary Wave):

$$\omega^2 = \omega_p^2 + c^2 k^2. \quad (4.133)$$

Jde o základní disperzní relaci pro šíření elektromagnetické vlny plazmatem. Úhlová frekvence a vlnový vektor budou reálná čísla pro $\omega > \omega_p$.

- 1) Šíření *není ovlivněno magnetickým polem*.
- 2) *Řádná vlna má kmitající poruchu elektrického pole kolmou na původní magnetické pole, $\delta \mathbf{E} \perp \mathbf{B}_0$.*
- 3) *Pro frekvence vyšší než plazmová frekvence je plazma pro elektromagnetické vlny „průhledné“.*

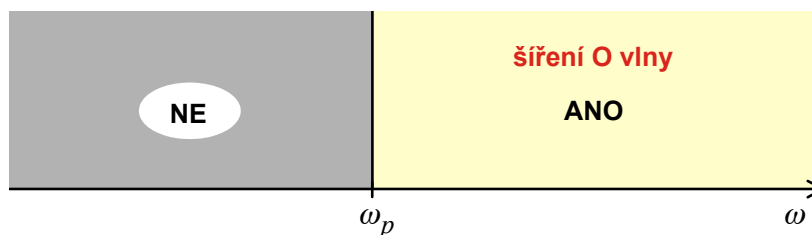
Pro $\omega < \omega_p$ dochází k útlumu vlnění (komplexní k , ω), vlna se nešíří. Dochází k rozkmitání elektronů a absorpci vlnění. Pro index lomu řádné vlny z této disperzní relace odvodíme

$$N^2 = \frac{c^2 k^2}{\omega^2} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} = 1 - \frac{n_0 e^2}{m_e \varepsilon_0 \omega^2}. \quad (4.134)$$

Index lomu je frekvenčně závislý, různé frekvence elektromagnetické vlny se šíří různou rychlostí. Na vztahu (4.134) pro index lomu jsou založeny různé diagnostické metody pro plazma, například Schlierová fotografie.

Rezonance: Pro řádnou vlnu nedochází k žádným rezonancím ($N \rightarrow \infty$).

Mezní frekvence (plazmová): Mezní frekvencí ($N \rightarrow 0$) je plazmová frekvence elektronů.



■ Mimořádná vlna (X)

Anulováním druhé závorky v (4.132) získáme disperzní relaci mimořádné vlny (X vlny – eXtraordinary Wave).

$$(\omega^2 - \omega_p^2)(\omega^2 - \omega_p^2 - c^2 k^2) - \omega_c^2(\omega^2 - c^2 k^2) = 0. \quad (4.135)$$

Standardní limitní situace nastávají pro

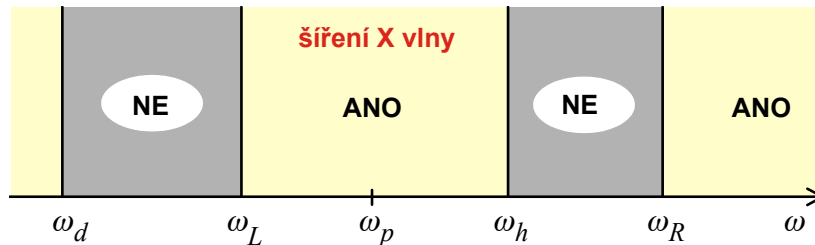
$$N \rightarrow \infty \quad (v_f \rightarrow 0) \quad \Rightarrow \quad \omega = \omega_h \equiv \sqrt{\omega_p^2 + \omega_c^2}. \quad (4.136)$$

$$N \rightarrow 0 \quad (v_f \rightarrow \infty) \quad \Rightarrow \quad \omega = \omega_{R,L} \equiv \mp \frac{1}{2} \omega_c + \frac{1}{2} \sqrt{\omega_c^2 + 4\omega_p^2}. \quad (4.137)$$

Horní hybridní rezonance: K rezonanci dochází pro tzv. horní hybridní frekvenci ω_h , při které vlna nepostupuje, porucha magnetického pole je nulová a jde o čistě elektrostatické oscilace elektronů na horní hybridní frekvenci ($v_g = 0$). Jde o zobecnění plazmových oscilací, které jsou vyvolány elektromagnetickou vlnou. Vratnou silou je kromě Coulombovy síly ještě Lorentzova síla (Larmorova gyrace kolem \mathbf{B}_0), proto je frekvence vyšší než u čistých plazmových oscilací bez magnetického pole. Při nenulové teplotě elektronů se tyto oscilace začnou šířit jako vlny.

Dolní hybridní rezonance: Uvážíme-li možný pohyb iontů, nastává ještě jedna rezonance na tzv. dolní hybridní frekvenci $\omega_d \equiv (\omega_{ci}\omega_{ce})^{1/2}$. Ta ale z naší disperzní relace nevyjde, protože jsme pohyb iontů zanedbali.

Mezní frekvence (pravá a levá): K odrazům dochází pro mezní pravou a levou frekvenci $\omega_{R,L}$. Mimořádná vlna se šíří v intervalu frekvencí $\omega \in (\omega_L, \omega_h) \cup (\omega_R, \infty)$.



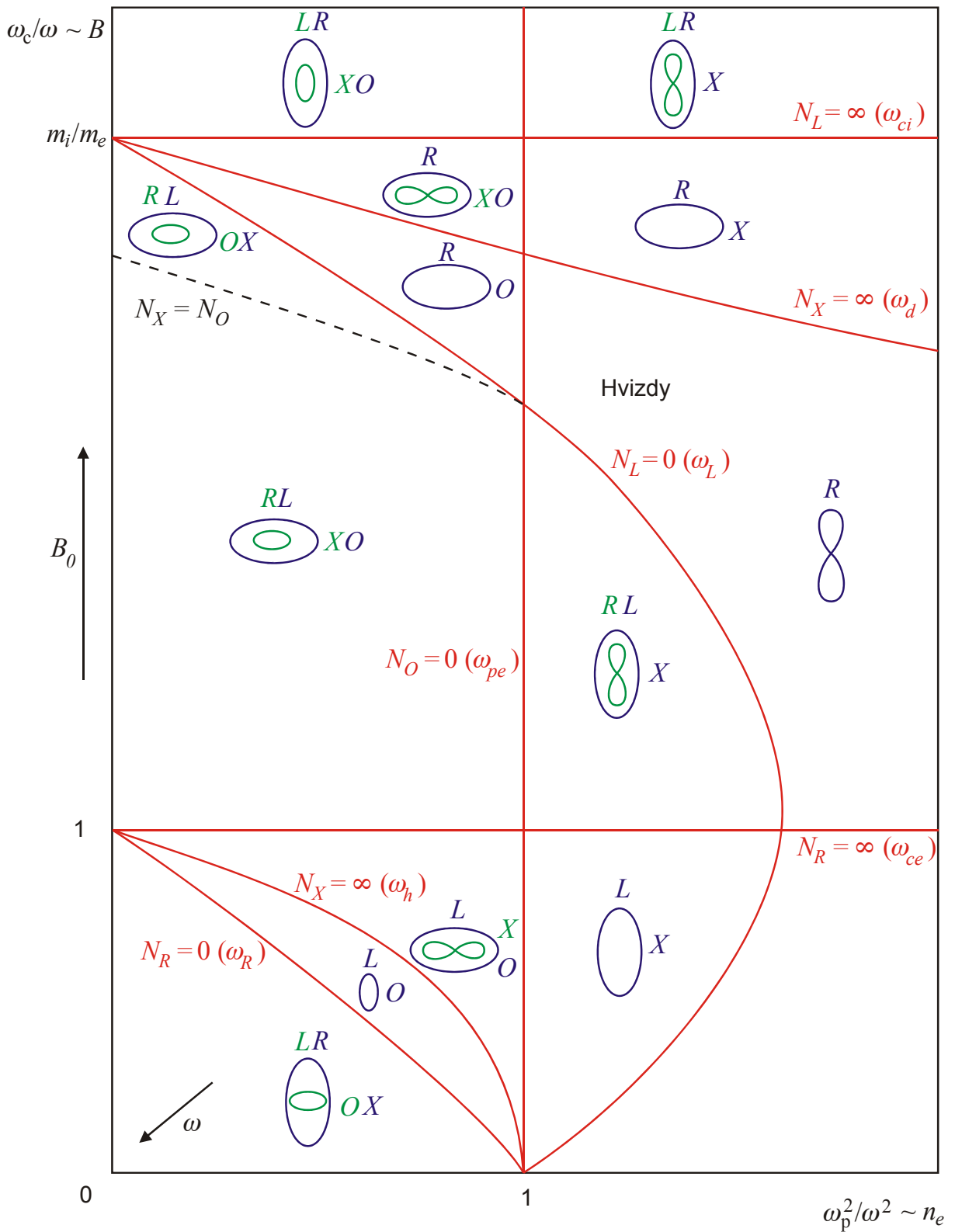
- 1) X vlna se nešíří v oblastech $\omega \in (\omega_d, \omega_L) \cup (\omega_h, \omega_R)$.
- 2) X vlna je dominantně ovlivněna přítomností magnetického pole \mathbf{B}_0 .
- 3) Kmitající porucha elektrického pole je rovnoběžná s magnetickým polem $\delta\mathbf{E} \parallel \mathbf{B}_0$

V případě obecného směru vlny vzhledem k magnetickému poli \mathbf{B}_0 je šíření elektromagnetické vlny popsáno obecnou disperzní relací (4.125).

4.5.3. CMA diagram

Tvary vlnoploch (polární diagramy fázové rychlosti) se zakreslují do tzv. CMA (P. C. Clemman, R. F. Mullaly, W. P. Allis) diagramu, kde na osách je magnetické pole a koncentrace plazmatu. Vlnoplochy se skokem mění na hranicích oblastí, kde je index lomu různých typů vln (R, L, X, O) nulový nebo nekonečný.

$N_L = \infty$	cyklotronní iontová rezonance	$\omega = \omega_{ci}$
$N_R = \infty$	cyklotronní elektronová rezonance	$\omega = \omega_{ce}$
$N_X = \infty$	horní hybridní rezonance	$\omega = \omega_h$
	dolní hybridní rezonance	$\omega = \omega_d$
$N_L = 0$	mezní frekvence L vln	$\omega = \omega_L$
$N_R = 0$	mezní frekvence R vln	$\omega = \omega_R$
$N_O = 0$	mezní frekvence O vln	$\omega = \omega_{pe}$



4.5.4. Tenzor permitivity pro elektromagnetické vlny v plazmatu

Při vysokých frekvencích a v přítomnosti magnetického pole se plazma chová zcela jinak než běžné vodivé prostředí. Proto určíme tenzor permitivity pro náš případ chladného elektronového plazmatu s polem \mathbf{B}_0 . V literatuře se pro kvadráty již zavedených indexů lomu používá často označení

$$\begin{aligned}
R \equiv N_R^2 &= 1 - \frac{\omega_p^2/\omega^2}{1 - \omega_c/\omega}; & L \equiv N_L^2 &= 1 - \frac{\omega_p^2/\omega^2}{1 + \omega_c/\omega}; \\
P \equiv N_O^2 &= 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}; & X \equiv N_X^2 &= \frac{N_R^2 N_L^2}{(N_R^2 + N_L^2)/2}.
\end{aligned} \tag{4.138}$$

Pro více tekutin se sčítá přes všechny komponenty

$$N_R^2 = 1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2/\omega^2}{1 - \omega_{c\alpha}/\omega}; \quad N_L^2 = 1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2/\omega^2}{1 + \omega_{c\alpha}/\omega}; \quad N_O^2 = 1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega^2}. \tag{4.139}$$

Je také výhodné zavést symetrickou a antisymetrickou část kvadrátů indexů N_R a N_L :

$$S \equiv \frac{1}{2}(R + L); \quad A \equiv \frac{1}{2}(R - L). \tag{4.140}$$

Veličinu X lze pak jednoduše zapsat

$$X = RL/S. \tag{4.141}$$

Určeme nyní indukci elektrického pole v plazmatu reagujícím na vysokofrekvenční vlnu:

$$\delta \mathbf{D} = \varepsilon_0 \delta \mathbf{E} + \delta \mathbf{P} = \varepsilon_0 \delta \mathbf{E} - en_e \delta \mathbf{x}_e = \varepsilon_0 \delta \mathbf{E} + \frac{en_e}{i\omega} \delta \mathbf{v}_e. \tag{4.142}$$

K převodu poloh na rychlostní pole jsme využili integraci příslušné rovinné Fourierovy komponenty. Perturbaci rychlostního pole musíme určit z pohybové rovnice pro elektrony, nejlépe v perturbovaném tvaru po Fourierově transformaci (4.121):

$$\delta \mathbf{v}_e = -i \frac{e}{m_e \omega} \delta \mathbf{E} - i \frac{e}{m_e \omega} \delta \mathbf{v}_e \times \mathbf{B}_0.$$

Rovnici zapíšeme ve složkách a vypočteme poruchu rychlostního pole elektronů:

$$\begin{aligned}
\delta v_k &= -\frac{ie}{m_e \omega} \delta E_k - \frac{ie}{m_e \omega} \varepsilon_{klm} \delta v_l B_{0m} \Rightarrow \\
\left(\delta_{kl} + i \frac{\omega_c}{\omega} \varepsilon_{klm} \beta_m \right) \delta v_l &= -\frac{ie}{m_e \omega} \delta E_k.
\end{aligned}$$

Rovnice pro rychlost má jednoduchý maticový tvar

$$\mathbf{A} \delta \mathbf{v} = -\frac{ie}{m_e \omega} \delta \mathbf{E}; \quad \mathbf{A} \equiv \begin{pmatrix} 1 & i\omega_c/\omega & 0 \\ -i\omega_c/\omega & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{4.143}$$

K určení poruchy rychlostního pole postačí najít inverzní matici k \mathbf{A} . Porucha indukce elektrického pole potom podle (4.142) bude

$$\delta \mathbf{D} = \varepsilon_0 \delta \mathbf{E} + \frac{en_e}{i\omega} \delta \mathbf{v}_e = \varepsilon_0 \delta \mathbf{E} + \frac{en_e}{i\omega} \left(-\frac{ie}{m_e \omega} \mathbf{A}^{-1} \delta \mathbf{E} \right) = \varepsilon_0 \left(\mathbf{1} - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \mathbf{A}^{-1} \right) \delta \mathbf{E}.$$

Hledaný tenzor permitivity proto je

$$\vec{\varepsilon} = \varepsilon_0 \left(\mathbf{1} - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \mathbf{A}^{-1} \right); \tag{4.144}$$

Posledním krokem tedy bude určení inverzní matice k \mathbf{A} . Můžeme použít jakoukoli standardní metodu (Gaussovu eliminaci, výpočet přes subdeterminanty). V tomto textu využijeme metodu spektrálního rozvoje využívanou v kvantové teorii (viz TF2). Určíme vlastní čísla, vlastní vektory a příslušné projekční operátory matice \mathbf{A} .

$$\begin{aligned} \lambda_1 = 1, \quad |1\rangle &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \\ \lambda_2 = 1 - \frac{\omega_c}{\omega}, \quad |2\rangle &= \begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P}_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i & 0 \\ i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \\ \lambda_3 = 1 + \frac{\omega_c}{\omega}, \quad |3\rangle &= \begin{pmatrix} +i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P}_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ -i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Pro inverzní matici platí

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\lambda_1} \mathbf{P}_1 + \frac{1}{\lambda_2} \mathbf{P}_2 + \frac{1}{\lambda_3} \mathbf{P}_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{1 - \omega_c/\omega} + \frac{1}{1 + \omega_c/\omega}; & \frac{i}{1 + \omega_c/\omega} - \frac{i}{1 - \omega_c/\omega} & 0 \\ \frac{i}{1 - \omega_c/\omega} - \frac{i}{1 + \omega_c/\omega} & \frac{1}{1 - \omega_c/\omega} + \frac{1}{1 + \omega_c/\omega} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Po dosazení do (4.144) získáme výsledný tenzor permitivity

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon_0 \begin{pmatrix} S & -iA & 0 \\ iA & S & 0 \\ 0 & 0 & P \end{pmatrix}. \quad (4.145)$$

Tenzor permitivity je zjevně anizotropní, má nediagonální prvky a prvek na diagonále odpovídající směru magnetického pole (P) je jiný než ve zbývajících směrech (S). Tenzor permitivity je navíc komplexní.

