



KOSMICKÉ ROZHLEDY

ROČNÍK 23 (1985) ČÍSLO 3

NEPERIODICKÝ VĚSTNÍK ČESKOSLOVENSKÉ ASTRONOMICKÉ SPOLEČNOSTI PŘI ČSAV

KOSMICKÉ ROZHLEDY, neperiodický věstník Československé astronomické společnosti při Československé akademii věd

ročník 23 (1985)

číslo 3

Vladimír Karas

Základní principy a výsledky speciální teorie
relativity. (Pokračování z č. 2/1985)

5. Lorentzova transformace a některé její důsledky

Nyní pohovoříme o Lorentzově transformaci (LT), tedy o transformaci, která udává vztah mezi souřadnicemi x^μ nějaké události pozorované z inerciálního systému S a souřadnicemi x'^μ téže události sledované z jiného inerciálního systému S' (x^1, x^2, x^3 jsou jako dříve prostorové souřadnice, $x^4 = ict$ časová). S odvozením této transformace se čtenář setká v úvodu učebnice STR; ve zjednodušeném případě v /8, kap. 1/, podrobně např. v /20, kap. IV/. Dva dříve uvedené postuláty STR doplnujeme z fyzikálních důvodů ještě požadavkem, že volné hmotné body se pohybují s nulovým zrychlením. Ten je již ostatně obsažen ve skutečnosti, že hledáme transformační vztah mezi IS.

Obecný tvar lineární transformace je

$$x'^\mu = \sum_{\nu=1}^4 \Lambda_{\nu}^{\mu} x^{\nu} + a^{\mu}, \quad \mu = 1, 2, 3, 4 \quad (5.1)$$

kde Λ_{ν}^{μ} jsou konstanty, jejichž velikost může záviset na vzájemné rychlosti systémů S a S' a na rychlosti šíření signálů c. Konstanty a^{μ} charakterizují pouze vzájemné posunutí počátků obou soustav (když jsou $x^{\mu}=0$, potom $x'^{\mu} = a^{\mu}$), a my se proto budeme věnovat pouze jednodušším transformacím s $a^{\mu} = 0$ (tzv. homogenní transformace).

Základní vlastnosti LT je možno demonstrovat na jejím nejsnazším příkladu - speciální Lorentzově transformaci (SLT). Tímto termínem označujeme LT, která splňuje předpoklady, že

1. osy x^1 a x'^1 splývají,
2. osy x^2 a x'^2 resp. x^3 a x'^3 jsou rovnoběžné a splývají v čase $t=t'=0$,
3. všechny osy mají stejnou orientaci (viz obr. 6).

SLT je tedy transformace od systému S k S', který se pohybuje ve směru osy x^1 rychlostí +v. Z postulátů STR a právě uvedených požadavků plyne tvar SLT:

$$x' = \gamma(x - vt), y' = y, z' = z, t' = \gamma(t - vx/c^2), \quad (5.2)$$

$$\text{tj. } x'^1 = \gamma(x^1 + i\beta x^4), x'^2 = x^2, x'^3 = x^3, x'^4 = \gamma(x^4 - i\beta x^1), \quad (5.3)$$

kde $\beta = v/c$, $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$.

Přímým výpočtem se můžeme přesvědčit, že princip relativity je skutečně splněn. Závislost nečárkovaných souřadnic na čárkovaných má totiž stejný tvar jako v (5.2) až na znaménko u rychlosti v , což vyjadřuje skutečnost, že orientace rychlosti systému S pozorovaného z S' je opačná oproti orientaci S' pozorovaného z S . Tato vlastnost inverzní transformace byla z hlediska Lorentzovy kontrakční hypotézy náhodná, v STR má však hlubší příčinu - princip relativity.

Podle rovnice (5.3) tedy víme, že při SLT mají konstanty Λ_{ij} hodnoty

$$\Lambda_1^1 = \Lambda_4^4 = \gamma, \Lambda_4^1 = -\Lambda_1^4 = i\beta\gamma, \Lambda_2^2 = \Lambda_3^3 = 1,$$

ostatní jsou nulové. Dalším speciálním případem LT je prostorová rotace popsaná vztahy (2.1) + (2.3). Stačí ztotožnit

$$\Lambda_j^i = A_j^i, \Lambda_4^4 = 1, \Lambda_4^i = \Lambda_i^4 = 0 \quad \text{pro } i, j = 1, 2, 3.$$

Výhodnost zavedení souřadnice x^4 místo času t , který má přímý fyzikální význam, spočívá ve formální matematické podobnosti mezi prostorovou rotací a SLT. Povážíme si, že platí

$$\gamma^2 + (i\beta\gamma)^2 = 1, \quad (5.4)$$

takže můžeme SLT (5.3) vyjádřit pomocí "úhlu" ψ definovaného vztahy

$$\gamma \equiv \cos \psi, i\beta\gamma \equiv \sin \psi. \quad (5.5)$$

Pro přehlednost a s užitím nového značení prepíšeme vztah (2.1) vyjadřující prostorovou rotaci kolem osy x^2 o úhel φ , a (5.3) pro SLT ve směru osy x^1 na rychlost v vyjádřenou pomocí "úhlu" ψ :

$$\begin{array}{ll} x'^1 = x^1 \cos \varphi + x^3 \sin \varphi & x'^1 = x^1 \cos \psi + x^4 \sin \psi \\ x'^2 = x^2 & x'^2 = x^2 \\ x'^3 = x^3 \cos \varphi - x^1 \sin \varphi & x'^3 = x^3 \\ x'^4 = x^4 & x'^4 = x^4 \cos \psi - x^1 \sin \psi \end{array} \quad (5.6)$$

V prvním případě mluvíme o prostorové rotaci v rovině (x^1, x^3) , ve druhém obrazně o "rotaci" v Minkowského rovině (x^1, x^4) . Každá událost je určena bodem v prostoročase. Otočení v Minkowského rovině charakterizuje výsledky měření souřadnic téže události v souřadných systémech souvisejících navzájem pomocí SLT. Je třeba mít na paměti, že přes formální podobnost má imaginární souřadnice x^4 zcela odlišný význam než reálné prostorové souřadnice x^1, x^2, x^3 . Proto není možné rotaci v Minkowského rovině názorně zakreslit, jako tomu bylo u prostorové rotace (obr. 3). Existuje ovšem grafické

znázornění pomocí kosouhlých souřadnic /20, kap. V/.

