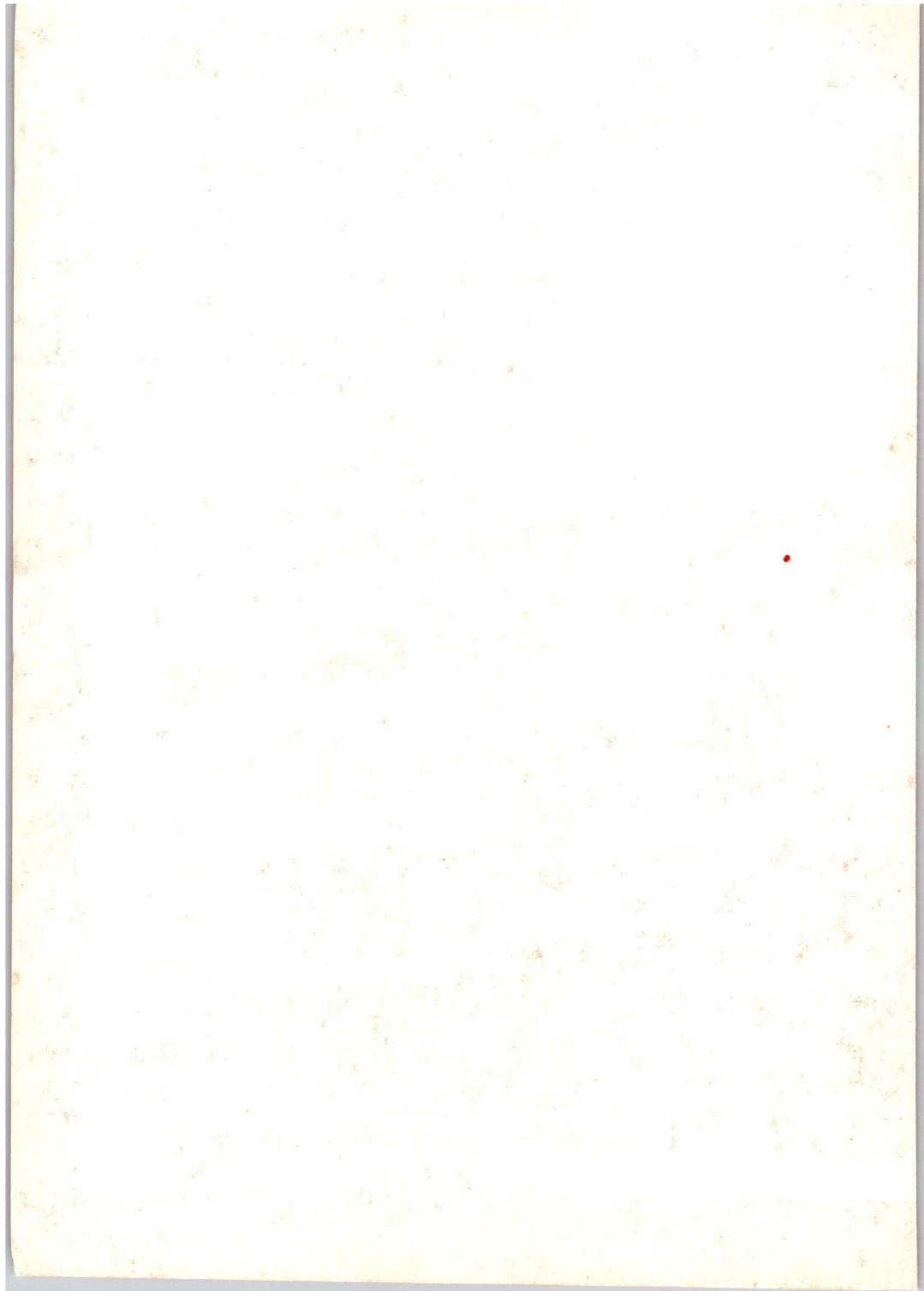


KOSMICKÉ ROZHLEDY

ROČNÍK 21 (1983) ČÍSLO 2

NEPERIODICKÝ VĚSTNÍK ČESKOSLOVENSKÉ ASTRONOMICKÉ SPOLEČNOSTI PŘI ČSAV



KOSMICKÉ ROZHLEDY, neperiodický věstník Československé astronomické společnosti při Československé akademii věd

ročník 21 (1983) číslo 2

Frank J. Tipler

Obecná teorie relativity a koncepce věčného návratu

"Co se dálo, bude se dít zase, a co se dělalo, bude se znovu dělat; pod Sluncem není nic nového."