4.5.5. Hvizdy (whistlers)

Hvizdy vznikají jako doprovodné efekty blesků v dolních vrstvách atmosféry. Jde o elektromagnetické vlny s frekvencemi v rozsahu 300 Hz až 30 kHz, které se šíří přibližně ve směru silokřivek zemského magnetického pole. Hvizdy byly objeveny Barkhausenem v roce 1919. Jde o modifikaci R vln s velmi malým úhlem a mezi směrem magnetického pole Země a šíření. Disperzní relace hvizdů je (viz R vlny):

$$\omega^2 = c^2 k^2 + \frac{\omega_p^2}{1 - \frac{\omega_c}{\omega} \cos \alpha}. \quad (4.146)$$

Pro většinu hvizdů je frekvence vln podstatně nižší než cyklotronní frekvence ($\omega \ll \omega_c$) a lze použít jednodušší aproximaci (zanedbáme jednotku ve jmenovateli), kterou odvodil Storey v roce 1953:

$$\omega^2 = c^2 k^2 - \frac{\omega_p^2 \omega}{\omega_c \cos \alpha}. \quad (4.147)$$

Pro velmi nízké frekvence lze dokonce zanedbat kvadrát frekvence na levé straně a získat ještě jednodušší aproximaci pro nízkofrekvenční hvizdy:

$$\omega \cong \frac{c^2 k^2}{\omega_p^2} \omega_c \cos \alpha . \quad (4.148)$$

Standardním postupem nalezneme fázovou a grupovou rychlost nízkofrekvenčních hvizdů

$$v_f \equiv \frac{\omega}{k} = \frac{c^2 k}{\omega_p^2} \omega_c \cos \alpha ; \quad v_g \equiv \frac{\partial \omega}{\partial k} = 2 \frac{c^2 k}{\omega_p^2} \omega_c \cos \alpha . \quad (4.149)$$

Za velikost vlnového vektoru dosadíme zpět z disperzní relace:

$$v_f = \frac{c}{\omega_p} \sqrt{\omega_c \cos \alpha} \omega^{1/2}; \quad v_g = \frac{2c}{\omega_p} \sqrt{\omega_c \cos \alpha} \omega^{1/2} . \quad (4.150)$$

Pro rozdíl odklonu fázové a grupové rychlosti od vektoru zemského magnetického pole \mathbf{B}_0 platí

$$\operatorname{tg}(\alpha_g - \alpha) = \frac{1}{k} \frac{\partial \omega / \partial \alpha}{\partial \omega / \partial k} = \dots = -\frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha .$$

Nyní již snadno určíme úhel α_g

$$\alpha_g = \operatorname{arctg} \left[\frac{\sin \alpha \cos \alpha}{1 + \cos^2 \alpha} \right]$$

a maximum

$$\alpha_{g,\max} = \operatorname{arctg} \left[2^{-3/2} \right] = 19^\circ 29' . \quad (4.151)$$

Maximální odklon šíření energie nízkofrekvenčních hvizdů od směru magnetického pole Země je $19^\circ 29'$.

4.6. MHD NESTABILITY

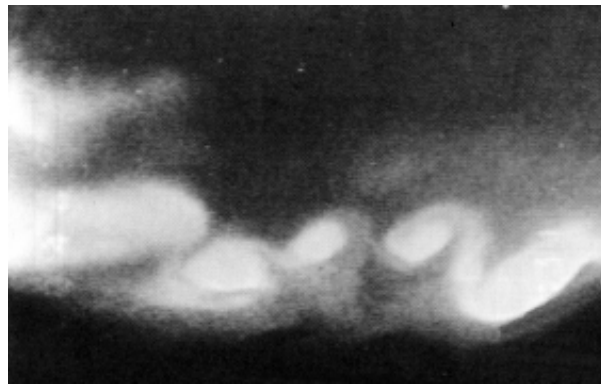
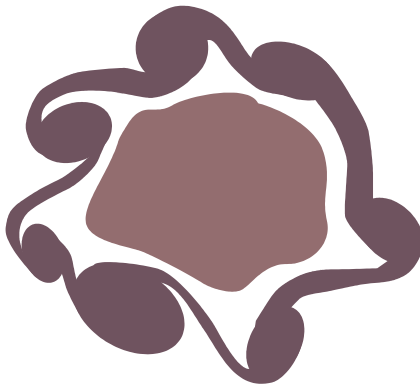
4.6.1. Dvousvazková (Bunemanova) nestabilita

4.6.2. Rayleigh-Taylorova nestabilita

4.6.3. Kelvin-Helmholtzova nestabilita

4.6.4. Diocotronová nestabilita

Jestliže ve válcovém vlákně dojde z jakýchkoli důvodů k radiální separaci náboje, vznikne radiální složka elektrického pole. Důsledkem může být azimutální rotace vlákna způsobená driftem v polích E_r a B_z . Na povrchu plazového vlákna potom dojde k rozvoji *diocotronové nestability*, která je analogií Kelvinovy-Helmholtzovy nestability na rozhraní dvou prostředí s různou rychlostí. Povrch je přetvořen do charakteristických vírových struktur. Separace náboje může být zapříčiněna driftovými pohyby, zářením doprovázeným teplotním gradientem nebo dalšími nestabilitami. Diocotronová nestabilita byla pozorována v mnoha uspořádáních a azimutální rotace vlákna může být počátečním mechanismem pro vznik helikálních struktur.



Diocotronová nestabilita. Nalevo: Typický průřez vláknem.
Napravo: Obdobná struktura v plošných polárních zářích (Aljaška 1973).

Narušení kvazineutality v radiálním směru lze popsat pomocí rozdílu koncentrací:

$$\Delta n = n_e - Zn_i = n_e(1 - f); \quad f \equiv \frac{Zn_i}{n_e}. \quad (4.152)$$

Je-li parametr $f \neq 1$, je přítomno radiální elektrické pole. Můžeme ho určit z Maxwellovy rovnice

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = -e(n_e - Zn_i), \quad (4.153)$$

kteřá má ve válcových souřadnicích tvar

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r E_r) = -\frac{n_e e}{\epsilon_0} (1 - f). \quad (4.154)$$

Radiální elektrické pole je spolu s osovým magnetickým polem zodpovědné za vznik azimutálního driftu s rychlostí

$$v_\varphi = \frac{E_r}{B_z}. \quad (4.155)$$

Vířivost rychlostního pole je definována vztahem

$$\omega_v \equiv \left| \frac{1}{2} \operatorname{rot} \mathbf{v} \right| = \frac{1}{2r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{E_r}{B_z} \right) = \frac{1}{2B_z} \frac{n_e e}{\varepsilon_0} (f-1) = \frac{ne^2}{m_e \varepsilon_0} \frac{m_e}{2e B_z} (f-1) = \frac{\omega_p^2}{2\omega_c} (f-1) . \quad (4.156)$$

Základním parametrem pro rozvoj diocotronové nestability je bezrozměrná veličina

$$q \equiv \frac{\omega_v}{\omega_c} = \frac{\omega_p^2}{2\omega_c^2} (f-1) . \quad (4.157)$$

Diocotronová nestabilita je v přírodě velmi častým jevem. Je pozorována v mnoha laboratorních experimentech, v kosmickém plazmatu i v numerických simulacích. Dokonce spirální ramena některých galaxií vykazují struktury typické pro diocotronovou nestabilitu. Charakteristický obrazec diocotronové nestability je často viděn v proudových vrstvách, v záclonovitých útvarech polárních září, atd.

Rozvoj diocotronové nestability vzniklý v důsledku rotace povrchu vlákna může být základním impulsem pro přeskupení struktury vlákna na helikální strukturu. Oba procesy (rozvoj diocotronové nestability a vznik helikální struktury) spolu pravděpodobně úzce souvisí.

4.7. DALŠÍ NESTABILITY

4.7.1. Interchange nestabilita

4.7.2. Nestability na povrchu vlákna (kink, sausage)

4.7.3. Driftové nestability

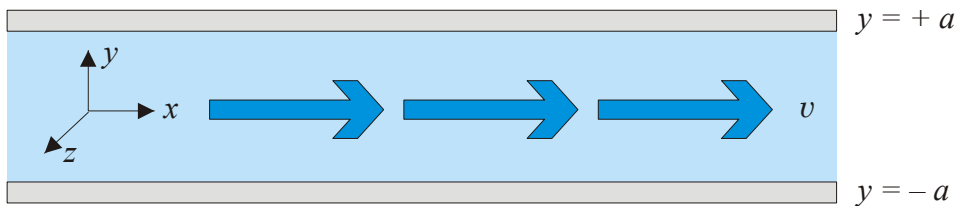
4.7.4. Iontově akustické nestability

4.8. NELINEÁRNÍ, NEINFINITEZIMÁLNÍ A STATISTICKÉ JEvy

Vyšetřování vlastností vln a nestabilit pomocí infinitezimálních perturbací je velmi účinné, ale celou řadu jevů nepostihuje. Jednak existují analytická řešení MHD rovnic, která nejsou omezená na linearizaci rovnic a jednak existují jevy, které MHD soustavou nelze popsat vůbec. V této kapitole některá taková řešení ukážeme, jejich výčet je ale spíše ilustrativní.

4.8.1. Hartmanovo řešení

Z klasické hydrodynamiky je známo chování nestlačitelné viskózní kapaliny mezi dvěma vodorovnými deskami. Je-li na začátku a konci desek rozdílný tlak, může vzniknout jednoduché laminární proudění, které se řídí Poiseuillovým zákonem. Rychlost má parabolický průběh - v těsné blízkosti desek je rychlost nulová, uprostřed toku maximální. To je způsobeno viskózními procesy neboli vnitřním třením kapaliny. Okrajové efekty desek zanedbáváme.



Je-li kapalina vodivá, lze nalézt obdobné řešení z rovnic magnetohydrodynamiky, které se nazývá Hartmanovo. Napišme nejprve výchozí soustavu rovnic magnetohydrodynamiky:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{v} &= 0, \\ \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} &= -\nabla p + \eta \Delta \mathbf{v} + \left[\frac{\operatorname{rot} \mathbf{B}}{\mu} \times \mathbf{B} \right], \\ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= \frac{1}{\sigma \mu} \Delta \mathbf{B} + \operatorname{rot} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}]. \end{aligned} \quad (4.158)$$

První rovnice je rovnice kontinuity pro nestlačitelnou kapalinu, druhá rovnice je pohybová rovnice, napravo je postupně tlaková síla, viskózní síla a Lorentzova síla. Poslední rovnice je rovnice pro magnetické pole s difúzním členem a členem zamrznání.

Poznámka: Stavovou rovnici, kterou se běžně uzavírá MHD soustava nemůžeme u nestlačitelné kapaliny použít, protože tlak není funkcí hustoty. Tlak klesá ve směru proudění lineárně, zatímco hustota kapaliny je konstantní.

Souřadnicovou soustavu zvolíme podle obrázku (tak, abychom maximálně využili symetrii problému). Budeme předpokládat stacionární proudění, tj. časové derivace v (4.158) budou nulové. Proudění předpokládáme jen podél desek, tj. rychlostní pole bude mít jen složku $v_x(y)$ závislost na y je dána symetrií problému, u desek (pro $y = \pm a$) je rychlost nulová, uprostřed oblasti maximální. Nenulové magnetické pole budeme předpokládat v řezu proudění podle obrázku, tj. nenulové $B_x(y)$ a $B_y(y)$. Z Maxwellovy rovnice $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ plyne, že B_y musí být konstantní. Tlak musí klesat podél proudění a může být stejně jako ostatní veličiny závislý na souřadnici y . Hledané řešení má tedy tvar:

$$\mathbf{v} = [v(y), 0, 0]; \quad \mathbf{B} = [B(y), B_0, 0]; \quad p = p(x, y). \quad (4.159)$$

Po dosazení do sedmi rovnic (4.158) zbudou netriviální vztahy

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \frac{d^2 v}{dy^2} + \frac{B_0}{\mu} \frac{dB}{dy}, \quad 0 = -\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{B}{\mu} \frac{dB}{dy}, \quad 0 = \frac{1}{\sigma \mu} \frac{d^2 B}{dy^2} + B_0 \frac{dv}{dy}. \quad (4.160)$$

Řešení získané soustavy není složité. Předpokládejme, stejně jako v Poiseuillově zákoně, lineární úbytek tlaku ve směru proudění, tj. $\partial p/\partial x = \text{const}$. Lze ukázat, že jiný průběh ani není možný. Potom první a třetí rovnice dává soustavu pro rychlost a magnetické pole, z druhé rovnice je třeba dopočítat tlak. Pro v a B tedy máme:

$$\eta \frac{d^2 v}{dy^2} + \frac{B_0}{\mu} \frac{dB}{dy} = \text{const}, \quad \frac{1}{\sigma \mu} \frac{d^2 B}{dy^2} + B_0 \frac{dv}{dy} = 0.$$

První rovnici derivujeme podle y a z rovnic vyloučíme druhé derivace magnetického pole:

$$\frac{d^3 v}{dy^3} - \frac{1}{D^2} \frac{dv}{dy} = 0; \quad \text{kde} \quad \frac{1}{D^2} \equiv \frac{\sigma B_0^2}{\eta}.$$

Po první integraci máme

$$\frac{d^2 v}{dy^2} - \frac{1}{D^2} v = C_1.$$

Jde o lineární diferenciální rovnici s pravou stranou. Řešení nalezneme jako součet homogenního a partikulárního řešení (lze ho hledat ve tvaru konstanty):

$$v(y) = v_p(y) + v_h(y) = -C_1 D^2 + C_2 \exp\left[+\frac{y}{D}\right] + C_3 \exp\left[-\frac{y}{D}\right].$$

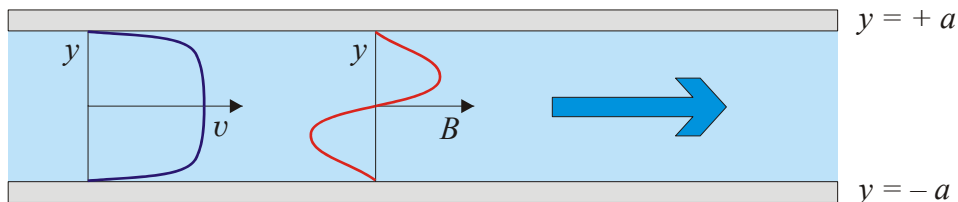
Konstanty integrace určíme z podmínek $v(\pm a) = 0$; $v(0) = v_0$. Výsledné řešení je

$$v(y) = v_0 \frac{\text{ch}\left(\frac{a}{D}\right) - \text{ch}\left(\frac{y}{D}\right)}{\text{ch}\left(\frac{a}{D}\right) - 1}; \quad D \equiv \sqrt{\frac{\eta}{\sigma B_0^2}}. \quad (4.161)$$

Nyní již snadno z první nebo třetí rovnice (4.160) dopočteme magnetické pole. Integrační konstanty určíme z podmínky spojitosti tečných složek vektoru magnetické intenzity \mathbf{H} na rozhraní ($B_{1t}/\mu_1 = B_{2t}/\mu_2$), odkud plyne $B(\pm a) = 0$. Výsledek je

$$B(y) = -\mu v_0 \sqrt{\sigma \eta} \frac{\frac{y}{a} \text{sh}\left(\frac{a}{D}\right) - \text{sh}\left(\frac{y}{D}\right)}{\text{ch}\left(\frac{a}{D}\right) - 1}; \quad D \equiv \sqrt{\frac{\eta}{\sigma B_0^2}}. \quad (4.162)$$

Nalezený profil rychlostního a magnetického pole je na následujícím obrázku. Přítomnost magnetického pole způsobuje zploštění rychlostního pole v blízkosti centra proudění a jeho rychlý pokles v blízkosti desek. Nenulová konstantní složka pole ve směru y (napříč proudění) způsobuje existenci složky pole ve směru proudění, jejíž profil je také na obrázku.