V případě infinitesimální SLT (transformace na malou rychlost $v \rightarrow 0$, tedy transformace nepatrně odlišná od identické) je β malé, takže

$$\begin{aligned} i\beta\gamma &= \sin\phi \cong \phi, & \gamma &= \cos\phi \cong 1, \\ x'^1 &\cong x^1 + i\beta x^4, & x'^4 &\cong x^4 - i\beta x^1. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Důležitost infinitesimálních LT spočívá v tom, že jejich postupným skládáním lze vytvářet konečné LT a že pro určení transformačních vlastností různých veličin postačuje znát jejich chování při infinitesimálních transformacích. Poznamenejme také, že γ prvním řádu rozvoje (5.7) podle malé veličiny β je sice $x'^1 = x^1$ - vt jako v Galileově transformaci, ale transformační předpis pro časovou souřadnici je od galileovského odlišný.

Nakonec ještě několik slov o tzv. intervalu. Tímto termínem označujeme kvadratickou formu vyjadřující časoprostorovou odlehlost dvou blízkých událostí $P_1(x^1, x^2, x^3, x^4)$ a $P_2(x^1+dx^1, x^2+dx^2, x^3+dx^3, x^4+dx^4)$

$$\begin{aligned} ds^2 &= dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2, \text{ neboli} \\ ds^2 &= \sum_{\mu=1}^4 (dx^\mu)^2. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Slovo "odlehlost" vyjadřuje analogii se vzdáleností dvou bodů v Eukleidově prostoru: jestliže se jejich prostorové souřadnice liší o hodnoty dx^i ($i=1,2,3$), je čtverec vzdálenosti podle Pythagorovy věty

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

Fyzikální význam intervalu ds ukážeme v části pojednávající o dilataci času. Zatím víme, že pokud $ds = 0$, jsou obě události světelně spojeny, neboť ze vztahu

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = c^2 dt^2$$

plyne, že signál se mezi nimi šíří rychlostí světla c . Interval má důležitou vlastnost - je invariantní při LT, tzn. jeho velikost se zachovává ($ds^2 = ds'^2$). Naopak LT jsou jediné nelineární transformace $x^\mu \rightarrow x'^\mu(x^\nu)$, které ponechávají ds^2 invariantní. Důsledkem této invariance je skutečnost, že světelné signály se v inerciálních soustavách spojených LT skutečně šíří vždy stejnou rychlostí ($c=c'$).

Pokud $ds^2 < 0$, říkáme, že interval má časový charakter a události P_1, P_2 mohou být spojeny signálem šířícím se rychlostí menší, než je rychlost světla. Pokud $ds^2 > 0$, jde o interval prostorového charakteru a obě události nejsou v kauzální souvislosti.

Všichni čtenáři se již nepochybně setkali s pojmy kontrakce délek, dilatace času či relativnost současnosti. Někdy se však objevují nesprávné interpretace těchto důsledků LT.

Budeme opět uvažovat dva systémy S a S' spojené pomocí SLT na rychlost $v < c$ ve směru osy x^1 . Připomenme, že v obou máme kartézský systém prostorových souřadnic sestavený z ideálních měřítok a v každém bodě prostoru je umístěn pozorovatel s ideálními hodinami. Hodiny systému S jsou navzájem synchronizovány světelnými signály či nekonečně pomalým přenosem. Analogicky je tomu s hodinami v S'.

Mějme měřítok položené podél osy x'^1 , které je v S' v klidu. Jeho konce tedy trvale padnou do nějakých bodů x'^1_1 , x'^1_2 a délka $l' \equiv x'^1_2 - x'^1_1$ je označována jako tzv. vlastní (klidová) délka. Délku tohoto měřítka letícího v S určíme tak, že v předem stanoveném čase pozorovatelé, kolem nichž právě prolétá některý z konců měřítka, "zvednou praporek". Jejich synchronizované hodiny ukazují v tomto okamžiku čas $t_1 = t_2$. Podle SLT bude

$$l' \equiv x'^1_2 - x'^1_1 = \gamma (x^1_2 - x^1_1 - v(t_2 - t_1)) \equiv \gamma l. \quad (5.11)$$

Protože $\gamma > 1$, je $l < l'$. Odtud kontrakce délek - letící měřítko je zkráceno ve směru pohybu, největší délku má ve svém klidovém systému. Jak se toto měření jeví pozorovateli v S'? Platí

$$0 = t_2 - t_1 = \gamma (t'_2 - t'_1 + vl'/c^2), \text{ tj. } t'_2 - t'_1 = -vl'/c^2.$$

Podle něj tedy oba pozorovatelé nezvedli praporek v též okamžik, a proto změřili odlišnou délku. Při $v \neq 0$ je $t'_2 \neq t'_1$ pouze pro $l' \neq 0$, tzn. události mohou být současné v různých IS pouze tehdy, jsou-li zároveň souměstné.

Uvažme navíc další systém S'', který se pohybuje vůči S rychlostí $-v$ (v protisměru osy x^1). Dvě události současné v S ($t_1 = t_2$) nejsou současné v S' ($t'_1 > t'_2$) ani v S'' ($t''_1 < t''_2$) a navíc při přechodu od S' k S'' se mění jejich pořadí. Matematicky v tomto tvrzení není paradox, neboť se jedná o údaje různých hodin. Protimluv by ovšem vznikl, kdyby byla porušena kauzalita, tj. kdyby mohlo dojít k záměně časového pořadí příčiny a následku přechodem z jednoho systému ke druhému. Necht' např. v S je v čase t_1 v bodě x^1_1 na ose x^1 vyslán signál, který v $t_2 > t_1$ dorazí do bodu x^1_2 . To jsou dvě evidentně kauzálně spojené události. Rychlost šíření signálu je $u \equiv (x^1_2 - x^1_1)/(t_2 - t_1)$. Pozorováno z S' je $t'_2 - t'_1 =$

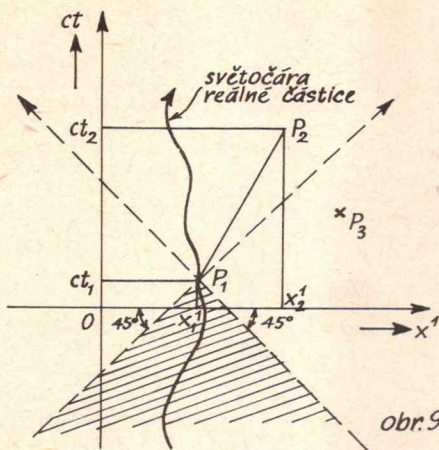
$= \gamma (t_2 - t_1 - v(x^1_2 - x^1_1)/c^2)$. Příčinnost by byla porušena, kdyby se pořadí událostí obrátilo, tj. kdyby $t'_1 > t'_2$. Pak ovšem, uvážíme-li, že $\gamma > 1$, $|v| < c$, by bylo

