KOSMICKÉ ROZHLEDY

ROČNÍK 23 (1985) ČÍSLO 3

NEPERIODICKÝ VĚSTNÍK ČESKOSLOVENSKÉ ASTRONOMICKÉ SPOLEČNOSTI PŘI ČSAV

KOSMICKÉ ROZHLEDY, neperiodický věstník
Československé astronomické společnosti
při Československé akademii věd

ročník 23 (1985) číslo 3

Vladimír Karas

Základní principy a výsledky speciální teorie relativity. (Pokračování z č. 2/1985)

5. Lorentzova transformace a některé její důsledky

Nyní pohovoříme o Lorentzově transformaci (LT), tedy o transformaci, která udává vztah mezi souřadnicemi x^μ nějaké události pozorované z inerciálního systému S a souřadnicemi x'^μ téže události sledované z jiného inerciálního systému S'(x^1, x^2, x^3 jsou jako dříve prostorové souřadnice, $x^4 \equiv ict$ časová). S odvozením této transformace se čtenář setká v úvodu učebnic STR; ve zjednodušeném případě v /8, kap. 1/, podrobně např. v /20, kap. IV/. Dva dříve uvedené postuláty STR doplňujeme z fyzikálních důvodů ještě požadavkem, že volné hmotné body se pohybují s nulovým zrychlením. Ten je již ostatně obsažen ve skutečnosti, že hledáme transformační vztah mezi IS.

Obecný tvar lineární transformace je

$$x'^\mu = \sum_{\nu=1}^{4} \Lambda_\nu^\mu x^\nu + a^\mu \quad , \quad \mu = 1,2,3,4 \qquad (5.1)$$

kde Λ_ν^μ jsou konstanty, jejichž velikost může záviset na vzájemné rychlosti systémů S a S' a na rychlosti šíření signálů c. Konstanty a^μ charakterizují pouze vzájemné posunutí počátků obou soustav (když jsou $x^\mu=0$, potom $x'^\mu = a^\mu$), a my se proto budeme věnovat pouze jednodušším transformacím s $a^\mu = 0$ (tzv. homogenní transformace).

Základní vlastnosti LT je možno demonstrovat na jejím nejsnazším příkladu - speciální Lorentzově transformaci (SLT). Tímto termínem označujeme LT, která splňuje předpoklady, že

1. osy x^1 a x'^1 splývají,
2. osy x^2 a x'^2 resp. x^3 a x'^3 jsou rovnoběžné a splývají v čase $t=t'=0$,
3. všechny osy mají stejnou orientaci (viz obr. 6).

SLT je tedy transformace od systému S k S', který se pohybuje ve směru osy x^1 rychlostí +v. Z postulátů STR a právě uvedených požadavků plyne tvar SLT:

$$x' = \gamma(x-vt),\ y'=y\ ,\ z'=z\ ,\ t'=\gamma(t-vx/c^2)\ , \qquad (5.2)$$

tj. $$x'^1 = \gamma(x^1+i\beta x^4),\ x'^2=x^2,\ x'^3=x^3,\ x'^4=\gamma(x^4-i\beta x^1), \qquad (5.3)$$

kde $\beta \equiv v/c$, $\gamma \equiv 1/\sqrt{1-\beta^2}$.

Přímým výpočtem se můžeme přesvědčit, že princip relativity je skutečně splněn. Závislost nečárkovaných souřadnic na čárkovaných má totiž stejný tvar jako v (5.2) až na znaménko u rychlosti v, což vyjadřuje skutečnost, že orientace rychlosti systému S pozorovaného z S' je opačná oproti orientaci S' pozorovaného z S. Tato vlastnost inverzní transformace byla z hlediska Lorentzovy kontrakční hypotézy náhodná, v STR má však hlubší příčinu - princip relativity.

Podle rovnice (5.3) tedy víme, že při SLT mají konstanty $\Lambda_\nu{}^\mu$ hodnoty

$$\Lambda_1{}^1 = \Lambda_4{}^4 = \gamma\ ,\ \Lambda_4{}^1 = -\Lambda_1{}^4 = i\beta\gamma\ ,\ \Lambda_2{}^2 = \Lambda_3{}^3 = 1\ ,$$

ostatní jsou nulové. Dalším speciálním případem LT je prostorová rotace popsaná vztahy (2.1) + (2.3). Stačí ztotožnit

$$\Lambda_j{}^i = A_j^i\ ,\ \Lambda_4{}^4 = 1\ ,\ \Lambda_4{}^1 = \Lambda_i{}^4 = 0 \quad \text{pro } i,j=1,2,3.$$

Výhodnost zavedení souřadnice x^4 místo času t, který má přímý fyzikální význam, spočívá ve formální matematické podobnosti mezi prostorovou rotací a SLT. Povšimněme si, že platí

$$\gamma^2 + (i\beta\gamma)^2 = 1 \quad , \qquad (5.4)$$

takže můžeme SLT (5.3) vyjádřit pomocí "úhlu" ψ definovaného vztahy

$$\gamma \equiv \cos\psi\ ,\ i\beta\gamma \equiv \sin\psi\ . \qquad (5.5)$$

Pro přehlednost a s užitím nového značení přepíšeme vztah (2.1) vyjadřující prostorovou rotaci kolem osy x^2 o úhel φ, a (5.3) pro SLT ve směru osy x^1 na rychlost v vyjádřenou pomocí "úhlu" ψ :

$$\begin{array}{ll}
x'^1 = x^1\cos\varphi + x^3\sin\varphi & x'^1 = x^1\cos\psi + x^4\sin\psi \\
x'^2 = x^2 & x'^2 = x^2 \\
x'^3 = x^3\cos\varphi - x^1\sin\varphi & x'^3 = x^3 \\
x'^4 = x^4 & x'^4 = x^4\cos\psi - x^1\sin\psi\ .
\end{array} \qquad (5.6)$$

V prvním případě mluvíme o prostorové rotaci v rovině (x^1,x^3), ve druhém obrazně o "rotaci" v Minkowského rovině (x^1,x^4). Každá událost je určena bodem v prostoročase. Otočení v Minkowského rovině charakterizuje výsledky měření souřadnic téže události v souřadných systémech souvisejících navzájem pomocí SLT. Je třeba mít na paměti, že přes formální podobnost má imaginární souřadnice x^4 zcela odlišným význam než reálné prostorové souřadnice x^1, x^2, x^3. Proto není možné rotaci v Minkowského rovině názorně zakreslit, jako tomu bylo u prostorové rotace (obr. 3). Existuje ovšem grafické