Polohu maxima a minima magnetického profilu je možné získat derivací vztahu (4.162)

$$y_{1,2} = \pm D \text{arcch}\left[\frac{D}{a} \text{sh}\left(\frac{a}{D}\right)\right]. \quad (4.163)$$

Zajímavá je limita rychlostního profilu pro slabé ($a/D \ll 1$) a silné ($a/D \gg 1$) magnetické pole.

Slabá pole

Pro slabé pole provedeme rozvoj exponenciál do prvního řádu a dostaneme známý Poiseuillův parabolický profil, magnetické pole nemá na proudění podstatný vliv:

$$v \approx v_0 \left[1 - \left(\frac{y}{a} \right)^2 \right].$$

Silná pole

Pro silné pole musíme řešit případ $y > 0$ a $y < 0$ odděleně. Ve výsledku ponecháme vždy kladnou exponenciálu, vyjde

$$v \approx v_0 \left[1 - \exp\left(\frac{|y| - a}{D} \right) \right].$$

Rychlostní pole v tomto případě exponenciálně ubývá u stěn.

4.8.2. MHD vlny konečné amplitudy

Soustava MHD rovnic je nelineární a velmi složitá. Při provádění linearizace sice dostáváme řešení ve tvaru rovinných vln, ze kterých můžeme složit vlny komplikovanější, ale vždy s infinitezimální amplitudou. Podstatnou část řešení ale vůbec nenacházíme. V této části ukážeme, že existují speciální řešení, která splňují obyčejnou vlnovou rovnici. Řešením je pak postupující vlna libovolného tvaru a libovolné amplitudy.

Uvažme MHD soustavu pro nestlačitelnou, neviskózní, ideálně vodivou kapalinu ($\rho = \text{const}$, $\eta = \zeta = 1/\sigma = 0$):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} &= -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{1}{\mu \rho} (\text{rot } \mathbf{B}) \times \mathbf{B}; \\ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= \text{rot}[\mathbf{v} \times \mathbf{B}]; \\ \text{div } \mathbf{v} &= 0; \\ \text{div } \mathbf{B} &= 0. \end{aligned} \tag{4.164}$$

Jde o rovnici pro rychlostní pole (pohybovou rovnici s tlakovou a Lorentzovou silou) a rovnici pro pole magnetické se členem zamrznání. Doplnkové jsou rovnice pro nestlačitelnost a Gaussova věta pro magnetické pole.

Předpokládejme nyní, že veličiny se mění jen v jednom určitém směru. Volme osu z souřadnicové soustavy v tomto směru. Potom hledáme řešení ve tvaru

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(t, z); \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}(t, z); \quad p = p(t, z). \tag{4.165}$$

Z doplnkových rovnic (divergencí) v (4.164) okamžitě plyne

$$v_z = v_0(t); \quad B_z = B_0(t).$$

Vzhledem k tomu, že v nekonečnu nemůže probíhat žádné proudění, musíme položit $v_0 = 0$.

V uvedené geometrii tedy máme $\mathbf{v} = (v_x, v_y, 0)$, $\mathbf{B} = (B_x, B_y, B_0)$, $\nabla = (0, 0, \partial/\partial z)$. Rozepišme nyní netriviální členy v prvních dvou rovnicích (4.164):

$$\begin{aligned}
(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} &= [0, 0, 0]; \\
\text{rot } \mathbf{B} \times \mathbf{B} &= \left[B_0 \frac{\partial B_x}{\partial z}, B_0 \frac{\partial B_y}{\partial z}, -\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{B_x^2 + B_y^2}{2} \right) \right]; \\
\nabla p &= \left[0, 0, \frac{\partial p}{\partial z} \right]; \\
\text{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) &= \left[B_0 \frac{\partial v_x}{\partial z}, B_0 \frac{\partial v_y}{\partial z}, 0 \right].
\end{aligned}$$

Vidíme, že rozpisy jednotlivých veličin se liší ve směru osy z a v rovině (x, y) . Naše výchozí rovnice dají:

Směr $\parallel (z)$

$$0 = \frac{\partial}{\partial z} \left[p + \frac{B_x^2 + B_y^2}{2\mu} \right]; \quad \frac{\partial B_0}{\partial t} = 0.$$

Z první rovnice plyne nezávislost celkového tlaku na souřadnici z , složku $B_z = B_0$ můžeme do pravé strany první rovnice klidně přidat, protože B_0 nezávisí na z . Podle druhé rovnice B_0 nezávisí ani na t a jde o skutečnou konstantu v čase i v prostoru. Pro celkový tlak platí

$$\Pi \equiv p + \frac{\mathbf{B}^2}{2\mu} = \Pi(t).$$

Směr $\perp (x, y)$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} &= \frac{1}{\mu \rho} B_0 \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial z}; \\
\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= B_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z}.
\end{aligned} \tag{4.166}$$

V kolmém směru je soustava rovnic lineární, aniž bychom byli nuceni linearizaci provádět. Obě rovnice jsou navíc triviálně splněny i ve směru osy z , protože zde jsou veličiny konstantní. Lze je tedy chápat jako výchozí soustavu rovnic pro vlnění v obou směrech. Jednoduchým vyloučením proměnných získáváme pro rychlostní i magnetické pole vlnové rovnice (stačí první rovnici derivovat podle času a za $\partial \mathbf{B} / \partial t$ dosadit z druhé rovnice nebo naopak derivovat podle času druhou rovnici a dosadit za $\partial \mathbf{v} / \partial t$ z rovnice první. Výsledek je

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{v_A^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{v} &= 0; \\
\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{v_A^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{B} &= 0; \quad v_A \equiv \frac{B_0}{\sqrt{\mu \rho}}.
\end{aligned} \tag{4.167}$$

Jde o vlnovou rovnici s charakteristickou rychlostí rovnou Alfvénově rychlosti. Nelineární MHD soustava rovnic pro případ ideálně vodivé nestlačitelné kapaliny bez tření poskytuje řešení ve tvaru obecné vlny libovolné amplitudy.

4.8.4. Solitony

V některých situacích poskytují nelineární rovnice velmi zajímavá řešení: osamocené vlny, které nepodléhají disperzi a šíří se beze změny tvaru prostředím. Takovou vlnu nazýváme soliton. Z matematického hlediska jsou solitony v nelineárních teoriích stejně důležité jako harmonický oscilátor v teoriích lineárních. Experimentálně byl soliton poprvé pozorován na úzkém vodním kanále (Union Canal v Hermistonu, poblíž Edinburghu) skotským vědcem Johnem Scottem Russelem v roce 1834. Teoreticky odvodili rovnice pro šíření vln na mělké vodě D. J. Korteweg a G. De Vries (KdV rovnice) v roce 1895.

Jaká je matematická podstata existence solitonů? V lineárních rovnicích můžeme skládat výsledné řešení z rovinných vlnoploch. Složený vlnový balík však téměř vždy podléhá *disperzi*. Různé vlnové délky se šíří různou rychlostí a balík se rozplývá. V nelineárních teoriích některé nelineární členy způsobují tzv. *modulární nestabilitu*, při které je grupová rychlost závislá na amplitudě balíku. Části s menší amplitudou jsou potlačovány a dochází ke kolapsu balíku.

V nelineárních teoriích může v některých případech dojít ke vzájemné kompenzaci obou jevů – disperze (rozplývání) a modulární nestability (kolapsu). Výsledkem je *soliton*, vlna stálého tvaru a velikosti šířící se prostředím.

Tři příklady

1. Nejprve zkoumejme disperzní relaci obyčejné vlnové rovnice

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \phi = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega = ck \quad \Rightarrow \quad v_f = v_g = c.$$

Úhlová frekvence je lineárně závislá na vlnovém vektoru, fázová a grupová rychlost jsou si rovny a jsou konstantní. Všechny vlnové délky se šíří stejnou rychlostí a vlnový balík nepodléhá disperzi.

2. Nyní uvažujme Kleinovu Gordonovu rovnici, která má navíc lineární člen (s koeficientem úměrným kvadrátu hmotnosti částice)

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \mu^2 \right) \phi = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega = c\sqrt{k^2 + \mu^2} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} v_f &= c f(k), \\ v_g &= c/f(k); \\ f(k) &= \sqrt{1 + (\mu/k)^2}. \end{aligned}$$

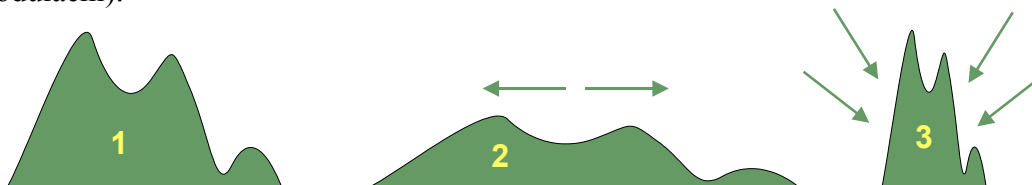
Fázová i grupová rychlost je závislá na vlnovém vektoru a tedy na vlnové délce ($k = 2\pi/\lambda$) a vlna podléhá disperzi. Vlnový balík se postupně rozplývá. Jsou-li jeho

lineární rozměry l , mění se podle vztahu $\Delta l = \frac{\partial l}{\partial t} \Delta t \approx \Delta v_g \Delta t = \frac{\partial v_g}{\partial k} \Delta k \Delta t \approx \frac{\partial v_g}{\partial k} \frac{2\pi}{l} \Delta t$.

3. Doplňme nyní naopak k vlnové rovnici nelineární člen

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \phi + \gamma \phi^3 = 0.$$

Rovnice je nelineární a jejím řešením již není rovinná vlna, ani nelze řešení z rovinných vln skládat. Z numerického řešení je známo, že rovnice podléhá *modulační nestabilitě*, části vlnového balíku kolabují v závislosti na amplitudě (amplituda = modul, odtud modulační).



Tvar řešení pro výše uvedené příklady 1, 2 a 3.

Právě nelinearity mohou vyrovnat disperzi a rovnice, která obsahuje oba členy

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \phi - \mu^2 \phi + \gamma \phi^3 = 0, \quad (4.168)$$

poskytuje solitonová řešení. Přidané dva členy jsou silové členy odpovídající potenciálu koňakové lahve (TF1).

Lagrangeův formalismus

Pro spojitě prostředí je třeba používat namísto Lagrangeovy funkce L hustotu Lagrangeovy funkce \mathcal{L} , obdobně hustotu energie \mathcal{E} a hustotu hybnosti \mathcal{P} . Všechny veličiny jsou namísto funkcí času t funkcemi události (t, \mathbf{x}) . Časové derivace hledaného pole $\phi(t, \mathbf{x})$ označíme

$$\phi_t \equiv \frac{\partial \phi}{\partial t}; \quad \phi_x \equiv \frac{\partial \phi}{\partial x}; \quad \phi_y \equiv \frac{\partial \phi}{\partial y}; \quad \phi_z \equiv \frac{\partial \phi}{\partial z}.$$

Pole ϕ může mít význam teploty, hustoty nebo jiné fyzikální veličiny. V následující tabulce jsou porovnány základní vztahy pro zobecněné souřadnice a pro spojitě proměnné (pole):

hledaná funkce	$q(t)$	$\phi(t, \mathbf{x})$
Lagrangeova funkce	$L = L(t, q, \dot{q})$	$\mathcal{L} = \mathcal{L}(t, \phi, \phi_t, \phi_x, \phi_y, \phi_z)$
Integrál akce	$S = \int L dt$	$S = \int \mathcal{L} d^3x dt$
Lagrangeovy rovnice	$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$	$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_t} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_x} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_y} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_z} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0$
Energie systému	$E = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{q} - L$	$\mathcal{E} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_t} \phi_t - \mathcal{L}$
Hybnost systému	$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$	$\mathcal{P} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_t}$

V dalším přehledu naleznete \mathcal{L} , \mathcal{E} a odpovídající rovnice pro vlnovou rovnici, K-G rovnici a K-G rovnici s nelineárním členem (v 1D proměnných t, x):

Vlnová rovnice:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2c^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0;$$

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2c^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2.$$

Kleinova-Gordonova rovnice:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2c^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 - \frac{\mu^2 \phi^2}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \mu^2 \phi = 0;$$

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2c^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \frac{\mu^2 \phi^2}{2}.$$

Kleinova-Gordonova rovnice s nelineárním členem ϕ^3 :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2c^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 - \frac{\mu^2 \phi^2}{2} + \gamma \frac{\phi^4}{4} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \mu^2 \phi + \gamma \phi^3 = 0;$$

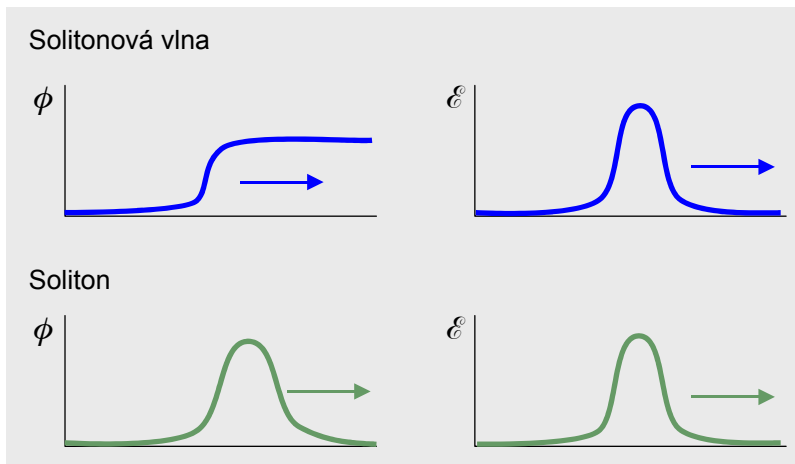
$$\mathcal{E} = \frac{1}{2c^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 - \gamma \frac{\phi^4}{4} + \frac{\mu^2 \phi^2}{2}.$$

Ve všech třech případech má hustota energie tvar součtu členu s derivacemi (obdoba kinetické energie) a členů bez derivací (obdoba potenciální energie). V posledním případě hraje úlohu potenciální energie potenciál koňakové lahve.