$$0 > t_2 - t_1 - v(x^1_2 - x^1_1)/c^2, \quad (5.12)$$

a tedy

$$uv > c^2, \quad |u| > c. \quad (5.13)$$

Signál by se musel šířit nadsvětelnou rychlostí. Situace je ukázána na obr. 9. Světlocáry signálu i všech fyzikálních těles,



znázorněné plnými čarami v rovině (x^1, ct) , leží uvnitř tzv. světelného kuželu a mají časový charakter. Tento kužel je světelná vlnoplocha elektromagnetického signálu vyslaného z P_1 . Jeho průnik s rovinou (x^1, ct) je vyznačen čárkovanými přímkami jdoucími pod sklonem 45° k ose x^1 . Události P_1 a P_3 stejně tak jako všechny události spojené prostoropodobnými křivkami (jejichž sklon k ose x^1 je menší než 45°) nejsou v kauzálním vztahu. Minulý světelný kužel vyznačený šrafováním obsahuje události, které mohly být v principu kauzálně spojeny s P_1 . Prakticky

to znamená, že není možné okamžité působení na dálku. Nemohou tedy existovat ideálně tuhá tělesa, u nichž by poloha jednoho konce okamžitě reagovala na změnu polohy konce druhého.

Další důležitý relativistický jev, tzv. dilatace času, je rovněž důsledkem LT. Budeme porovnávat chod hodin v S a S' . Lze to provést tím způsobem, že zvolíme jedny hodiny H' v systému S' , tzn. hodiny, které mají v tomto systému konstantní prostorové souřadnice x'^1, x'^2, x'^3 . Porovnání jejich chodu s chodem hodin v S realizujeme tak, že budeme srovnávat údaj H' s údajem právě míjících hodin. Jinou možností je porovnávat údaj H' s údajem jedné pevných hodin v S (např. pomocí dalekohledu). V tom případě je třeba provést ještě opravu o dobu, kterou potřeboval signál z H' k proletění příslušné vzdálenosti. Poněvadž hodiny v S jsou synchronizovány, vedou oba postupy ke stejným výsledkům. Vybereme si nyní např. první metodu. Souvislost mezi časovým intervalem dt a odpovídajícím dt' (dt' může představovat jeden tik hodin H') je podle SLT

$$dt = t_2 - t_1 = \gamma (t_2' - t_1' + v(x_2'^1 - x_1'^1)) = \gamma dt' \quad (5.14)$$

($x_1'^1 = x_2'^1$, protože S' je klidový systém H').

Hodiny v S' jdou tedy pomaleji. Důležitou veličinou je vlastní čas τ - čas měřený v klidové soustavě. Pro naše hodiny H' je $\tau \equiv t'$.

Časoprostorový interval ds je invariant LT a stačí jej tudíž vypočítat v jednom systému. Výpočet v S' , kde jsou prostorové souřadnice konstantní ($dx'^1 = 0, i=1,2,3$), dává

$$ds^2 = -c^2 d\tau^2 \quad (5.15)$$

Druhá mocnina intervalu ds^2 je tedy, až na faktor $-c^2$, rovna čtverci vlastního času $d\tau^2$.

Všechny předchozí úvahy můžeme díky naprosté rovnoprávnosti

nosti S a S' , zajištěné vzájemnou reciprocitou vztahů STR, provést z opačného hlediska, tj. vypočítat dilataci času hodin H stojících v S vzhledem k hodinám systému S' . Zde někdy vzniká nejasnost, neboť výsledek prvního výpočtu (5.14) byl $dt = \gamma dt'$, zatímco nyní analogickým výpočtem dostáváme $dt' = \gamma dt$. Je však třeba si uvědomit rozdíl v obou situacích a tím i odlišný význam dt a dt' v prvním a druhém výpočtu. V prvním byly hodiny H' v klidu v systému S' a v pohybu vůči S . Jejich údaje t' jsme srovnávali s údaji řady synchronizovaných hodin systému S , které H' právě mijely. Při druhém výpočtu je tomu naopak. K prvnímu výsledku je třeba vždy dodat $x'^1 = \text{konst.}$, k druhému $x^1 = \text{konst.}$ ($i=1,2,3$).

Komplikovanější situace nastává, pokud se hodiny H' po čase opět vrátí do výchozího bodu v S , takže je možné jejich údaj porovnat podruhé s týmiž hodinami H . Těto úloze je věnována kapitola 7.

Nyní ještě proberme případ, kdy pozorovatel v S přijímá signály od (např.) vzdalujících se hodin H' , tj. porovnává údaje dvou hodin stojících ve dvou různých IS. Výsledek měření je ovlivněn relativistickým Dopplerovým jevem, který matematicky i fyzikálně elegantnějším způsobem odvodíme v kap.6. Nyní provedeme výpočet elementárním způsobem /21/. Interval mezi tiky hodin H' v jejich klidové soustavě S' označme opět dt' . Počátek prostorové osy x'^1 zvolíme v místě hodin H' . V okamžiku prvního tiky (událost P_1) je poloha H' v S (souvislejícím s S' přes SLT) rovna x_1^1

$$0 = x_1^1 = \gamma(x_1^1 - vt_1), \text{ tedy } x_1^1 = vt_1. \quad (5.16)$$

Signál se z události P_1 šíří rychlostí c a k pozorovateli v počátku doletí za dobu x_1^1/c . Na hodinách H umístěných v počátku S proto bude P_1 zaregistrováno v čase

$$t_1^{\text{obs}} = t_1 + x_1^1/c = x_1^1(v^{-1} + c^{-1}). \quad (5.17)$$

Také při druhém tiku P_2 je $x_2^1 = 0$,

$$x_2^1 = vt_2.$$

Označíme $dt' \equiv t_2' - t_1'$. Ze SLT máme

$$t_2 = \gamma t_2', \quad (5.19)$$

$$t_2' = dt' + x_1^1 / (\gamma v) \quad (5.20)$$

a porovnáním posledních dvou vztahů

$$t_2 = \gamma dt' + x_1^1 / v. \quad (5.21)$$

Čas pozorování druhého tiky je

$$t_2^{\text{obs}} = t_2 + x_2^1/c = \gamma dt' + x_1^1/v + \beta \gamma dt' + x_1^1/c. \quad (5.22)$$

Naměřená doba mezi tiky je tedy

$$\begin{aligned}
 dt^{\text{obs}} &\equiv t_2^{\text{obs}} - t_1^{\text{obs}} = \gamma (1 + \beta) dt' = \\
 &= \left(\frac{1 + \beta}{1 - \beta} \right)^{1/2} dt' . \quad (5.23)
 \end{aligned}$$

To je odlišné od vztahu $dt = \gamma dt'$, který jsme vypočetli dříve jakožto dilataci času. Rozdíl je způsoben Dopplerovým jevem. Vzorec (5.14) určuje souvislost údajů pohybujících se hodin H' s právě míjícími hodinami H v S , zatímco (5.23) porovnává chod H' se stojícími hodinami H na jediném místě v S .