Kazatel 1:9

"Bůh zakázal, abychom tomu věřili. Jelikož Kristus již jednou zemřel za naše hříchy, a znovu byl vzkříšen, nezemře již nikdy více."

St. Augustin ("O boží obci" XII, " ,
Kap. 13)

Abstrakt

Libovolně blízký návrat k předcházejícímu počátečnímu stavu vesmíru, tak jak je předpovídán tzv. Poincarého teorémem rekurence, nemůže nastat v uzavřeném vesmíru ovládaném zákony obecné teorie relativity. V práci je zdůrazněn význam tohoto výsledku pro kosmologii a termodynamiku.

I. Úvod

Myšlenka, že historie se opakuje - že každý stav vesmíru nastal již někdy předtím a že nastane znovu ad infinitum - představuje koncepci, která vznikla před tisíci lety a která v podobě tzv. Poincarého cyklu a "cyklického" vesmíru dosud hraje významnou roli ve fundamentální fyzice. Tato představa "věčného návratu" bude v předkládané práci studována v kontextu obecné teorie relativity, přičemž bude ukázáno, že v uzavřeném vesmíru není možný žádný libovolně blízký návrat k minulému stavu vesmíru - za předpokladu platnosti určitých velmi obecných omezení na tenzor hmoty a globální kauzální strukturu. Tento výsledek je v ostrém kontrastu se situací v klasické mechanice: Poincaré (1, 2) ukázal, že pro téměř všechny počáteční stavy se jakýkoli mechanický systém s konečným počtem stupňů volnosti, konečnou celkovou a kinetickou energií, jehož pohyb je omezen na konečný prostor, musí nutně vrátit libovolně blízko a konečněkrát často k téměř každému předcházejícímu stavu systému. Příčinou tohoto kontrastu, t.j. "nenávratnosti" v obecné relativitě a "věčného návratu" v klasické mechanice je skutečnost, že v obecné relativitě působí jako zábrana rekurence singularity. Obecně relativistické uzavřené vesmíry,

jak je myšleno, počínají i končí v singularitách nekonečné křivosti a právě tyto singularity nutí čas v obecné relativitě být spíše lineárním než cyklickým.

Pejmy rekurence a nenávratnost tvoří to, co Holten (3, 4) nazývá párem téma-antitéma. V krátkosti - jde o páry opačných fundamentálních koncepcí, které tvoří základní rámec všech vědeckých modelů. Jinými příklady jsou páry absolutní-relativní, plenum-prázdnota, atomismus-kontinuum a determinismus-indeterminismus. Holten ukazuje, že ačkoliv se vědecké teorie mění, fundamentální témata (jejichž počet odhaduje (4) na méně než 100) přetrvávají v různých podobách a různých resazích i v následujících nových teoriích. Tote zcela určitě platí i pro vztah rekurence/nenávratnost. V části II této práce bude ve stručnosti podána krátká historie koncepce věčného návratu ve filosofii a vědě, přičemž důraz bude kladen na ty verze myšlenky věčného návratu, které mají sloužit paralely v moderní vědě. Část III poskytne přesné odvození obecně relativistického teorému nenávratnosti spolu s krátkým objasněním smyslu termínů resp. matematických členů použitých v rámci teorému. Důkaz teorému bude podán v části IV.