Definice solitonové vlny a solitonu

U K-G rovnice s nelineárním členem ϕ^3 je známo řešení ve tvaru šířícího se schodu. Nejde o soliton v pravém slova smyslu, řešení není lokalizované, tj. dosti daleko od vlny není pole nulové. Průběh hustoty energie ale již lokalizovaný je. Hustota energie je soustředěna v oblasti schodu a přesouvá se jako balík prostorem. Tomuto typu řešení se říká *solitonová vlna*.

Řešení, které je lokalizované v prostoru, pohybuje se nějakou rychlostí, nemění svůj tvar a při srážce s jinými obdobnými řešeními dojde maximálně ke změně fáze se nazývá *soliton*. Hustota energie je v prostoru lokalizována automaticky.



Definice: Soliton je lokalizované řešení parciální diferenciální rovnice, které se pohybuje nějakou rychlostí a nemění svůj tvar. Je-li před srážkou N solitonů hustota energie

$$\mathcal{E}(t, \mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N \mathcal{E}_0(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{0i} - ct),$$

potom po srážce se nemění počet solitonů ani jejich tvar. Změnit se může jedině fáze jednotlivých balíků, tj. po srážce musí platit:

$$\mathcal{E}(t, \mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N \mathcal{E}_0(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{0i} - ct + \delta_i).$$

Hledání solitonových řešení

Při hledání solitonového řešení můžeme využít faktu, že soliton při pohybu nemění svůj tvar. V souřadnicové soustavě spojené se solitonem jde tedy o stacionární (v čase neproměnné) řešení. Sledujeme-li navíc pohyb jen v jedné prostorové dimenzi, přejde parciální diferenciální rovnice na obyčejnou diferenciální rovnici, která může být v některých případech řešitelná. Po nalezení řešení soustavě pohybující se spolu se solitonem musíme řešení přetransformovat do souřadnicové soustavy, ve které se soliton pohybuje.

4.8.5. Některá solitonová řešení

V této kapitole si ukážeme typická solitonová řešení, na které vede řada fyzikálních problémů. Při úpravách parciálních diferenciálních rovnic v mnoha případech dojdeme k jedné ze čtyř typických rovnic: sin-Gordonově rovnici, KdV, NLS nebo Burgersově rovnici.

sin-Gordonova rovnice (sine-Gordon equation)

Jako velmi častá rovnice pro problémy s periodicky se měnícím potenciálem vychází vlnová rovnice se sinem na pravé straně:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \mu^2 \sin \phi \quad (4.169)$$

Podobnou problematiku jsme řešili v kapitole 1.5.2., kde jsme zkoumali pohyb částice v periodickém potenciálu, síla byla dána právě sinem polohy částice.

Provedeme-li rozvoj pravé strany do prvního řádu ($\sin \phi \sim \phi$), dostaneme přesně Klein-Gordonovu rovnici. Proto je koeficient na pravé straně označen μ^2 . Provedeme-li rozvoj do třetího řádu ($\sin \phi \sim \phi - \phi^3/3!$), dostaneme KG rovnici s nelineárním členem ϕ^3 , která odpovídá potenciálu koňakové lahve. Budeme hledat řešení celé rovnice.

Najdeme řešení nejprve v souřadnicové soustavě spojené s pohybujícím se solitonem či solitonovou vlnou. Vzhledem k tomu, že soliton nemění tvar a pohybuje se konstantní rychlostí, bude řešení stacionární a stačí řešit rovnici

$$\frac{d^2 \phi}{dx^2} = \mu^2 \sin \phi \quad \Rightarrow \quad \phi(x) = 4 \arctan \left[e^{\pm \mu x} \right].$$

Je velmi pěkným logickým cvičením dokázat, že uvedená funkce je řešením rovnice. Můžeme buď přímo dvakrát derivovat uvedené řešení nebo derivovat z něho plynoucí vztah $\operatorname{tg}(\phi/4) = \exp(\pm \mu x)$, vypočítat první derivaci a tu opět derivovat. Vzniklé první derivace a exponenciály vyloučíme z předchozích vztahů.

Nyní nalezené řešení přetransformujeme do laboratorní souřadnicové soustavy, ve které se soliton pohybuje rychlostí u .

$$\phi_{\pm}(t, x) = 4 \operatorname{arctg} \left[\exp \left[\pm \mu \gamma (x - x_0 - ut) \right] \right] ; \quad \gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}. \quad (4.170)$$

Vztahy (4.170) jsou řešením rovnice (4.169) a jde o je solitonové vlny. Pro úplnost uvedme vztah pro hustotu Lagrangeovy funkce a pro hustotu energie

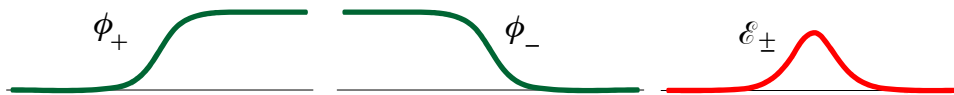
$$\mathcal{L} = \frac{1}{2c^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \cos \phi, \quad (4.171)$$

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2c^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 - \cos \phi.$$

Pro nalezené řešení je hustota energie

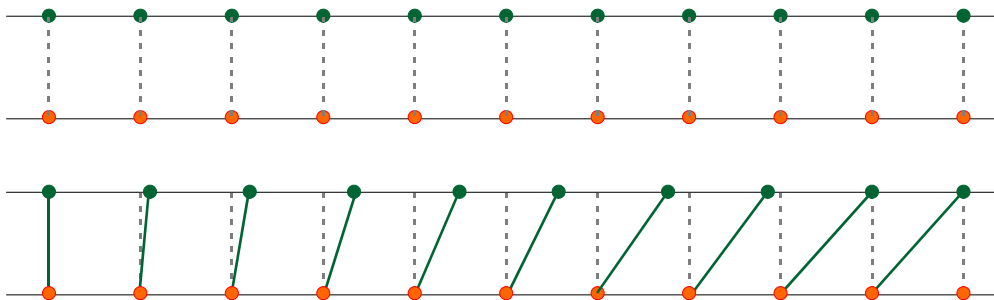
$$\mathcal{E}_{\pm}(t, x) = 8\mu^2 \gamma^2 (1 + u^2 / c^2) \exp[\pm \mu \gamma (x - x_0 - ut)] / \{1 + \exp[\pm \mu \gamma (x - x_0 - ut)]\}^2 - \cos \{4 \operatorname{arctg}[\exp[\pm \mu \gamma (x - x_0 - ut)]]\}. \quad (4.172)$$

Obě schodovitá řešení ϕ i průběh hustoty energie \mathcal{E} je na následujícím obrázku:



Jaké konkrétní fyzikální teorie vedou na sin-Gordonovu rovnici?

Dislokace v krystalech: Představme si krystal složený ze dvou řetězců atomů, jeden je pevně dán (na obrázku dolní) a druhý (na obrázku horní) je pohyblivý v periodickém poli prvního řetězce s potenciálem $V(x) = A[1 - \cos(2\pi x / a)]$, a je mřížková konstanta. Problém vede na sin-Gordonovu rovnici pro odchylku od rovnovážné polohy



Řešení (4.170) odpovídá dislokaci v krystalu pohybující se podél krystalu. Řešení se postupně mění z nulové odchylky od rovnovážné polohy na odchylku o jednu mřížkovou konstantu a . Energie dislokace je lokalizována v oblasti změny. Jde o klasický příklad *solitonové vlny*.

Josephsonův jev (průchod proudu vrstvou oddělující dva supravodiče) vede také na sin-Gordonovu rovnici. Průchod solitonové vlny nesupravodivou vrstvou znamená průchod kvanta magnetického toku ϕ_0 z jedné strany supravodiče spojem na druhou stranu.

Šíření laserového pulsu dvouhladinovým prostředím (například prostředím s atomy, které mají dvě energetické hladiny) vede opět na sin-Gordonovu rovnici a řešení ve tvaru solitonové vlny má význam zesilovače pulsu (ϕ_+ , stimulovaná emise při inverzním obsazení hladin) nebo zeslabovače pulsu (ϕ_- , rezonanční absorpce).

Kortewegova de Vriesova rovnice (KdV)

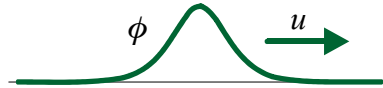
Korteweg de Vriesova rovnice je první objevenou rovnicí u které bylo nalezeno solitonové řešení. D. J. Korteweg a G. De Vries rovnici odvodili při hydrodynamickém popisu vln na mělké vodě:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \alpha \phi \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} = 0. \quad (4.173)$$

Rovnice obsahuje lineární člen se třetí prostorovou derivací, který je zodpovědný za disperzi a nelineární člen, který pomocí modulační nestability kompenzuje vliv disperze. Jedno ze známých řešení má tvar solitonu pohybujícího se rychlostí u :

$$\phi(t, x) = \frac{3u}{\alpha} \operatorname{ch}^{-2} \left[\frac{\sqrt{u}}{\alpha} (x - x_0 - ut) \right] \quad (4.174)$$

Řešení je lokalizované jak v proměnné ϕ tak v hustotě energie \mathcal{E} a jde o klasický soliton.



Jaké konkrétní fyzikální teorie vedou na KdV rovnici?

Vlny na mělké vodě. Pro vlny na mělké vodě byla KdV rovnice původně odvozena a stala se první teorií k pozorování solitonu na plavebním kanálu poblíž Edingburghu (J. S. Russel, 1834).

Langmuirův soliton: MHD rovnice lze přepsat za určitých předpokladů na KdV rovnici pro hustotu energie elektrického pole. Jde o plazmové oscilace na plazmové frekvenci elektronů, které se lokalizují v oblasti izolované od okolí. Vzniká tak hustotní dutina zaplněná vysokofrekvenčním polem, ve které je koncentrace plazmatu snížena podle vztahu

$$\frac{\delta n}{n} \sim \frac{\varepsilon E^2 / 2}{2nkT}$$

Proto se někdy říká Langmuirovu solitonu *well* (dutina, studna). Samo elektrické pole (obálka) splňuje vztah

$$E(x) \sim E_0 \operatorname{ch}^{-1}(k_0 x); \quad w(x) = \varepsilon E^2 / 2 \sim E_0^2 \operatorname{ch}^{-2}(k_0 x)$$

Soliton může oscilovat a generovat nízkofrekvenční iontově akustické vlny. Naopak, Langmuirův soliton může na dlouhých vlnových délkách nasávat energii z iontově akustických vln pomocí tzv. parametrické nestability. Na krátkých vlnových délkách energii ztrácí Landauovým útlumem. Může tak dojít ke stacionárnímu toku energie v k prostoru. Soliton komunikující energeticky s okolím se nazývá disipativní soliton. Langmuirovy solitony zpravidla vznikají při rozpadu Langmuirových (plazmových) oscilací.

Sacharovovy-Kuznětzovy rovnice (Zakharov Kuznets equations, ZK)

Některé fyzikální problémy, zejména v kvantové teorii, chemii a fyzice plazmatu vedou na dvojici rovnic (v bezrozměrném tvaru)

$$\begin{aligned} i \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} &= \phi \psi; \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 (\phi^2)}{\partial x^2}. \end{aligned} \quad (4.175)$$

Konkrétně popis nestabilit v elektronovém svazku či popis Langmuirových vln v plazmatu vede právě na tuto soustavu. Veličina ϕ odpovídá elektrickému poli a veličina ψ odchylce koncentrace iontů od rovnovážné polohy. Elektrické pole splňuje Schrödingerovu rovnici s nelineárním zdrojovým členem daným perturbací koncentrace iontů. Ta naopak splňuje vlnovou rovnici s ponderomotorickým zdrojovým členem (druhou derivací kvadrátu elektrického pole) na pravé straně. Soustava má známé solitonové řešení (Davydovův soliton)

$$\phi(t, x) = \sqrt{2(1-u^2)\omega} \operatorname{sech}[\sqrt{\omega}(x-ut)] \exp\left[i\frac{ux}{2} - i\left(\frac{u}{2}\right)^2 t + i\omega t + i\delta\right]; \quad (4.176)$$

$$\psi(t, x) = -2\omega \operatorname{sech}^2[\sqrt{\omega}(x-ut)].$$

Parametry řešení jsou rychlost pohybu solitonu u , fázový posun δ a škálovací parametr ω . Sacharovovy-Kuzněcovy rovnice lze za jistých předpokladů zjednodušit buď na NLS rovnici (dále) nebo na KdV rovnici, kdy Davydovův soliton přechází v Langmuierův soliton.

NLS (Non Linear Schrödinger equation)

Řada problémů z kvantové teorie, ale i z jiných fyzikálních oborů (fyzika plazmatu, Langmuirovy oscilace, nelineární optika) vede na nelineární Schrödingerovu rovnici

$$i\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \sigma_d \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + 2\sigma_n\phi|\phi|^2 = 0 \quad (4.177)$$

Koeficient σ_d určuje typ disperze NLS, podle hodnoty dělíme NLS na tři případy:

- $\sigma_d = +1$: eliptická NLS,
- $\sigma_d = -1$: hyperbolická NLS,
- $\sigma_d = 0$: (1+1)D NLS.

Poslední člen reprezentuje nelinearitu, v uvedeném případě kubickou, může být však i složitější. Hodnota koeficientu σ_n určuje typ modulační nestability:

- $\sigma_n = +1$: fokusující,
- $\sigma_n = -1$: defokusující.

Uvedme řešení pro fokusující (1+1)D NLS, kdy vzniká Davydovův soliton tvaru

$$\phi(t, x) = \sqrt{\omega} \operatorname{sech}[\sqrt{\omega}(x-ut-x_0)] \exp\left[i\frac{ux}{2} - i\left(\frac{u}{2}\right)^2 t + i\omega t + i\delta\right],$$

který je shodný s řešením ZK rovnic, které lze na (1+1)D NLS převést.

Burgersova rovnice

Další ze známých rovnic poskytujících solitonové řešení je rovnice

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\phi^2) - \eta \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = 0. \quad (4.178)$$

Tvarově jde o Navierovu-Stokesovu rovnici $\partial v/\partial t + v\partial v/\partial x = \eta \partial^2 v/\partial x^2$.

Poznámka: Klasické solitonové řešení se v mnoha případech po určité době přetváří na *solitonový balík (train)* – postupující balík vln, který nemění svůj tvar. Blízké solitonům jsou také *pulsující řešení (breath)*, kde osamocená vlna mění sice tvar, ale pravidelně se vrací do tvaru původního, jakoby dýchá.

4.8.6. Landauův útlum

V kapitole 4.3.3. jsme se zabývali plazmovými vlnami, které jsou způsobeny rychlou reakcí elektronů na plazmové frekvenci. Vlny a oscilace byly tvořeny elektrickým polem a k jejich vzniku nebylo třeba žádné klidové magnetické pole. Disperzní relace, kterou jsme získali z tekutinového modelu byla reálná a vlny nevykazovaly žádný útlum.

Ve skutečnosti i v lineární teorii dochází k útlumu vln, který souvisí se statistickým chováním částic. Tento útlum se nazývá *Landauův útlum* a není možné ho odvodit z tekutinového modelu, kdy je Boltzmannova rovnice vystředována přes momenty rychlosti a část informace

se ztrácí. K odvození musí být použita Boltzmannova rovnice pro rozdělovací funkci elektronů. Samotný útlum se projevuje i bez přítomnosti srážek a proto lze využít Vlasovovu rovnici (bez srážkového členu).