•Přeručíme na tomto místě studium vlastností SLT, které by mohlo být obsahem samostatné knihy. Pouze ještě uvedeme užitečné vztahy pro transformaci rychlostí a zrychlení, které lze odvodit derivováním (5.2). Rychlost $u^1 = dx^1/dt$ resp. zrychlení $a^1 = du^1/dt$ vzhledem k S (ve směru osy x^1) souvisejí s rychlostí $u'^1 = dx'^1/dt'$ resp. zrychlením $a'^1 = du'^1/dt'$ vzhledem k S' vztahy

$$u^1 = \frac{u'^1 - v}{1 - u'^1 v/c^2} , \quad a^1 = \frac{1}{\gamma^3} \frac{a'^1}{(1 - u'^1 v/c^2)^3} , \quad (5.24)$$

neboli

$$u^1 = \frac{u'^1 + v}{1 + u'^1 v/c^2} , \quad a^1 = \frac{1}{\gamma^3} \frac{a'^1}{(1 + u'^1 v/c^2)^3} . \quad (5.25)$$

O něco komplikovanější vztahy platí také pro ostatní složky rychlosti a zrychlení. Je-li S' klidovým systémem tělesa ($u'^1 = 0$, $u^1 = v$), je podle (5.25)

$$a^1 = a'^1 / \gamma^3 . \quad (5.26)$$

Nechť se těleso pohybuje nepravidelně a nechť S' je takový IS, v němž je těleso v daném čase v klidu. Za okamžik bude hrát roli S' jiný IS, který se pohybuje vůči S posměněnou rychlostí v . Zrychlený pozorovatel může nést s sebou hodiny a měřicí tyče a použít je pro vytvoření vlastního souřadného systému ve svém okolí. Jsou-li jeho hodiny vhodně zkonstruovány, nezávisí jejich chod na velikosti zrychlení. To není nikterak triviální skutečnost. Můžeme si představit např. elektrické hodiny, jejichž zdroj je připojen přes spínač rozpojovací obvod při různých otřesech a jiných nerovnoměrnostech v pohybu. Takové hodiny se při zrychlení úplně zastaví. Ostatně i chod kyvadlových hodin je nerovnoměrným pohybem ovlivněn. Na druhé straně stálost chodu atomových hodin byla ověřena až do extrémně vysokých hodnot jejich zrychlení. Tyto hodiny "tikají" v okamžitém IS stejně, jako jejich identická kopie, kterou si s sebou nese urychlený pozorovatel na tělese. Lze to ověřit právě při jejich vzájemném přiblížení.

Rovnoměrně zrychleným pohybem rozumíme v STR takový pohyb, při němž je zrychlení v okamžitém IS konstantní ($a'^1 = \text{konst.}$ v případě pohybu podél první osy). Můžeme jej realizovat tak, že těleso umístíme na raketu vyvíjející svými motory konstantní tah. Přesná analogie newtonovského rovnoměrně zrychleného pohybu, tj. pohybu s konstantním zrychlením a v S, není možná z několika důvodů. Především jsme již uvedli, že rychlost světla je v STR mezní rychlostí, nad níž nelze žádné těleso urychlit, takže zrychlení nemůže být v jednom IS konstantní libovolně dlouhou dobu. Navíc ze vztahů (5.24), (5.25) vyplývá, že konstantnost zrychlení v jednom IS neznámá jeho konstantnost také v ostatních, je to relativní pojem. Zjednodušíme označení zavedením $a'^1 \equiv a$. Integrací (5.26) dostaneme

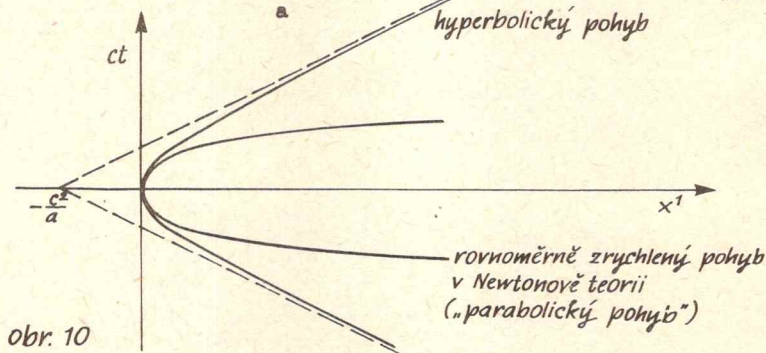
$$\gamma v = at \quad (5.27)$$

s počáteční podmínkou $v(t=0) = 0$ (připomeňme, že $v \equiv u^1$). (5.27) lze přepsat ve tvaru

$$v = at / \sqrt{1 + (at/c)^2} \quad (5.28)$$

Zřejmě po dostatečně dlouhé době ($t \rightarrow \infty$) se rychlost tělesa v S asymptoticky blíží rychlosti světla ($v \rightarrow c$). Integrací (5.28) s počáteční podmínkou $x^1(t=0) = 0$ nalezneme závislost dráhy na čase

$$x^1 = c^2 \frac{\sqrt{1 + (at/c)^2} - 1}{a} \quad (5.29)$$



obr. 10

V rovině (x^1, ct) je světočárou tělesa hyperbola (obr. 10). Proto se rovnoměrně zrychlený pohyb v STR obvykle nazývá hyperbolický.

Zapamatujme si především skutečnost, že pohyb zrychlených těles je možné studovat v rámci STR. Nezávislost chodu atomových hodin byla metodami jaderné fyziky ověřena až do zrychlení převyšujících o 28 řádů zrychlení na zemském povrchu.

6. Další vztahy speciální teorie relativity

Dosud jsme pracovali s prostoro-časovým (3+1) zápisem vztahů STR. Přírozenější a po matematické stránce snazší je přístup, v němž čas vystupuje jako jedna ze souřadnic čtyřrozměrného časoprostoru. V newtonovské mechanice určujeme časovou závislost třírozměrných vektorů, skalárů a dalších veličin potřebných pro popis pohybu. Nyní budeme hledat jejich čtyřdimenzionální analogie - čtyřvektory a skaláry Minkowského časoprostoru.