Jak bylo zdůrazněno četnými autory (2, 5-7), Peincarého rekurence je hlavním kamenem úrazu na cestě k definici entropie stavové funkce systému, jejíž hodnota nikdy neklesá - pomocí fundamentálních mikroskopických proměnných systému. Až do nynějších byl vzrůst "entropie" definovaný pomocí takových proměnných nepříliš úspěšně získávan prostřednictvím takových triků, jako jsou tzv. "hrubezrnost" (2, 8); přidáním ad hoc náhlednosti do systému v podobě postulátu "molekulárního chaosu" nebo "náhodných fází" (2, 5); popř. zadáním termodynamické limity (9, 10). V části V bude odvozeno, že výsledky této práce mohou sloužit jako příklad, že tyto metody nejsou nezbytné a že existuje hluboká vnitřní spjitost mezi vzrůstem entropie gravitačního pole, který, jak se zdá, nevyžaduje takové triky, a vzrůstem entropie hmoty. V závěru práce je diskutován význam teorému nenávratnosti pro kosmologii.

II. Krátká historie myšlenky věčného návratu

Koncepce věčného návratu - myšlenka, že čas je ve své podstatě cyklický - zjevně hrála klíčovou roli v kosmologickém myšlení lidstva již v době tak vzdálené, jako je období před 6500 lety př.n.l. (11, str. 332). Vědecké myšlení onoho období bylo založeno na takových jevech přístupných "zdravému rozumu", jako je cyklus ročních období, rytmus lidského života od narození přes dospělost ke smrti a mnohé periodicity na obloze, jako jsou fáze Měsíce, roční pohyb Slunce souhvězdími a téměř všechny periodické blízké návraty planet (bohů, viz (11, str. 4)) ke svým předchozím polohám na obloze. Za těchto okolností je cyklická představa času mnohem přirozenější než čas rektilineární, a právě tento cyklický čas dominoval v myšlení tzv. primitivních lidí (12 - 14).

Prvotní zemědělské civilizace - Sumer, Babylon (viz 12, str. 44 a 15, str. 360), Indie (15, str. 353), civilizace Mayá (13, str. 88) a říše Shang-Chou ve starověké Číně (15, str. 358) představu cyklického času zachovaly a nadále jí rozpracovaly. Například Babylonané svoji koncepci času založili na periodicitách planet. V rámci jejich hierarchie život Vesmíru, nebo tzv. Velký Rok, trval přibližně 432 000 let. Léte tohoto Velkého Roku bylo vyznačeno konjunkcí všech planet v souhvězdí Raka a bylo převáseno všeobecným požárem resp. ohněm; zima byla zase vyznačena konjunkcí všech planet v souhvězdí Kozoroha, přičemž byla převásena všeobecnou potopou resp. přívalem věd. Cyklus se pak opakoval a příští cyklus byl v jistém pohledu přesnou reprodukcí cyklu předcházejícího resp. všech předcházejících cyklů (15, str. 362). Staří Indové (hinduisté, buddhisté, jainové) tuto základní strukturu jednoho Velkého Roku rozšířili na celou hierarchii Velkých Roků. Například ke zničení a znovuvstavení všech individuálních forem a výtverů (nikoli však základní substance světa) došlo v průběhu každého Kalpa resp. Brahmeva dne. Každý Brahmův den byl dlouhý přibližně 4 miliardy let. Samotné elementy světa pak společně se všemi formami podléhaly rozkladu, jehož produktem byl tzv. Čistý Duch, který pak prošel opětnou inkarnací do hmoty. To vše se odehrávalo v průběhu každého Brahmeva života resp. přibližně 311×10^{12} let (viz 15, str. 363 a 16, str. 354). Brahmův život je nejdělnějším cyklem v systému starých Indů a cyklus se opakuje ad infinitum (vzpomeně-li si čtenář na jeden z poznatků archeologie antické starověku, podle které byla pro staré Řeky, t.j. jedny z besprestředních předchůdců naší dnešní evropské kultury, obrovským číslem již samotná myriáda, t.j. 10 000, jisté se společně s překladatelem neubrání pocit hluboké úcty vůči představivosti obyvatel starověké Indie operující s tak nepředstavitelnou časovou jednotkou; ačkoliv lze namítnout, že samotné vytvoření obrovského čísla není nic těžkého, připsat tomuto číslu určitý konkrétní smysl jistě vyžadovale značnou dávku důvtipu - pozn. překl.).