Odvození je možné vést v plné obecnosti i s přítomností magnetického pole, není to však nutné. Předpokládejme, že plazmová vlna vzniká v ose x a pohyb elektronů je kontrolován jen elektrickým polem v této ose. Potom stačí řešit rovnici pro rozdělovací funkci elektronů a rovnici pro elektrické pole:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} - \frac{e}{m} \mathbf{E} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} &= 0, \\ \operatorname{div} \mathbf{E} &= -\frac{en}{\varepsilon_0}, \end{aligned} \quad (4.179)$$

$$n(t, \mathbf{x}) = \int f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) d^3 \mathbf{v}.$$

Poznamenejme, že rychlost \mathbf{v} zde nemá význam vystředované rychlosti proudění, ale význam fázové proměnné, $f = f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})$. Rychlost proudění by byla dána vztahem

$$\mathbf{u} = \langle \mathbf{v} \rangle = \frac{\int \mathbf{v} f d^3 \mathbf{v}}{\int f d^3 \mathbf{v}} = \frac{\int \mathbf{v} f d^3 \mathbf{v}}{n(t, \mathbf{x})}.$$

Jako první krok provedeme linearizaci výchozích rovnic (4.179) pomocí perturbací

$$f = f_0 + \delta f; \quad \mathbf{E} = \delta \mathbf{E}; \quad n = n_0 + \delta n. \quad (4.180)$$

Nulové řešení budeme předpokládat klidové homogenní (nezávislé na t, \mathbf{x}), rozdělovací funkci f_0 za Gaussovu. Výsledek linearizace je v prvním řádu

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \delta f}{\partial \mathbf{x}} - \frac{e}{m} \delta \mathbf{E} \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}} &= 0, \\ \operatorname{div} \delta \mathbf{E} &= -\frac{e \delta n}{\varepsilon_0}, \end{aligned} \quad (4.181)$$

$$\delta n(t, \mathbf{x}) = \int \delta f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) d^3 \mathbf{v}.$$

Předpokládejme nyní existenci perturbací ve tvaru vlny ve směru osy x ($Ae^{i(kx - \omega t)}$). Celý problém budeme zjednodušeně řešit jen v jedné dimenzi (na závěr se zmíníme o vlivu plného 3D řešení na výsledek):

$$\begin{aligned} -i\omega \delta f + i v_x k \delta f - \frac{e}{m} \delta E_x \cdot \frac{d f_0}{d v_x} &= 0, \\ ik \delta E_x &= -\frac{e \delta n}{\varepsilon_0}, \end{aligned} \quad (4.182)$$

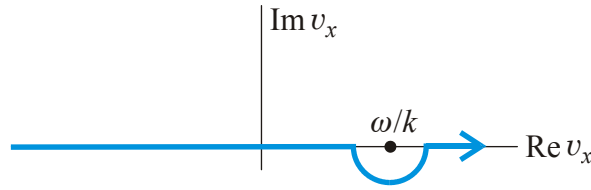
$$\delta n(t, x) = \int \delta f(t, x, v_x) d v_x.$$

Do poslední rovnice dosadíme za δn z druhé rovnice a za δf z první rovnice. Výsledkem je disperzní relace (přes zbylé složky rychlosti lze integrovat):

$$k = -\frac{e^2}{m \varepsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d f_0 / d v_x}{\omega - k v_x} d v_x \quad (4.183)$$

Hlavním problémem je pól prvního řádu v hodnotě $v_x = \omega/k$. Integrační cestu nelze uzavřít v horní ani dolní komplexní polorovině, protože integrand v nekonečnu na imaginární ose

nekonverguje k nule (jde o Boltzmannovo rozdělení $\exp[-\alpha v^2]$). Z komplexní analýzy je známo, že správná integrační cesta má tvar podle obrázku:



Pro tuto cestu je integrál z komplexní funkce F roven

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(x) dx = I_1 + I_2 = V.P. \left(\int_{-\infty}^{+\infty} F(x) dx \right) + \pi i \cdot \text{Residuum}(F)$$

První část je tzv. hlavní Cauchyova hodnota ($V.P.$) a počítá se tak, jako by funkce byla reálná a pól neexistoval, tedy integrace v limitě, kdy obě meze rostou k nekonečnu. V našem případě nejprve provedeme integraci per partes:

$$I_1 \equiv V.P. \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d f_0 / d v_x}{\omega - k v_x} d v_x \right) \stackrel{\text{p. part.}}{=} \left[\frac{f_0}{\omega - k v_x} \right]_{-\infty}^{+\infty} - k \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_0 d v_x}{(\omega - k v_x)^2} = -\frac{k}{\omega^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_0 d v_x}{\left(1 - \frac{k v_x}{\omega}\right)^2}.$$

Výsledný integrál není analyticky řešitelný, proto při výpočtu využijeme rozvoj integrované funkce do druhého řádu (další členy můžeme zanedbat pro fázové rychlosti ω/k velké ve srovnání s tepelnou rychlostí částic v_x nebo pro dostatečně vysoké frekvence):

$$\begin{aligned} I_1 &\approx -\frac{k}{\omega^2} \int_{-\infty}^{+\infty} f_0 \left[1 + 2 \left(\frac{k v_x}{\omega} \right) + 3 \left(\frac{k v_x}{\omega} \right)^2 + \dots \right] d v_x = \\ &= -\frac{k}{\omega^2} n_0 \left[1 + 2 \left(\frac{k}{\omega} \right) \langle v_x \rangle + 3 \left(\frac{k}{\omega} \right)^2 \langle v_x^2 \rangle + \dots \right] = \\ &= -\frac{k n_0}{\omega^2} \left[1 + 3 \frac{k^2}{\omega^2} \frac{k_B T_e}{m_e} + \dots \right] \end{aligned}$$

Integrály tohoto typu z Boltzmannova rozdělení byly řešeny ve statistické fyzice. Nyní je třeba najít druhou část, která je πi násobkem rezidua integrované funkce v singularitě. Derivaci Boltzmannova rozdělení podle rychlosti provedeme také snadno:

$$I_2 = \pi i \cdot \text{Res} \left(\frac{d f_0 / d v_x}{\omega - k v_x} \right) = -\frac{\pi i}{k} \cdot \text{Res} \left(\frac{d f_0 / d v_x}{v_x - \omega/k} \right) = -i \frac{\pi}{k} \frac{d f_0}{d v_x} \Big|_{\frac{\omega}{k}} = i \frac{\pi}{k} \frac{m_e}{k_B T_e} \frac{\omega}{k} f_0(\omega/k).$$

V posledním výrazu jsme provedli derivaci Boltzmannova rozdělení. Nyní obě vypočtené části integrálu dosadíme do disperzní relace (4.183):

$$k = -\frac{e^2}{m_e \epsilon_0} [I_1 + I_2] = -\frac{e^2}{m_e \epsilon_0} \left[-\frac{k n_0}{\omega^2} \left(1 + 3 \frac{k^2}{\omega^2} \frac{k_B T_e}{m_e} + \dots \right) + i \frac{\pi m_e \omega}{k^2 k_B T_e} f_0(\omega/k) \right].$$

Po triviální úpravě získáme disperzní rovnici ve tvaru

$$\omega^2 = \omega_{pe}^2 + 3 \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} v_t^2 k^2 + \dots - i \frac{\pi \omega_{pe}^2 \omega^3}{n_0 v_t^2 k^3} f_0(\omega/k), \quad (4.184)$$

kde jsme označili

$$\omega_{pe}^2 \equiv \frac{n_0 e^2}{m_e \epsilon_0}; \quad v_t^2 \equiv \frac{k_B T_e}{m_e}.$$

První člen disperzní relace představuje nám již známé plazmové oscilace. Druhý člen je způsoben tepelnými procesy a je-li malý oproti prvnímu, lze v něm psát $\omega \sim \omega_{pe}$ a přejde ve známý druhý člen disperzní relace plazmových vln. Poslední člen je zcela nový a reprezentuje Landauův útlum, zpravidla je oproti oběma prvním členům velmi malý.

Toho můžeme využít při odmocnění výrazu (4.184):

$$\begin{aligned} z &= a + ib; & b \ll a; & \Rightarrow \\ z &= A \exp[i\varphi]; & A = \sqrt{a^2 + b^2} \sim a; & \quad \varphi = \operatorname{arctg}(b/a) \approx \frac{b}{a} \Rightarrow \\ z &\approx a \exp\left[i\frac{b}{a}\right] & \Rightarrow & \quad \sqrt{z} \approx \sqrt{a} \cos\left(\frac{b}{2a}\right) + i\sqrt{a} \sin\left(\frac{b}{2a}\right) \approx \sqrt{a} + i\frac{b}{2\sqrt{a}}. \end{aligned}$$

Výsledná frekvence bude (imaginární část odpovídající b ve výrazu (4.184) je záporná)

$$\omega \approx \omega_0 - i \frac{\pi}{2n_0 v_t^2} \frac{\omega^3 \omega_{pe}^2}{\omega_0 k^3} f_0(\omega/k); \quad \omega_0 \equiv \sqrt{\omega_{pe}^2 + 3 \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} v_t^2 k^2 + \dots}. \quad (4.185)$$

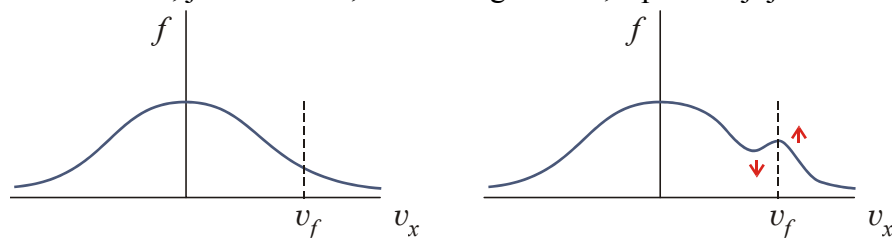
Kdybychom problém řešili ve třech dimenzích, zůstaly by všude integrace přes celý rychlostní prostor. Integraci lze provést ve válcových souřadnicích

$$\mathbf{v} = u \mathbf{e}_x + w \sin \varphi \mathbf{e}_y + w \cos \varphi \mathbf{e}_z; \quad u \in (-\infty, +\infty); \quad w \in (0, \infty); \quad \varphi \in (0, 2\pi).$$

Výsledek se bude lišit u Landauova útlumu koeficientem 2π .

Fyzikální interpretace Landauova útlumu

Ze vztahu (4.185) je zřejmé, že imaginární část frekvence je záporná a jedná se skutečně o útlum. Odvození útlumu Landauem v *bezesrážkovém* plazmatu za pomoci integrace funkce komplexní proměnné bylo velkým překvapením. Později byl útlum nalezen experimentálně. Plazmová vlna je tlumena, aniž by docházelo ke srážkám částic. Podobně jako surfař surfuje na vodní hladině, můžeme si zjednodušeně představit elektrony surfující na plazmové vlně elektrického pole. Elektrony s příliš malou rychlostí se na vlně pohupují a nevyměňují s ní energii. Podobně elektrony s příliš velkou rychlostí nevyměňují s vlnou energii. Jen elektrony s rychlostí blízkou fázové rychlosti plazmové vlny (oblast pólu při integraci) intenzivně s vlnou vyměňují energii. Podobně jako surfař jsou elektrony nesený vlnou. Pokud jejich rychlost byla nepatrně nižší než fázová, získávají energii na úkor vlny. Pokud je jejich rychlost vyšší než fázová, jsou bržděny, svou energii ztrácejí, a předávají ji vlně.



Podle Boltzmannova rozdělení je statisticky více elektronů s nižší rychlostí než elektronů s vyšší rychlostí. Tím převládá proces tlumení vlny, sání energie z ní. To je přibližná podstata Landauova útlumu. Boltzmannovo rozdělení je deformováno, vzniká perturbace způsobující sekundární pík (právě ten jsme počítali jako δf). Na rozdělení rychlostí se objevují dvě maxima, což ve výsledku vede k dvojsvazkové (Bunemannově nestabilitě). Pro velmi nízké fázové rychlosti plazmové vlny je možný i Landauův útlum způsobený ionty.

4.9. STRUKTURA MAGNETICKÝCH POLÍ

4.9.1. Helikální struktury

V plazmových vláknech se často pozorují typické spirálovité útvary. Nacházejí se v laboratorním i kosmickém plazmatu, v pinčích i v kometárních ohonech. V matematice se pro podobně strukturovaná pole zavádí pojem helicity.

Helicita a Beltramova podmínka

Hustota helicity vektorového pole \mathbf{V} se definuje jako

$$H(t, \mathbf{x}) \equiv \mathbf{V} \cdot \text{rot } \mathbf{V} , \quad (4.186)$$

helicitou potom rozumíme integrál

$$K(t) = \int_V H(t, \mathbf{x}) dV . \quad (4.187)$$

Helicita je skalární veličina charakterizující helikálnost (spirálovitost) silokřivek pole. Je nulová pro všechna pole splňující podmínku nevířivosti ($\text{rot } \mathbf{V} = 0$) a také pro všechny víry s kruhovými proudnicemi. Pole s helikální strukturou mají helicitu úměrnou $\cos \beta$ (β - úhel stoupání spirály). Pro plazmová vlákna popisovaná v rámci MHD teorie může být důležitá hustota helicity vektorového potenciálu \mathbf{A} , magnetického pole \mathbf{B} , proudové hustoty \mathbf{j} , elektrického pole \mathbf{E} a proudového pole \mathbf{v} :

$$\begin{aligned} H_A &= \mathbf{A} \cdot \text{rot } \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} , \\ H_B &= \mathbf{B} \cdot \text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} \cdot \mathbf{B} , \\ H_j &= \mathbf{j} \cdot \text{rot } \mathbf{j} = -\frac{1}{\mu_0} \mathbf{j} \cdot \Delta \mathbf{B} , \\ H_E &= \mathbf{E} \cdot \text{rot } \mathbf{E} = -\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} , \\ H_v &= \mathbf{v} \cdot \text{rot } \mathbf{v} . \end{aligned} \quad (4.188)$$

Zabývejme se nyní poli, která splňují Beltramovu podmínku (tzv. Beltramova pole)

$$\mathbf{V} \times \text{rot } \mathbf{V} = 0 , \quad \text{neboli} \quad \text{rot } \mathbf{V} = \alpha \mathbf{V} . \quad (4.189)$$

Koeficient úměrnosti mezi rotací pole a polem samým se může měnit v čase i v prostoru. Beltramovo pole je vždy helikální, protože platí

$$H \equiv \mathbf{V} \cdot \text{rot } \mathbf{V} = \alpha \mathbf{V} \cdot \mathbf{V} = \alpha V^2 . \quad (4.190)$$

Koeficient úměrnosti α je helicity pole dělená kvadrátem jeho velikosti. Je-li navíc koeficient α konstantní a pole je nevířivé ($\text{div } \mathbf{V} = 0$), potom pole splňuje Helmholtzovu rovnici

$$\Delta \mathbf{V} + \alpha^2 \mathbf{V} = 0 . \quad (4.191)$$

To je vidět po aplikaci rotace na rovnici (4.189). Vektor \mathbf{V} je v tomto případě vlastním vektorem Laplaceova operátoru v odpovídající geometrii.