Připomenme ještě jednou pojem (kontravariantního) tenzoru. Tenzorem nultého řádu - skalárem ϕ - jsme označili veličinu, která je při transformaci souřadnic $x^\mu \rightarrow x'^\mu(x^\nu)$ neměnná, tj. $\phi(x^\mu) = \phi(x'^\mu)$. Příkladem může být ds^2 . Zavedeme veličiny

$$\eta_{\mu\nu} \equiv \eta'^{\mu\nu} \equiv \begin{cases} -1 & \text{pro } \mu = \nu = 0 \\ 1 & \text{pro } \mu = 1, 2, 3 \\ 0 & \text{pro } \mu \neq \nu \end{cases} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (6.1)$$

$$a \text{ ct} \equiv x^0. \quad (6.2)$$

Pak lze (5.8) přepsat ve tvaru

$$ds^2 = \sum_{\nu=0}^3 \sum_{\mu=0}^3 \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (6.3)$$

Starý zápis ds^2 je ekvivalentní s novým, pouze je třeba mít na paměti převodní vztah (6.2), z něhož plyne $dx^4 = i dx^0$. Jejich použití rozeznáme např. podle toho, jakých hodnot nabývají indexy (1,2,3,4 resp. 0,1,2,3). Tenzor 1. řádu v Minkowského časoprostoru - čtyřvektor \underline{V} - je veličina, jejíž komponenty V^μ se transformují podle vztahu

$$V'^{\mu} = \sum_{\beta=0}^3 \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\beta}} V^{\beta}. \quad (6.4)$$

Skalár můžeme vytvořit ze dvou čtyřvektorů \underline{V} a \underline{W} skalárním součinem

$$\underline{V} \cdot \underline{W} \equiv \sum_{\mu,\nu} \eta_{\mu\nu} V^\mu W^\nu = V^1 W^1 + V^2 W^2 + V^3 W^3 - V^0 W^0. \quad (6.5)$$

Ve třírozměrném prostoru vyjadřoval skalární součin vektoru s ním samým (2.20) jeho délku a byl roven nule pouze tehdy, když byly nulové všechny složky vektoru. V Minkowského časoprostoru je tomu díky znaménku minus v (6.5) jinak - nulový vektor nemusí mít všechny komponenty nulové. Důležitým příkladem čtyřvektoru nám může být čtyřrychlost \underline{U} tělesa. Je-li jeho pohyb popsán rovnicí světočáry $x^\mu \equiv x^\mu(\tau)$, kde τ je vlastní čas tělesa podél světočáry, jsou složky čtyřrychlosti

$$U^\mu \equiv dx^\mu(\tau)/d\tau. \quad (6.6)$$

\underline{U} má skutečně správné transformační vlastnosti, neboť $dx^\mu(\tau)$

je čtyřvektor, zatímco $d\tau$ je skalár. Ze vzorce pro dilataci času máme $dt = \gamma d\tau$, takže můžeme vyjádřit komponenty čtyřrychlosti ve tvaru

$$U^j = dx^j/d\tau = \gamma dx^j/dt = \gamma u^j, \quad j = 1, 2, 3, \quad (6.7)$$

$$U^0 = cdt/d\tau = \gamma c,$$

kde u^j jsou obvyklé složky vektoru rychlosti \vec{u} . Často se používá zápis

$$U^\mu = \gamma (c, \vec{u}) \quad (6.8)$$

Snadno vypočteme "délku" čtyřrychlosti

$$\underline{U}^2 = \sum_{\mu, \nu} \eta_{\mu\nu} U^\mu U^\nu = \gamma^2 (u^2 - c^2) = -c^2. \quad (6.9)$$

Tato veličina je konstantní, záporná, a čtyřrychlost je proto časového charakteru. Čtyřzrychlení je definováno přirozeně jako

$$A^\mu \equiv dU^\mu/d\tau. \quad (6.10)$$

Z (6.9) plyne

$$d(\sum_{\mu, \nu} \eta_{\mu\nu} U^\mu U^\nu)/d\tau = 2 \sum_{\mu, \nu} \eta_{\mu\nu} U^\mu A^\nu = 0, \text{ tj. } \underline{U} \cdot \underline{A} = 0. \quad (6.11)$$

To je analogie podmínky pro kolmost vektorů. Poznamenejme ještě, že není a priori zřejmé, zda \underline{A} a všechny další veličiny odvozené derivováním čtyřvektoru x^μ jsou opět čtyřvektory. Přímý výpočet ukazuje, že tomu tak je, pokud uvažujeme lineární transformace, mezi něž LT patří:

$$\begin{aligned} A'^\mu &= dU'^\mu/d\tau = d\left(\sum_{\alpha} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} U^\alpha\right)/d\tau = \\ &= \sum_{\alpha} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{dU^\alpha}{d\tau} + \sum_{\alpha, \beta} U^\alpha \frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \frac{dx^\beta}{d\tau} = \\ &= \sum_{\alpha} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} A^\alpha. \end{aligned} \quad (6.12)$$

Dalšími důležitými čtyřvektory, které jsou analogiemi newtonovských veličin, jsou čtyřhybnost, čtyřproud a čtyřsíla. S vektory, které známe z Newtonovy teorie, souvisejí následujícím způsobem.

Čtyřhybnost

$$p^\alpha \equiv mU^\alpha = \gamma m(c, \vec{u}), \quad (6.1)$$

kde m je tzv. klidová hmotnost tělesa (hmotnost určená v IS, ve kterém je těleso v klidu - tedy zřejmý skalár). Zjevně podle (6.9)

$$\underline{p}^2 = -m^2 c^2. \quad (6.1)$$

Prostorovou část \underline{p} lze zapsat ve tvaru

$$\vec{F} = M\vec{u} \quad , \quad \text{kde } M = \gamma m \quad . \quad (6.15)$$

Faktor $\gamma > 1$ vyjadřuje známý vzrůst hmotnosti částice oproti hmotnosti určené v jejím klidovém IS. Čtyřproud vytvořený tokem nabitých částic

$$J^\mu \equiv \rho U^\mu = (\tilde{\rho}c, \vec{J}) \quad , \quad \text{kde } \tilde{\rho} \equiv \rho\gamma \quad , \quad (6.16)$$

\vec{J} je hustota proudu a $\tilde{\rho} = q\delta(x^m(t) - x^m)$ je hustota náboje tělesa, které v tomto případě představuje bodová částice s nábojem q . Proto je ve vzorci Diracova δ -funkce vyjadřující nenulovost hustoty náboje pouze v jediném bodě - tam, kde je částice právě lokalizována - přičemž celkové množství náboje je $\int \tilde{\rho} dV = q$. O tomto bliže viz např. /20/. Kdybychom neuvažovali jedinou bodovou částici, ale spojité rozložení náboje v nějaké oblasti prostoru, psali bychom $\tilde{\rho}(x^\mu)$. Rozdíl $\tilde{\rho} - \rho$ vyjadřuje další důsledek LT - vzrůst hustoty náboje v pohybujícím se tělese.