Typickým příkladem Beltramových polí jsou tzv. ABC toky:

$$\mathbf{V} = (A \sin z + C \cos y, B \sin x + A \cos z, C \sin y + B \cos x) . \quad (4.192)$$

Pro pole tohoto typu platí $\text{rot } \mathbf{V} = \mathbf{V}$ a $\Delta \mathbf{V} = -\mathbf{V}$. V ABC tocích existují chaotické oblasti.

Ve fyzice plazmatu se často uvažují bezsilové konfigurace, ve kterých míří proudová hustota ve směru magnetického pole $\mathbf{j} \parallel \mathbf{B}$ (tzv. Birkelandovy proudy). V tomto případě je hustota Lorentzovy síly $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$ nulová. Konfigurace má nejnižší možnou energii a disipativní plazma se

k této konfiguraci vždy postupně blíží. Magnetické pole v bezsilové konfiguraci splňuje Beltramovu podmínku. Snadno to ukážeme z Ampérova zákona:

$$\mathbf{j} = \text{rot } \mathbf{B} / \mu_0 \wedge \mathbf{j} \parallel \mathbf{B}, \quad \Rightarrow \quad \mathbf{B} \times \text{rot } \mathbf{B} = 0, \quad \text{resp.} \quad \text{rot } \mathbf{B} = \alpha \mathbf{B}. \quad (4.193)$$

Magnetické pole v bezsilové konfiguraci je proto vždy helikální.

Zachování magnetické helicity

Podmínky zachování magnetické helicity řešil Michal Stránský ve své diplomové práci a následující text je upraveným výňatkem z přehledové části této práce. Integrovaná helicity pro vektorový potenciál magnetického pole je definována jako

$$K = \int \mathbf{A} \cdot \text{rot } \mathbf{A} \, dV = \int \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \, dV \quad (4.194)$$

Úplná časová derivace vede na výraz

$$\frac{dK}{dt} = \int_V \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) dV + \int_S (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})(\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) \, dS. \quad (4.195)$$

V klasické magnetohydrodynamice splňuje magnetické pole rovnici

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \eta_M \Delta \mathbf{B} + \text{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{B}); \quad \eta_M \equiv \frac{1}{\sigma \mu_0}. \quad (4.196)$$

První člen je difúze, druhý člen zamrzání magnetických silokřivek. V ideálním plazmatu je vodivost vysoká a difúzní (disipativní) člen je zanedbatelný. Magnetické silokřivky jsou vmrzlé do plazmové tekutiny. Rovnice pro vývoj magnetického pole má jednoduchý tvar

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \text{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (4.197)$$

V tomto případě je druhý člen v (4.195) roven

$$\begin{aligned} \int_V \mathbf{A} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \, dV &= - \int_V \text{div}[\mathbf{A} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B})] \, dV + \int_V (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \text{rot } \mathbf{A} \, dV = \\ &= - \int_V \text{div}[\mathbf{A} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B})] \, dV + \int_V (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{B} \, dV = - \int_V \text{div}[\mathbf{A} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B})] \, dV = \\ &= - \int_V \text{div}[\mathbf{A} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B})] \, dV = - \int_S [(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{v})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{n})] \, dS. \end{aligned}$$

Má-li uvažovaný systém uzavřené magnetické silokřivky (aby to byla pravda, musí být systém dostatečně rozlehlý), je normálová složka $\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}$ magnetického pole na povrchu nulová a tím je nulový i poslední člen výrazu. Zbylý nenulový člen vynuluje poslední člen v rovnici (4.195) a proto platí

$$\frac{dK}{dt} = \int_V \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \cdot \mathbf{B} \, dV. \quad (4.198)$$

Časovou derivaci vektorového potenciálu určíme z rovnice pro elektrické pole

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (4.199)$$

a následně dosadíme do rovnice (4.198):

$$\frac{dK}{dt} = - \int_V (\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} + \nabla \phi \cdot \mathbf{B}) \, dV = - \int_V \text{div}(\phi \mathbf{B}) \, dV = - \int_S \phi (\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}) \, dS = 0. \quad (4.200)$$

Integrovaná helicity se zachovává za těchto podmínek:

1. Zanedbatelná difúze magnetického pole (vysoká vodivost, nulový odpor)

2. Nulová normálová složka magnetického pole na povrchu systému (uzavřené magnetické silokřivky).

Disipace magnetické helicity

Má-li systém uzavřené magnetické silokřivky (nulovou normálovou složku magnetického pole na povrchu), jsou jedinou cestou jak změnit helicitu pole disipativní procesy. Odhadněme nyní úlohu difúzního členu v rovnici (4.196). Provedeme-li krok za krokem odvození uvedené výše s nezanedbaným difúzním členem, dostaneme jednoduchý vztah

$$\frac{dK}{dt} = -\frac{1}{\sigma} \int_V \mathbf{j} \cdot \mathbf{B} dV \quad (4.201)$$

Energie magnetického pole je dána vztahem

$$W_M = \frac{1}{2\mu_0} \int_V B^2 dV. \quad (4.202)$$

Časová derivace je

$$\frac{dW_M}{dt} = \frac{1}{\sigma} \int_V j^2 dV \quad (4.203)$$

K dalšímu výpočtu využijeme Schwartzovu nerovnost (viz TF2) na prostoru L^2 :

$$|\langle \mathbf{j} | \mathbf{B} \rangle| \leq \|\mathbf{j}\| \cdot \|\mathbf{B}\| \quad \Rightarrow \quad \left| \int \mathbf{j} \cdot \mathbf{B} dV \right| \leq \sqrt{\int j^2 dV} \sqrt{\int B^2 dV}.$$

Okamžitě tak získáme odhad

$$\left| \frac{dK}{dt} \right| \leq \left(\frac{2\mu_0}{\sigma} W_M \left| \frac{dW_M}{dt} \right| \right)^{1/2}. \quad (4.204)$$

Pro rekonekční jevy se zavádí typická vzdálenost

$$L \equiv \frac{|K|}{W_M}, \quad (4.205)$$

kteřá je pro systémy s dobře rozvinutou helikální strukturou zhruba rovna rozměrům systému. Charakteristický čas difúze určíme z rozměrové analýzy rovnice difúze:

$$\partial f / \partial t = \eta_M \Delta f \quad \Rightarrow \quad f / \tau_d \approx \eta_M f / L^2 \quad \Rightarrow \quad \tau_d \approx L^2 / \eta_M = L^2 \sigma \mu_0. \quad (4.206)$$

Za předpokladu rekonekčních či difúzních procesů v konečné izolované oblasti a v konečném časovém intervalu Δt , získáme po integraci vztahu (4.204) nerovnost

$$\left| \frac{\Delta K}{K} \right| \leq \left(\frac{\Delta t}{\tau_d} \right)^{1/2}. \quad (4.207)$$

Pro rychlé děje ($\Delta t \ll \tau_d$) bude změna helicity ΔK zanedbatelná. Například sluneční koronální erupce s dobou rekonekce $\Delta t \sim 1000$ s, lineárními rozměry $L \sim 1000$ km a koeficientem difúze $\eta_M \sim 10^{-6} \text{ km}^2 \text{ s}^{-1}$ dají charakteristický čas difúze $\tau_d \sim 10^{12}$ s a relativní změnu helicity $\Delta K / K < 3 \times 10^{-5}$.

4.9.2. Magnetická rekonexe

Pojem rekonexe vyjadřuje změnu struktury magnetického pole, doslova možnost rozpojování a spojování magnetických silokřivek, tedy jejich vzájemnou interakci. V přírodě pozorujeme mnoho jevů, které jsou způsobeny dynamickým chováním magnetického pole. Jde například o sluneční protuberance, chvost magnetického pole Země, erupce v akrečních discích,

interakce mezihvězdné hmoty, atd. Tyto dynamické jevy často souvisí s pozorovanou proměnností energie detekovaného záření.

Magnetická rekonexe patří mezi základní jevy v magnetizovaném plazmatu. Abychom ji popsali, musíme zobecnit ideální magnetohydrodynamiku (IMHD). V IMHD je magnetické pole „zamrznuté“ do plazmatu což znamená, že magnetické pole sleduje pohyb plazmatu a rezistivní procesy jsou zanedbány. V IMHD lze ukázat, že:

1. Dvě částice v plazmatu ležící na stejné magnetické silokřivce budou stále této silokřivce náležet.
2. Magnetický tok libovolnou uzavřenou křivkou je konstantní.
3. Magnetická helicity se zachovává, topologie magnetického pole je neměnná.

Tyto vlastnosti IMHD mohou způsobit následující obtíže:

- Magnetická pole vzniklá na různých místech spolu nemohou interagovat a mísit se.
- Energie magnetického pole nahromaděná pohybem plazmatu se nemůže uvolnit a magnetické pole se nemůže vrátit do stavu s nižší energií.
- Magnetická pole rostou nade všechny meze.
- Neexistuje inverzní proces k procesu magnetického dynama (přeměna kinetické energie na energii magnetického pole).

Pokud však při popisu plazmatu ustoupíme z požadavku IMHD a budeme popisovat plazma s nenulovým odporem (RMHD – *rezistivní magnetohydrodynamika*), vlastnosti magnetického pole se diametrálně změň. Magnetická rekonexe se objevuje tam, kde jsou vysoké proudové hustoty, které nemohou být zanedbány v Ohmově zákonu.

Vydeme ze základní soustavy rezistivní magnetohydrodynamiky (RMHD):

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) &= 0, \\
 \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} &= -\nabla p + \mathbf{j} \times \mathbf{B}, \\
 \rho \frac{\partial Q}{\partial t} + \rho (\mathbf{v} \cdot \nabla) Q &= \eta j^2, \\
 \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} &= \eta \mathbf{j}, \\
 \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\
 \nabla \times \mathbf{B} &= \mu \mathbf{j}, \\
 \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0,
 \end{aligned} \tag{4.208}$$

kde uvedené symboly mají standardní význam, η je rezistivita plazmatu a Q je specifické teplo. Z těchto rovnic vyplývá zákon zachování mechanické a elektromagnetické energie:

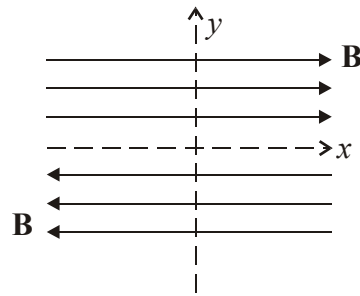
$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho v^2}{2} + e \right) + \nabla \cdot \left[\left(\frac{\rho v^2}{2} + e + p \right) \mathbf{v} \right] = \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}, \tag{4.209}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{B^2}{2\mu} \right) + \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{\mu} \right) = -\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}, \tag{4.210}$$

kde e značí hustotu vnitřní energie.

2-dimenzionální rekonexe

Mějme dvě domény plazmatu s opačně orientovaným magnetickým polem.



Pokud se plazma nepohybuje a zanedbáme-li rezistivitu, je tato situace stabilní. Pokud připustíme nenulovou rezistivitu plazmatu, bude mít Ohmův zákon tvar

$$\mathbf{E} = \eta \mathbf{j} = \eta \frac{\nabla \times \mathbf{B}}{\mu}, \quad (4.211)$$

který lze formálně přepsat na rovnici

$$\mathbf{E} + \mathbf{v}_d \times \mathbf{B} = 0, \quad (4.212)$$

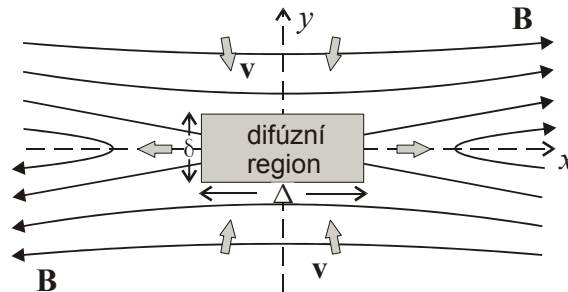
ve které lze rychlost \mathbf{v}_d interpretovat jako rychlost difúze magnetických siločar. Z obou vztahů vyloučíme pole \mathbf{E} a určíme difúzní rychlost (vektorově vynásobíme \mathbf{B}):

$$\mathbf{v}_d = \eta \frac{\mathbf{j} \times \mathbf{B}}{B^2} = \frac{\eta}{\mu} \frac{(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}}{B^2}. \quad (4.213)$$

což platí pro všechny konfigurace s $\mathbf{j} \cdot \mathbf{B} = 0$ (Sweet 1950). Ovšem čas difúze magnetického pole je příliš velký na vysvětlení pozorovaných dynamických jevů. Dovolme tedy plazmatu mít nenulovou rychlost v ose y směrem ke středu, která proces urychlí.

Stacionární rekonexe

Mějme konfiguraci podle následujícího obrázku. Nenulová rychlost plazmatu vytváří velký gradient magnetického pole v okolí počátku souřadnic a tedy i proudovou vrstvu.



Ve středu soustavy je difúzní region, kde je proudová hustota plazmatu vysoká, všude jinde předpokládáme nekonečnou vodivost. V počátku je magnetické pole nulové – neutrální bod typu X (název je odvozen podle tvaru siločar v okolí neutrálního bodu; ve třech dimenzích jde o neutrální přímku). Podle obrázku je

$$\frac{\partial B_x}{\partial y} > \frac{\partial B_y}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad j_z < 0,$$

a z Ohmova zákona platí $E_z < 0$. Proto $\mathbf{j} \cdot \mathbf{E} = j_z E_z > 0$ a tedy podle rov. (4.209) se magnetická energie mění na kinetickou. Měli bychom tedy řešit soustavu MHD rovnic v jednotlivých regionech za podmínky spojitosti řešení na hranicích mezi regiony. Bohužel obecné analytické řešení není známo. Často se rovnice převádějí do bezrozměrného tvaru pomocí:

$$M_i \equiv \frac{v_i}{v_{Ai}}; \quad S_i \equiv \frac{v_{Ai} L}{\eta}; \quad \beta_i \equiv \frac{p_i}{p_m} = \frac{2\mu p_i}{B_i^2}, \quad (4.214)$$

index $i = 0, 1, 2, 3$ značí fyzikální veličiny ve vnějším ideálním regionu, na vstupní a výstupní hranici a na neutrální čáře.

M_i je Alfvénovo Machovo číslo (M_0 je koeficient rekonexe, anglicky reconnection rate), S_i je Lundquistovo číslo a L je typická délka v plazmatu. Pokud použijeme některá zjednodušení jako $\Delta/\delta \gg 1$, $B_x/B_y \gg 1$, $\rho_2 = \rho_1 = \rho_0 = \text{konst.}$, $p_2 = p_1 = p_0 = \text{konst.}$, můžeme soustavu RMHD (4.208) pro stacionární případ převést na soustavu:

$$\begin{aligned} v_2 &= v_{A1}, \\ M_1 &= \frac{1}{\sqrt{S_1}}, \\ \frac{M_1}{M_0} &= \left(\frac{B_0}{B_1} \right)^2, \\ \frac{\Delta}{L} &= \frac{S_1 B_0}{S_0 B_1}. \end{aligned} \tag{4.215}$$

Soustava rovnic není úplná, neznáme poměr B_0/B_1 . Ten buď můžeme zjistit z přesnější analýzy nebo ho musíme dodatečně zadat. Tak rozlišujeme základní modely:

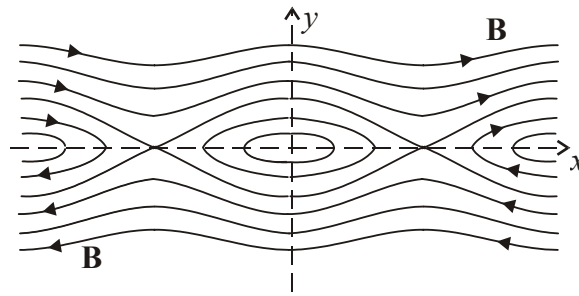
- a) *Sweetův-Parkerův model*: Difúzní region je tenký a dlouhý ($\delta \rightarrow 0$, $\Delta \rightarrow L$). Vnější region je homogenní, $B_1 = B_0$, $S_1 = S_0$. Koeficient rekonexe je $M_0 = \frac{1}{\sqrt{S_0}}$, což pro typické hodnoty Lundquistova čísla ($10^6 \div 10^{12}$ pro astrofyzikální plazma) dá příliš nízké hodnoty ($M_0 \approx 10^{-3} \div 10^{-6}$).
- b) *Petschekův model*: Tento model předpokládá menší difúzní region a tedy větší gradienty s cílem dosáhnout rychlejší rekonexe. Předpokládá $\Delta \ll L$, $B_1 < B_0$ a existenci pomalé rázové vlny. Maximální koeficient rekonexe je $M_0 = \frac{\pi}{8 \ln R_{m0}}$ a je zpravidla větší než u Sweetova-Parkerova modelu.
- c) *Další modely (Priest a Forbes, Sonnerup, ...)*: Tito autoři se snažili zobecnit předchozí modely, ukázali silný vliv okrajových podmínek, zahrnuli elektrické proudy v externím regionu, stlačitelnost, energetickou rovnováhu, atd. Jejich modely rekonexe obsahují předchozí dva jako speciální případy.

Nestacionární rekonexe

V přírodě se zdá, že mnoho procesů rekonexe probíhá jako silně časově závislý děj. Pokud v rovnovážné situaci povolíme rezistivitu, stane se konfigurace nestabilní a spontánně se vytvoří lokální koncentrace proudu. Nestabilním módům, které vznikají přítomností nenulové rezistivity říkáme *tearing modes*. Předpokládejme nulovou rovnovážnou rychlost plazmatu a magnetické pole podle úvodního obrázku dané předpisem:

$$\mathbf{B}_0 = B_{0x}(y)\mathbf{e}_x, \quad B_{0x}(-y) = -B_{0x}(y). \tag{4.216}$$

Nyní můžeme provést lineární perturbační analýzu v jednotlivých regionech, řešení poté navázat a zjistíme, že v konfiguraci se vyvine série magnetických ostrovů odpovídajících neutrálním bodům typu X a O (název je opět odvozen podle tvaru silokřivek v okolí neutrálního bodu) podobných jako ve stacionárním případě (Furth, Killeen a Rosenbluth, 1963).



Jelikož je ale magnetická rekonexe nelineárním jevem, je třeba situaci numericky simulovat. Takové simulace odkryjí vznik a vývoj *plazmoidů-jetů*, oblastí plazmatu urychlených přeměnou magnetické energie na kinetickou. Plazmoidy pak mohou systém opustit a tedy odnést s sebou velkou část energie nahromaděnou v původní rovnovážné konfiguraci. Tímto jevem se vysvětlují erupce na Slunci, v akrečních discích, vznik magnetosférických bouří, atd.

3-dimenzionální rekonexe

3-dimenzionální model rekonexe bychom mohli dostat z předcházející situace přidáním konstantního pole B_z . Přestože se nám tímto jednoduchým zobecněním podaří udržet stacionaritu a některé další vlastnosti, narazíme na několik zásadních rozdílů. Nelze již hovořit o neutrálních bodech typu O a X, ani o existenci tzv. separatrix – čar, které rozdělují prostor na oblast vtoku a výtoku plazmatu. Tento rozdíl bude ještě patrnější v konfiguracích bez translační symetrie. Proto je třeba zavést jinou definici oblasti v níž dochází k magnetické rekonexi.

Uvažujme obecnou rovnici zachování tvaru magnetických silokřivek:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \nabla \times (\mathbf{w} \times \mathbf{B}) = \lambda \mathbf{B}, \quad (4.217)$$

kde \mathbf{w} je rychlost přesunu silokřivek. Z rovnice plyne $\mathbf{B} \cdot \nabla \lambda = \text{konst.}$, a proto je λ konstantní podél silokřivek magnetického pole. V případě ideálního plazmatu pohybujícího se rychlostí \mathbf{v} platí, že $\lambda = 0$, $\mathbf{v} = \mathbf{w}$. Proto tedy i v difúzním regionu musí být λ nulové. Z rovnice (4.217) a Faradayova indukčního zákona pak plyne:

$$\mathbf{E} + \mathbf{w} \times \mathbf{B} = \nabla \Psi, \quad (4.218)$$

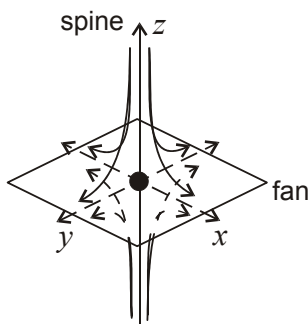
kde Ψ je skalární potenciál. Odtud vidíme, že v ideálním regionu, jelikož Ψ musí být konstantní, $\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$ podél magnetických silokřivek. Proto jako postačující podmínku pro rekonexi magnetických silokřivek dostaneme:

$$\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \neq 0. \quad (4.219)$$

Nulové body magnetického pole, ve kterých dochází k rekonexi, mohou být klasifikovány pomocí vlastních hodnot $\nabla \mathbf{B}$:

- 1) 3 reálné vlastní hodnoty (+--), typ A.
- 2) 3 reálné vlastní hodnoty (-++), typ B.
- 3) 1 reálná vlastní hodnota a 2 komplexně sdružené.

Vlastní vektory vlastních čísel komplexně sdružených nebo se stejným znaménkem tvoří tzv. *fan* rovinu (anglicky fan znamená vějíř), poslední vektor určuje přímku, tzv. *spine* (anglicky spine znamená páteř). Pokud existuje více nulových bodů, průsečík *fan* rovin tvoří tzv. *separátor*.



Podle místa lokalizace vysoké proudové hustoty rozlišujeme:

- 1) Rekonexi typu *fan* (*fan reconnection*).
- 2) Rekonexi typu *spine* (*spine reconnection*).
- 3) Rekonexi typu *separátor* (*separator reconnection*).

Jelikož rekonexe se může ve speciálních případech objevit i v místech, kde magnetické pole má konečnou hodnotu (což je obsaženo i v (4.219)), lze ukázat, že místo rekonexe je možné charakterizovat singularitou ve čtyřvektoru rychlosti w_μ (Hornig). Tato vlastnost se zachovává při přechodu od 2-dim k 3-dim situaci. Jiná možnost je analyzovat rekonexi s pohledu magnetické helicity.

Na závěr poznamenejme, že rekonexe není daná jen klasickou rezistivitou plazmatu, ale může být způsobená i jinými mechanismy (anomální rezistivita, Hallův člen a jiné vlastnosti neideálního plazmatu).

4.9.3. Magnetické dynamo

4.10. KVAZIČÁSTICE

Asi každý z nás viděl někde v televizi nebo ve skutečnosti hroutící se řadu kostek domina. Stačí ťuknout do první a další se již lavinovitě hroutí. Máme pocit jako by řadou kostek cosi probíhalo od místa k místu. Nějaký neviditelný trpaslík, který poráží kostku za kostkou. V kvantové teorii tomuto fiktivnímu „trpaslíkovi“ říkáme kvazičástice. Kvazičástice odpovídá rozdílu dvou sousedních energetických hladin systému. Například první vybuzený stav si můžeme představit jako základní stav plus kvazičástici. V pružném prostředí se kvazičástice pohybuje, energie se předává od místa k místu a kvazičástice velmi přirozeně popisuje šíření vlny a energie prostředím. Kvazičástici, která nahrazuje vlnu, můžeme přiřadit fázovou rychlost, grupovou rychlost a tzv. efektivní hmotnost vztahy

$$v_f = \frac{E}{p} = \frac{\omega}{k}; \quad v_g = \frac{\partial E}{\partial p} = \frac{\partial \omega}{\partial k}; \quad \frac{1}{m_{\text{eff}}} = \frac{\partial^2 E}{\partial p^2} = \frac{1}{\hbar} \frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2}. \quad (4.220)$$

Poslední vztah odpovídá hmotnosti počítané z nerelativistického výrazu $E = p^2/2m$ a lze ho použít jen pro „hmotné“ kvazičástice, například magnony.

Existuje zajímavé, ale jen přibližné pravidlo: Je-li teplota látky vysoká ($k_B T \gg E_{\text{vazby}}$) dominují v látce obyčejné částice. Naopak, je-li teplota látky nízká ($k_B T \ll E_{\text{vazby}}$) objevují se vazby mezi částicemi, vytvářejí se pravidelná uspořádání, ve kterém se šíří velké množství kvazičástic.

4.10.1. Fonony

Fonony jsou kvazičástice vibrací atomů v krystalové mřížce a lze pomocí nich popisovat šíření zvukových vln v pevných látkách. Samotný název fonon vznikl jako analogie k fotonu. Foton je částicí *elektromagnetického pole*, fonon je kvazičásticí *netlumeného zvukového pole* v pevné látce. Obě pole mají mnoho společného: jde o vektorová pole popsitelná parciálními diferenciálními rovnicemi druhého řádu. U obou typů polí lze provádět superpozici řešení.

Krystalická látka

Krystalickou látku lze chápat jako periodicky se opakující uspořádání několika atomů, které nazýváme *elementární buňkou*. Rozměry elementárních buněk bývají přibližně 10^{-10} m. Elementární buňku můžeme popsat třemi vektory báze $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$, objem buňky je dán vztahem

$$V_0 = \mathbf{a}_1 \cdot (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3). \quad (4.221)$$

Krystalická látka vykazuje periodické uspořádání v prostoru a je proto výhodné provést Fourierovu transformaci a popisovat jevy v tzv. recipročním \mathbf{k} prostoru. V praxi to znamená přechod od proměnných (t, \mathbf{x}) proměnným (ω, \mathbf{k}) respektive (E, \mathbf{p}) . Kmity krystalické mříže budeme popisovat jako vlnění (ω, \mathbf{k}) nebo jako pohyb plynu kvazičástic (E, \mathbf{p}) . Reciproký prostor je také periodickým prostorem, příslušná elementární buňka se nazývá *první Brillouinova zóna* a její vektory báze jsou

$$\mathbf{b}_1 = \frac{\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3}{V_0}; \quad \mathbf{b}_2 = \frac{\mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_1}{V_0}; \quad \mathbf{b}_3 = \frac{\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2}{V_0}. \quad (4.222)$$

Vektory reciproké báze mají rozměr $1/\text{m}$ a objem reciproké buňky je $1/V_0$.

Disperzní relace je periodickou funkcí vlnového vektoru

$$\omega(\mathbf{k}) = \omega(\mathbf{k} + n_1 \mathbf{b}_1 + n_2 \mathbf{b}_2 + n_3 \mathbf{b}_3); \quad n_1, n_2, n_3 = 1, 2, 3, \dots \quad (4.223)$$

Vlnový vektor či hybnost kvazičástice se periodicky opakuje (Př. 3, kapitola 1.3.1.) a skokem se mění na hranici Brillouinovy zóny. Podobně jako je elementárními buňkami vyplněn beze zbytku prostor krystalu je Brillouinovými zónami beze zbytku vyplněn reciproký prostor.

Akustické a optické mody

V krystalech lze detekovat dva základní typy šířících se vln. Oba typy se liší chováním disperzní relace pro malá k (velká λ). *Akustickým modem* (větvi) nazýváme vlny, pro které je

$$\omega(k) \approx ck, \quad (4.224)$$

optickým modem nazýváme vlny, pro které je

$$\omega(k) \approx \omega_0. \quad (4.225)$$

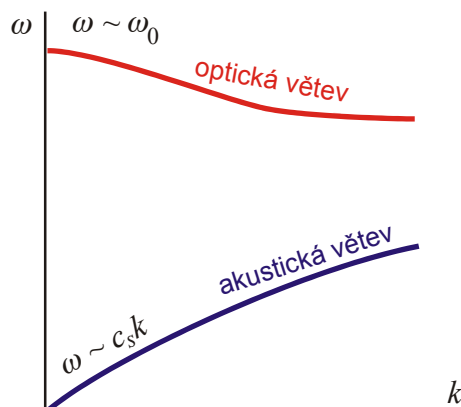
Příslušné kvazičástice nazýváme *akustické a optické fonony*.

Šíření zvuku v plynech a kapalinách je relativně jednoduché, existuje totiž jen podélné vlnění. Již v plazmatu jsme viděli možnost existence příčných modů. Stejně je tomu v krystalických látkách, zvuk se může šířit v jednom podélném a dvou navzájem kolmých (nezávislých) příčných modech. Počet nezávislých akustických modů proto je

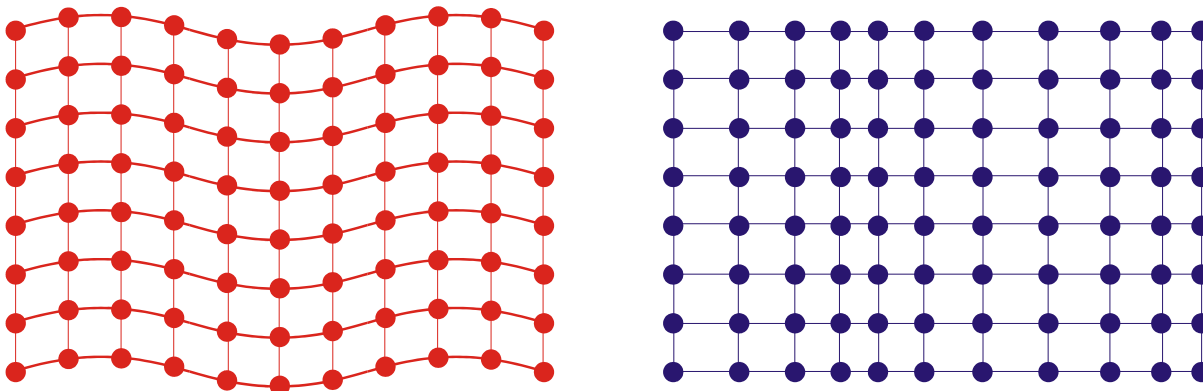
$$\#_A = 3. \quad (4.226)$$

Tvoří-li základní buňku krystalu r různých prvků (každý přináší tři vibrační stupně volnosti), zbývá na optické mody

$$\#_O = 3r - 3. \quad (4.227)$$



Elementární buňka krystalické soli je tvořena ionty sodíku a chlóru ($r=2$), proto se krystalickou solí mohou přenášet tři akustické a tři optické mody kmitů krystalů. Naopak u krystalického argonu ($r=1$) existují jen akustické mody a neexistují optické mody. Při teplotách nižších než vibrační (Debyeova) teplota se nejprve rozvíjejí akustické mody vln. Teprve při vyšších teplotách se objevují optické mody, pokud existují. U dvouatomárních krystalů odpovídají optické mody kmitům těchto dvou typů atomů v protifázi, akustické mody kmitům ve fázi.