Konečně tenzor druhého řádu je veličina, která se transformuje podle pravidla

$$F^{\mu\nu} = \sum_{\alpha=0}^3 \sum_{\beta=0}^3 \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} F^{\alpha\beta} \quad . \quad (6.17)$$

Zde je důležitým příkladem tenzor elektromagnetického pole, který lze vyjádřit pomocí složek vektoru elektrické intenzity \vec{E} a magnetické indukce $\vec{B}/2/$

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E^1/c & E^2/c & E^3/c \\ -E^1/c & 0 & B^3 & -B^2 \\ -E^2/c & -B^3 & 0 & B^1 \\ -E^3/c & B^2 & -B^1 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.18)$$

Pro tento tenzor je možné zapsat rovnice, které poprvé formuloval Maxwell. Jejich objev je jedním z vrcholů lidského bádání, neboť jednotně vysvětlují chování elektromagnetického pole a spojují tak jevy elektrické s magnetickými. Mezi jejich nejdůležitější důsledky patří zákon zachování elektrického náboje, zákon zachování energie v elektromagnetickém poli a rovnice pro šíření elektromagnetických vln. Plyne z nich, že rychlost šíření elektromagnetického vlnění - světla - ve vakuu je konstantní. Tvar rovnice je invariantní při LT (nikoli při Galileově transformaci).

Zbývá napsat relativistickou analogii Newtonova zákona - pohybovou rovnici. Newtonova teorie postuluje tuto rovnici ve druhém zákoně (3.1). Tvar čtyřsíly F je třeba, stejně jako tomu bylo v Newtonově teorii, nalézt nezávislým postupem. Hmotnosti M_S odpovídá v STR veličina M ; (v klidovém IS je $M=m$). V případě gravitační interakce dvou částic s hmotnostmi M_S a m_S má newtonovská síla tvar (3.7)

$$\vec{f}_{\text{grav.}} = -G \frac{M_S m_S}{r^3} \vec{r}_0 \quad . \quad (6.19)$$

Ukazuje se, že podobně jako není správnou teorií gravitace teorie Newtonova, nelze gravitační působení popsat ani v rámci STR. Ponechme proto nyní gravitační interakci stranou.

Na částici s elektrickým nábojem q umístěnou v elektromagnetickém poli působí Lorentzova síla

$$\vec{f}_{\text{emg}} = q(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}) \quad (6.20)$$

(vektorový součin je v kartézských souřadnicích definován vztahem

$$\vec{u} \times \vec{B} = \begin{pmatrix} u^2 B^3 - u^3 B^2 \\ u^3 B^1 - u^1 B^3 \\ u^1 B^2 - u^2 B^1 \end{pmatrix} .$$

Pohybová rovnice STR má tvar

$$F^\mu = dP^\mu/d\tau \quad (6.21)$$

Vzorec (6.20) neplatí pouze pro částice pohybující se pomalu ($u \ll c$), ale i pro relativistické částice ($u \rightarrow c$). To je experimentálně ověřený fakt a musíme jej vzít v úvahu při výběru vhodného tvaru čtyřsíly F . Lorentzovsky invariantní pohybová rovnice, jejíž prostorová část je identická se vztahem (6.20), má tvar

$$dP^\mu/d\tau = q \sum_{\alpha=0}^3 \sum_{\beta=0}^3 \eta_{\alpha\beta} U^\alpha F^{\mu\beta}, \quad \mu = 0, 1, 2, 3. \quad (6.22)$$

Čtenář se o tom může přesvědčit dosazením z (6.18) pro $\mu = 1, 2, 3$. Nulová komponenta dává po rozepsání

$$\frac{d(\gamma mc^2)}{dt} = q \vec{E} \cdot \vec{u} \quad , \quad \text{tj.} \quad \frac{d(Mc^2)}{dt} = \vec{f} \cdot \vec{u} \quad (6.23)$$

Pravá strana má význam změny energie tělesa (působením elektromagnetického pole). Veličinu

$$E = Mc^2 \quad (6.24)$$

interpretujeme jako jeho celkovou energii. Od své nejmenší hodnoty $E_{\text{klid.}} = mc^2$, kterou nabývá v klidovém IS, se liší o kinetickou energii $E_{\text{kin.}} = (M-m)c^2 = (\gamma - 1)mc^2 \approx \frac{1}{2} mu^2$.

Pomocí již dříve zmíněného Taylorova vzorce jsme tak dospěli ke známému výrazu pro kinetickou energii tělesa, který ovšem platí pouze při $u \ll c$. V nerelativistické fyzice žádný obecný vztah mezi energií a (setrvačnou) hmotností tělesa není, zcela nezávisle platí zákon zachování energie a zákon zachování hmoty. Experimentální ověření (6.24) přinesla fyzika elementárních částic. Za obvyklých podmínek je totiž odchylka celkové energie makroskopických těles od klidové energie neměřitelná. Teprve pokusy na urychlovačích udělujících

částicím vysoké rychlosti ukázaly, že setrvačná hmotnost skutečně závisí na rychlosti podle vztahu $M = \gamma m$ a že platí

$$\gamma = \frac{E}{E_{\text{klid.}}} = \frac{E_{\text{klid.}} + E_{\text{kin.}}}{E_{\text{klid.}}} \quad (6.25)$$

Nelze proto urychlováním částice dosáhnout rychlosti $u \geq c$. Další ověření (6.24) plyne z tzv. hmotového defektu: rozdíl Δm mezi hmotností atomového jádra a součtem klidových hmotností protonů a neutronů, které jádro tvoří, se uvolní při jeho vzniku ve formě záření s energií $\Delta m c^2$.

Přímým důsledkem vybudované teorie je také existence Dopplerova jevu a aberace. Ze vztahu (6.14) plyne vyjádření čtyřvektoru \underline{P} pomocí jednotkového vektoru $\vec{n} = \underline{P}/|\underline{P}|$, který má směr vektoru hybnosti \underline{P} :

$$P^\alpha = |\underline{P}| \left(\sqrt{1 + m^2 c^2 / |\underline{P}|^2}, \vec{n} \right) \quad (6.26)$$

V dalším použijeme fundamentální výsledek kvantové teorie /např. 8, kap. 3/, podle níž je možné chápat elektromagnetické vlnění též jako proud částic - fotonů - s energií $E = h\nu$ a hybností $|\underline{P}| = h\nu/c$ (ν je frekvence záření a $h = 6.626 \cdot 10^{-34}$ Js je Planckova konstanta). Ostatně i tyto vztahy jsou těsně spjaty s Einsteinovým jménem, neboť stojí v základu jeho objasnění fotoelektrického jevu. Fotony se pohybují rychlostí c , a proto pro ně $m = 0$,

$$P^\alpha = \frac{h\nu}{c} (1, \vec{n}) \quad , \quad \underline{P}^2 = 0 \quad (6.27)$$

Mějme tedy foton elektromagnetického záření popsaný v S čtyřhybností (6.27). Přijme-li jej pozorovatel v S' související s S přes SLT, bude pozorovat záření s pozměněnou čtyřhybností

$$P'^\alpha = \sum_{\beta=0}^3 \Lambda_\beta^\alpha P^\beta \quad (6.28)$$

kde $\Lambda_0^0 = \Lambda_1^1 = \gamma$, $\Lambda_1^0 = \Lambda_0^1 = -\beta\gamma$, $\Lambda_2^2 = \Lambda_3^3 = 1$ a ostatní

nulové. Důsledkem této prosté transformace čtyřvektoru \underline{P} je změna frekvence $\nu \rightarrow \nu'$ a směru šíření $\vec{n} \rightarrow \vec{n}'$:
Z časové komponenty čtyřhybnosti nalezneme

$$\nu' = \frac{c}{h} P'^0 = \frac{c}{h} \sum_{\beta=0}^3 \Lambda_\beta^0 P^\beta = \frac{c}{h} \gamma (P^0 - \beta P^1) = \quad (6.29)$$

$$= \gamma \nu (1 - \beta n^1).$$

Pohybuje-li se foton v kladném resp. záporném směru osy x^1 , je $\beta > 0$ resp. $\beta < 0$,

$\vec{n}' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, takže (6.29) přejde na tvar

$$\nu' = \nu \left(\frac{1 - \beta}{1 + \beta} \right)^{1/2} \quad (6.30)$$

V prvním přiblížení (pro $\beta \ll 1$)

$$\nu' \cong \nu (1 - \beta), \text{ tj. } \frac{\Delta \nu}{\nu} \cong \beta = \frac{v}{c}, \quad (6.31)$$

což odpovídá posuvu frekvence k rudému resp. modrému konci spektra. Tento vztah, který má základní význam v astronomii, jsme odvodili již v kap. 5, kde bylo $\nu = 1/dt'_{\text{obs}}$, $\nu' = 1/dt'$ (srov. (5.23)). Formuli pro aberaci dostaneme transformací prostorové části P.

$$n^i = \frac{c}{h\nu'} P^i = \frac{c}{h\nu'} \sum_{\alpha=0}^3 \Lambda_{\alpha}^i P^{\alpha}, \quad i=1,2,3. \quad (6.32)$$

Odtud užitím (6.27), (6,29)

$$\begin{aligned} n^1 &= \frac{c}{h\nu\gamma(1-\beta n^1)} \gamma (P^1 - \beta P^0) = \frac{n^1 - \beta}{1 - \beta n^1}, \\ n^2 &= \frac{c}{h\nu\gamma(1-\beta n^1)} P^2 = \frac{n^2}{\gamma(1-\beta n^1)}, \\ n^3 &= \frac{n^3}{\gamma(1-\beta n^1)}. \end{aligned} \quad (6.33)$$

Zvolíme-li pro ilustraci směr pohybu fotonu v S tak, že

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -\cos\vartheta \\ -\sin\vartheta \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ tj. v rovině } (x^1, x^2), \quad (6.34)$$

dostaneme pro jeho směr v S'

$$\cos\vartheta' = \frac{\cos\vartheta + \beta}{1 + \beta \cos\vartheta}, \quad \sin\vartheta' = \frac{\sin\vartheta}{\gamma(1 + \beta \cos\vartheta)}. \quad (6.35)$$

Neméně zajímavé důsledky plynou z transformace tenzoru elektromagnetického pole (6.18). Zvolme jednoduchý případ: v S existuje pouze elektrostatické pole ve směru osy x^2 , tj.

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} 0 \\ E \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad F^{02} = -F^{20} = E/c. \text{ Pak}$$

v S' změříme

$$\begin{aligned} F^{\mu\nu} &= \sum_{\alpha,\beta} \Lambda_{\alpha}^{\mu} \Lambda_{\beta}^{\nu} F^{\alpha\beta} = (\Lambda_0^{\mu} \Lambda_2^{\nu} - \Lambda_2^{\mu} \Lambda_0^{\nu}) E/c = \\ &= E \begin{pmatrix} 0 & 0 & \gamma/c & 0 \\ 0 & 0 & -\beta\gamma & 0 \\ -\gamma/c & \beta\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (6.36)$$

Vektor elektrické intenzity v S' je

$$\vec{E}' = \begin{pmatrix} 0 \\ \gamma E \\ 0 \end{pmatrix} \text{ a navíc se objevilo magnetické pole}$$

$$\vec{B}' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\beta\gamma E \end{pmatrix}.$$

Magnetické pole, které bylo původně studováno odděleně od elektrického, je podle STR vlastností pohybujících se elektrických nábojů. Např. magnetické pole v okolí vodiče protékajícího proudem je způsobeno pohybem elektronů ve vodiči. V klidovém IS elektronů pozorujeme pouze jejich elektrostatické Coulombovo pole.

7. Paradox hodin

...Paradox hodin může být plně vyřešen v termínech speciální teorie relativity. Správně aplikována dává teorie jedinou a jednoznačnou hodnotu relativního opožďování dvou hodin. Zdánlivý paradox může vzniknout pouze užitím "rychlosti" pohybujících se hodin bez zřetele na skutečný význam takto vyjádřené veličiny. Princip ekvivalence je zcela irelevantní k analýze a diskusi relativní retardace hodin, pokud není třeba uvažovat skutečné gravitační pole, a s výjimkou tohoto případu nemůže obecná teorie relativity přidat nic fyzikálně podstatného k popisu provedenému správně s užitím speciální teorie relativity.

G. Builder

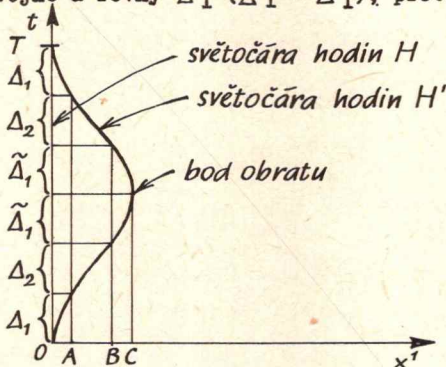
V této kapitole se budeme věnovat jednomu z nejproslulejších fyzikálních problémů, který byl nesčetněkrát s různými obměnami formulován a nesčetněkrát (s různými výsledky) řešen. Diskuse přerostly okruh vědců zabývajících se teorií relativity a pokračují dodnes, i když konjunktura z konce padesátých let již opadla. Tehdy uvedly časopisy Nature, American Journal of Physics, Australian Journal of Physics a další řadu článků na toto téma. V zajímavě napsané monografii /9/ (u nás je dostupná v ruském překladu) nalezne čtenář vysvětlení mnoha otázek a navíc 325 citací na další práce.