Příčný a podélný mod kmitů krystalové mříže

Vlnění jako fonony

Kmity krystalové mříže představují kmity harmonického oscilátoru s energetickým spektrem

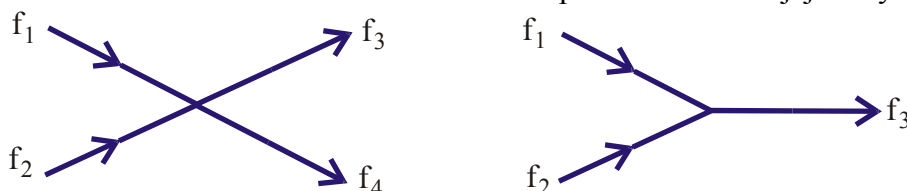
$$E_n = \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega. \quad (4.228)$$

Připomeňme, že i při nulové teplotě krystalová mříž vykonává tzv. *nulové kmity*. Kmity mříže můžeme chápat jako základní (nulový) kmit a excitace jako soustavu n kvazičástic, každá s energií $\hbar \omega$. Tyto kvazičástice se chovají jako bosony a splňují bosonové komutační relace a Bose-Einsteinovo statistické rozdělení. (Zcela analogicky je tomu u fotonů elektromagnetického pole.) Krystalická látka se chová jako prostředí vyplněné fononovým plynem. V pevné látce se již zhruba při desetině vibrační teploty vyskytuje cca 10^{20} fononů v jednom

centimetru krychlovém. Fonony mají, podobně jako fotony, nulovou efektivní hmotnost a nulový chemický potenciál.

Interakce fononů

Fonony se chovají jako normální částice jen do jisté míry. Můžeme pro ně zavést střední volnou dráhu, která je dána srážkami s ostatními částicemi a kvazičásticemi a se srážkami na nečistotách a dislokacích krystalové mříže. Srážky fononů ale nejsou příliš podobné srážkám běžných částic. Při srážkách se nemusí zachovávat ani počet fononů ani jejich hybnost.



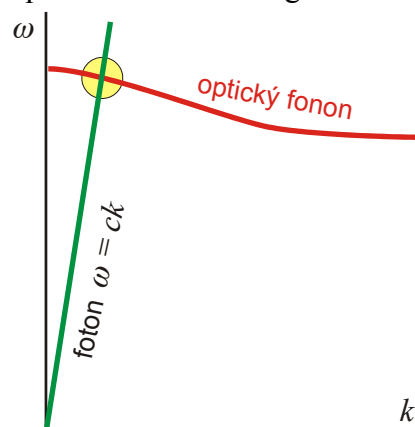
Nikdy nesmíme zapomenout, že v periodickém prostředí je hybnost periodickou funkcí a nemůže přerůst určitou hodnotu. Získá-li fonon při srážce větší hybnost než je hybnost na hranici Brillouinovy zóny, přejímá tuto hybnost krystalická mříž. Srážky tak dělíme na dva základní typy procesů:

- N proces: hybnost při srážce se zachovává,
- U proces: hybnost překročila mez periodičnosti v \mathbf{p} prostoru a přejímá ji krystalická mříž.

Pomocí srážek fononů lze například velmi elegantně vysvětlit tepelnou vodivost krystalické látky. Na jejím teplejším konci je značné množství fononů. Ty se pohybují (difundují) směrem k chladnějším konci. Jejich počet se ale nezachovává, jsou pohlcovány krystalickou mříží a při srážkách. Na chladnějším konci látky jich je nižší počet. Tepelný přenos je způsoben pohybem fononů (kmitů krystalové mříže). Počet fononů v daném místě odpovídá energii kmitů krystalové mříže a závisí tak na teplotě látky. Tepelná vodivost je dána střední volnou drahou fononů.

Fonony se mohou srážet mezi sebou, s fotony, elektrony nebo magnony (další kvazičástice v magnetických materiálech). Například při rezonančním pohlcení elektromagnetického záření v krystalu může vzniknout optický fonon (pakliže existují optické módy kmitů krystalové mříže). V oblasti rezonančního pohlcení se musí obě disperzní křivky (fotonu a optického fononu) protínat.

Nepřímé pozorování fononů v látce je možné pomocí nepružného rozptylu neutronů na krystalové mříži. Při pružném rozptylu se zachovává energie a při interakci neutronu s mříží nevznikají žádné fonony. Naopak při nepružném rozptylu se část energie neutronu mění na kmitů mříže a vzniká jeden nebo více fononů. Studium nepružného rozptylu neutronů tak lze nepřímo „sledovat“ jednotlivé vznikající fonony a studovat jejich disperzní relaci.



4.10.2. Magnony

Ve statistické fyzice (TF3) jsem věnovali značný prostor chování magnetických systémů, zejména feromagnetik. Ta jsou tvořena soustavou vzájemně interagujících magnetických momentů (spinů), které jsou lokalizovány v pevné krystalové mříži. Při nízkých teplotách mají spiny tendenci zaujímat souhlasný směr a vytvářet tzv. Weissovy domény – oblasti shodně orientovaných spinů. V některých systémech existuje mezi nízkoteplotní a vysokoteplotní fází ještě tzv. soft fáze, ve které se feromagnetikem může šířit zvlnění spinů, spinový vír nebo skupina otočených spinů. Tomuto jevu říkáme spinová vlna a poprvé ho objevil F. Bloch v roce 1930. Odpovídající kvazičásticí je šíření jednoho jinak orientovaného spinu prostředím, tzv. *magnon*. Magnon je hodně podobný v úvodu vzpomínanému příkladu

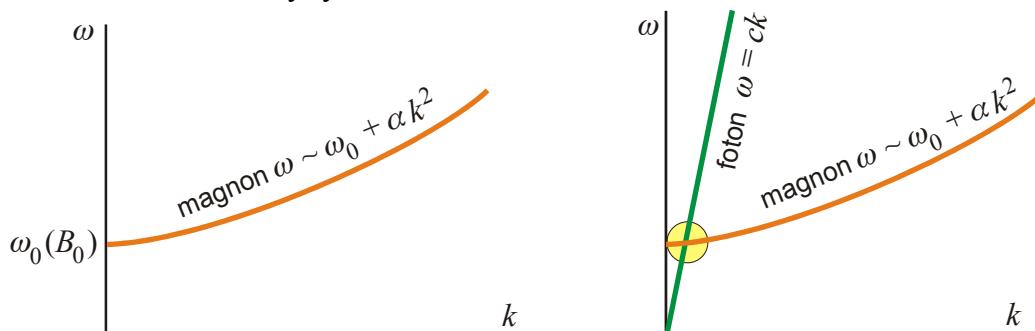
s dominem. Díky interakci otočí nesprávně orientovaný spin sousední spin, ten otočí další spin v řadě, ten další, atd. Makroskopicky se vlnící veličinou je magnetizace \mathbf{M} . Magnon fyzikálně představuje elementární kvantum magnetického toku v systému. Pomocí magnonů lze kromě spinových vln elegantně popsat i Josephsonův jev (průchod proudu vrstvou oddělující dva supravodiče).

Disperzní relace magnonů pro malé hodnoty k (velká λ) má parabolický charakter:

$$\omega = \omega_0(B_0) + \alpha k^2 \quad (4.229)$$

Aditivní konstanta je dána magnetickou rezonanční frekvencí probíranou v TF3 a souvisí s interakcí spinů s vnějším magnetickým polem (je úměrná tomuto poli). Druhý člen je způsoben vzájemnou interakcí spinů na mříži, konstantu α jde zhruba odhadnout tak, aby energie kmitů $\hbar\omega$ dala Curieovu energii $k_B T_C$ pro $k = 1/a$, a je vzdálenost spinů.

Magnony se chovají jako hmotné bosony, hmotnost jim lze přiřadit pomocí vztahu (4.220) a pro externí pole velikosti 1 T vychází tato hmotnost extrémně malá, jen 10^{-40} kg a má podstatný vliv jen při vysokofrekvenčních experimentech. Chemický potenciál magnonů je stejně jako u fononů nulový. Magnony podléhají Bose-Einsteinově statistice. Magnony se podílejí na vedení tepla, interagují intenzivně s fonony a zodpovídají za pohlcování energie zvukových vln, interagují s elektrony ve feromagnetikách a jsou schopny rezonanční interakce s fotony (v oblasti průsečíku disperzní relace magnonu a fotonu může dojít k pohlcení fotonu látkou a rezonančnímu vzniku magnonu. Tuto feromagnetickou rezonanci objevil v roce 1946 kanadský fyzik G. Griffiths.



Na obrázku vlevo je disperzní relace magnonů, na obrázku vpravo je vyznačena oblast, ve které může dojít k rezonančnímu vzniku magnonu při pohlcení fotonu.

4.10.3. Vázané stavy

Exciton (elektron–díra)

V izolátorech a polovodičích nemusí vždy vznikat samostatný elektron a díra. Někdy se vytvoří vázaný stav elektronu a díry (podobně jako je elektron vázán v atomu vodíku). Tato vázaná dvojice se přesouvá prostorem. Dochází k šíření energie bez šíření náboje. Takový excitovaný stav nazýváme *exciton*. Jsou-li rozměry excitonu podstatně větší než je mřížková konstanta, nazýváme exciton *Wannierův*. Wannierův exciton není lokalizován ke konkrétnímu krystalu či molekule a excitační energie patří většímu množství atomů či iontů. Je-li rozměr excitonu srovnatelný s mřížkovou konstantou, nazýváme ho *Frenkelův*. Excitační energie je vždy vázána na jeden konkrétní iont nebo atom krystalu. Typické excitony v germaniu (polovodič) mají rozměry cca desetinásobku mřížkové konstanty a tvoří Wannierovy excitony, naopak typické excitony v alkalických halogenidech (izolátory) mají rozměry srovnatelné s mřížkovou konstantou a tvoří Frenkelovy excitony. V molekulárních krystalech (například krystaly inertních plynů, Ar apod.) si lze představit, že jedna molekula je v excitovaném stavu, ostatní v základních. Excitace se předává od molekuly k molekule opět podobně jako u kostek domina.

Polaron (elektron–fonon)

Při interakci elektronu s ionty nebo atomy krystalové mříže může vzniknout vázaný stav elektronu a oblaku fononů, který se šíří krystalem. Takový vázaný shluk nazýváme *polaron*.

Polariton (foton–fonon)

V iontových krystalech může dojít k vazbě mezi elektromagnetickým polem (fotonem) a příčným optickým fononem dlouhých vlnových délek. Tento vázaný stav se nazývá *polariton*. Makroskopicky se pohyb polaritonu projevuje jako vlna vektoru polarizace **P**.

4.10.4. Plasmony

V teorii plazmatu jsme poznali podélné plazmové vlny jako důsledek pohybu elektronů v Coulombickém poli iontů. V elektronovém plynu nebo pevné látce, kde jsou elektrony slabě vázány, se kvantum těchto podélných nelokálních vln nazývá *plasmon*. Vytváření plasmonů (ve většině materiálů o energii 10–20 eV) vede k energetickým ztrátám, které postihují kovy, nekovy i plasty. Ztracená energie se ve finále vyzáří v ultrafialovém nebo viditelném oboru (tzv. Ferrellovo záření objevené v roce 1960).

PŘÍLOHA - VEKTOROVÝ SOUČIN

Při úpravách výrazů obsahujících vektorový součin je někdy výhodný zápis pomocí Levi-Civitova tenzoru. Jde o totálně antisymetrický tenzor 3. řádu, který má jedinou nezávislou složku

$$\varepsilon_{123} = 1; \quad \varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{ikj} = -\varepsilon_{jik} = -\varepsilon_{kji}. \quad (4.230)$$

Složky tohoto tenzoru mají hodnotu +1, -1 nebo 0. Všechny složky s dvěma nebo více shodnými indexy jsou nutně nulové (základní vlastnost antisymetrických matic, například $\varepsilon_{112}, \varepsilon_{233}, \varepsilon_{222}, \dots$). Ukažme nulovost například pro složku ε_{112} : Zaměňme první dva indexy, z antisymetrie platí

$$\varepsilon_{112} = -\varepsilon_{112} \quad \Rightarrow \quad 2\varepsilon_{112} = 0 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_{112} = 0.$$

Pro Levi-Civitův tenzor platí velmi užitečný vztah:

$$\varepsilon_{kij} \varepsilon_{klm} = \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl} \quad (4.231)$$

Přes index k se automaticky sčítá. Důkaz je možné provést buď z úvah o symetrii tenzoru nebo prostým rozepsáním do složek. Vektorový součin lze pomocí Levi-Civitova tenzoru definovat takto:

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}; \quad c_k = \varepsilon_{klm} a_l b_m. \quad (4.232)$$

Z celého dvojného součtu jsou vždy nenulové jen dva členy, například pro první složku máme

$$c_1 = \varepsilon_{123} a_2 b_3 + \varepsilon_{132} a_3 b_2 = a_2 b_3 - a_3 b_2.$$

Ukažme si typické výpočty na třech jednoduchých příkladech:

Dvojný vektorový součin $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$

$$\begin{aligned} [\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})]_k &= \varepsilon_{klm} a_l (\mathbf{b} \times \mathbf{c})_m = \varepsilon_{klm} a_l \varepsilon_{mno} b_n c_o = \varepsilon_{mkl} \varepsilon_{mno} a_l b_n c_o = \\ &= (\delta_{kn} \delta_{lo} - \delta_{ko} \delta_{ln}) a_l b_n c_o = a_l b_n c_l - a_l b_l c_k = b_k (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - c_k (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \Rightarrow \\ &\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}). \end{aligned} \quad (4.233)$$

Dvojná rotace vektorového pole $\text{rot rot } \mathbf{A}$

$$\begin{aligned} [\text{rot}(\text{rot } \mathbf{A})]_k &= \varepsilon_{klm} \partial_l (\text{rot } \mathbf{A})_m = \varepsilon_{klm} \partial_l \varepsilon_{mno} \partial_n A_o = \varepsilon_{mkl} \varepsilon_{mno} \partial_l \partial_n A_o = \\ &= (\delta_{kn} \delta_{lo} - \delta_{ko} \delta_{ln}) \partial_l \partial_n A_o = \partial_l \partial_k A_l - \partial_l \partial_l A_k = \partial_k (\partial_l A_l) - (\partial_l \partial_l) A_k = \partial_k \text{div } \mathbf{A} - \Delta A_k \Rightarrow \\ &\text{rot}(\text{rot } \mathbf{A}) = \text{grad div } \mathbf{A} - \Delta \mathbf{A}. \end{aligned} \quad (4.234)$$

Člen zamrznání v magnetohydrodynamice $\text{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$

$$\begin{aligned} [\text{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{B})]_k &= \varepsilon_{klm} \partial_l (\mathbf{v} \times \mathbf{B})_m = \varepsilon_{klm} \partial_l \varepsilon_{mno} v_n B_o = \varepsilon_{mkl} \varepsilon_{mno} \partial_l (v_n B_o) = \\ &= (\delta_{kn} \delta_{lo} - \delta_{ko} \delta_{ln}) \left(\frac{\partial v_n}{\partial x_l} B_o + v_n \frac{\partial B_o}{\partial x_l} \right) = \frac{\partial v_k}{\partial x_l} B_l + v_k \frac{\partial B_l}{\partial x_l} - \frac{\partial v_l}{\partial x_l} B_k - v_l \frac{\partial B_k}{\partial x_l} = \\ &= (\mathbf{B} \cdot \nabla) v_k + v_k \text{div } \mathbf{B} - B_k \text{div } \mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \nabla) B_k \Rightarrow \\ &\text{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{v} - \mathbf{B} \text{div } \mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{B}. \end{aligned} \quad (4.235)$$