Shrneme podstatu problému: Dva pozorovatelé vybavení hodinami H a H' se nejprve nalézají v počátku jednoho inerciálního systému a svoje hodiny mohou tedy snadno synchronizovat. V okamžiku $t = t' = 0$ se hodiny H' začnou pohybovat v kladném směru osy x^1 inerciálního systému spojeného s H . Jejich světočára je znázorněna na obr. 11. Předpokládejme pro zjednodušení výpočtů, že zrychlení a hodin H' je konstantní, tzn. že pro jejich pohyb platí vztahy rovnoměrně zrychleného (hyperbolického) pohybu z konce 5. kapitoly. Když

po čase Δ_1 (měřeno v IS hodin H) dosáhnou bodu A na ose x^1 , přestane urychlující síla působit a hodiny se až do bodu B pohybují rovnoměrně přímočaře. Jejich rychlost je podle (5.28)

$$v = a\Delta_1 / \sqrt{1 + (a\Delta_1/c)^2}, \quad a = \text{konst.} > 0. \quad (7.1)$$

V bodě B začne působit zrychlení $-a$, tentokrát proti směru pohybu, takže po čase Δ_1 se pohyb H' vůči H v bodě C zastaví a hodiny se počnou stejným způsobem vracet. Časové intervaly odpovídající pohybu mezi body $O \rightarrow A$, $B \rightarrow C$, $C \rightarrow B$, $A \rightarrow O$ jsou stejné a rovny Δ_1 ($\tilde{\Delta}_1 = \Delta_1$), protože pro jednoduchost



obr. 11

předpokládáme konstantní, vždy stejnou velikost zrychlení ("stálý tah motorů"). Analogicky časový interval Δ_2 odpovídá pohybu mezi body $A \rightarrow B$, $B \rightarrow A$. Celková doba pohybu měřená hodinami H je tudíž dána součtem

$$T = 4\Delta_1 + 2\Delta_2. \quad (7.2)$$

Hodiny H' budou při opětovném porovnání s H v bodě O ukazovat

$$T' = 4\Delta_1' + 2\Delta_2'. \quad (7.3)$$

(Interval Δ_1' odpovídají údajům naměřeným hodinami H' během jejich zrychleného pohybu, Δ_2' během rovnoměrného přímočarého pohybu). Dosazením (7.1) do vztahu (5.14) a integrací dostaneme

$$\Delta_1' = \int_0^{\Delta_1} dt/\gamma = \int_0^{\Delta_1} dt/\sqrt{1 + (at/c)^2} = \frac{c}{a} \operatorname{argsh} \frac{a\Delta_1}{c}. \quad (7.4)$$

Ze (7.4) a (7.1) plyne

$$\operatorname{sh} \frac{a\Delta_1'}{c} = \frac{a\Delta_1}{c} = \beta\gamma. \quad (7.5)$$

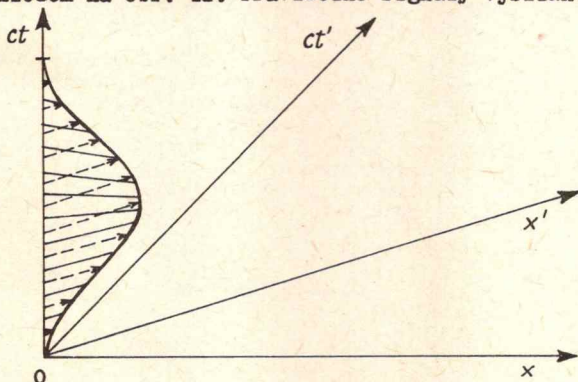
Stejně tak dostaneme z (5.14) vztah pro časové intervaly, kdy $v = \text{konst.}$

$$\Delta_2 = \gamma \Delta'_2 \quad (7.6)$$

Vztah mezi výslednými údaji hodin T a T' dostaneme dosazením (7.5) a (7.6) do (7.2) a (7.3). Provedeme-li ve vzorcích (7.5), (7.6) limitní přechod pro $a \rightarrow \infty$, $v = \text{konst.}$, tj. zkoumáme-li jejich chování v případě, že maximální dosažená rychlost je pevně dána, ale zrychlení a se zvyšuje (zkracuje se doba, po kterou zrychlení působí), zjistíme, že $\Delta_1 \rightarrow 0$, $\Delta'_1 \rightarrow 0$, $\Delta_2 = \gamma \Delta'_2$. Vztah mezi výslednými údaji hodin je v tom případě

$$T = \gamma T' \quad (7.7)$$

Tento výsledek je příčinou uvedeného množství diskusí. Přede vším zdůrazněme, že jde o řešení v rámci STR a není pravda, že by tuto úlohu bylo třeba odsunout až do OTR pouze proto, že pozorovatel nesoucí hodiny H' se v některých fázích nepohybuje rovnoměrně (vztahy pro hyperbolický pohyb či záření urychlených nábojů patří právě k důležitým výsledkům STR). Z výsledku také neplatí, že by v okamžiku obrátky pozoroval kosmonaut nesoucí na raketě hodiny H' nějaké zvláštní úkazy, kdyby na dálku kontroloval chod hodin H (např. jestliže by dalekohledem pozoroval jejich obíhající ručičky nebo přijímal sekundové signály rádiem). Dobře si celou situaci vyjasníme pohledem na obr. 12. Pravidelné signály vysílané hodinami H



obr.12

se v tomto diagramu pohybují pod 45° a jsou znázorněny čárkovaně. Plné šikmé čáry spojují některé události současné z hlediska čárkovaného pozorovatele. Jejich rovnice plyne ze SLT, která určuje vztah mezi klidovými systémy S a S' obou hodin v průběhu rovnoměrného pohybu. Osa Oct' je tvořena množinou událostí, pro něž $x' = 0$. V první fázi pohybu, tj. při vzdalování rychlostí $+v$, je podle SLT (5.2) její rovnice $x = vt$, takže v našem diagramu je to přímka se směrnici $\beta = v/c$. Analogicky osa Ox' je tvořena událostmi, pro které je $t' = 0$ a její rovnice je $x = c^2t/v$ (směrnice $1/\beta$). Přímkou $x - c^2t/v = \text{konst.}$ jsou rovnoběžné s Ox' a představují linie současnosti