Mezi starými Řeky byli nejvšlejšími zastánci koncepce věčného návratu stoikové. Stoikové předpokládali (14, str. 47), že všechny objekty ve vesmíru jsou navzájem svázány v jakémsi absolutně determinovatelném předívu akcí a reakcí a že tento determinismus vede k přesné rekurenci všech jevů. To znamená, že žádný jev není unikátní a nenastává jednou provždy (například odsouzení a smrt Sokratova), ale že každý jev nastal, nastává a bude nastávat věčně; stejní jednotlivci se objevili, objevují a objeví se při každém návratu cyklu. Kosmické trvání je tak opakování, jde o anakuklesis, věčný návrat (13, str. 89).

Tato stoická myšlenka palingeneze - t.j. znovuvstavení se stejných lidí v každém cyklu (12, str. 47) - dovedla myšlenku věčného návratu k jejímu logickému extrému a dospěla mnohem dále než kam si stoikové, nebo dokonce samotní Aristoteles a Platon pravděpodobně přáli dospět.

Aristotela představa palingeneze přivedla patrně do

určitých rozpaků. Poukázal totiž, že pokud by tato představa byla správná, deště by k narušení obvyklé koncepce předtím a potom, jelikož z palingeneze by vyplývalo (viz 14, str. 46 a 17), že on sám žil stejně dlouho jak před pádem Troje, tak i po něm, protože k Trojské válce a následnému pádu Troje by deště znovu. Ačkoliv Aristoteles myšlenku cyklů přijal, nebyl již ochoten přijmout také přesnou identitu jevů v každém cyklu, argumentuje, že identita je pouze jednou z možností (12, str. 48). Platonova kosmologie byla rovněž cyklická - periodicky z ní docházelo ke zničení a znovuvytvoření vesmíru v konjunkci s různými astronomickými jevy (18, 19). Právě prostřednictvím Platonových spisů pronikla představa Velkého Roku do pozdějšího myšlení Západu. Němčině historikové studující Platonovo dílo se deposed nemožno shodnout, zdali jeho koncepce cyklů vedla k extrému palingeneze (viz 12, str. 48 a 14, str. 45). Koncepce věčného návratu deminevala i v předkřesťanském období pozdního římského císařství. Významné postavení zaujímal rovněž na druhé straně eikemene té doby - ve staré Číně dynastie Han. Jak zdůraznil Needham (20. str. 29), rozšířený náboženský taoismus období Han byl ve své podstatě milénaristický a apokalyptický; Velký Mír zde byl zjevně umístěn jak do budoucna, tak i do minulosti. V tzv. Kánonu Velkého Míru (sepsané mezi lety 400 př.n.l. a 200 n.l.) je obsažena teorie cyklů na počátku čerpajících životní sílu z chaosu (t.j. ze stavu úplné nediferenciace, podobné moderním myšlenkám maximální entropie) a po pozvolném pádu končících jakýmsi soudným dnem (maximální entropií v jiné podobě).

Jak naznačuje již epigram této práce, křesťanský světonázor byl vůči myšlence věčného návratu nepřátelský; v části "O boží obci", z které je citát v záhlaví práce vybrán, sv. Augustin kritizuje steickou koncepci rekurence na základě argumentu, že křesťanská filosofie (a její hebrejská předchůdkyně) vyžaduje spíše necycleickou lineární koncepci času. Bůh stvořil svět jednou, Kristus zemřel jednou a bude vzkříšen rovněž jednou. Jako následek triumfu křesťanství počala na Západě představa lineárního času domínovat nad časem cyklickým a tato situace přetrvávala až do zrodu moderní vědy, ačkoliv několik málo středověkých učenců, jako představitelé mohou být uvedeni Bartholomaeus Anglicus (1230), Siger z Bruhantu (1270) a Pietro d'Acono (1300), se představou věčného návratu přinejmenším zabývalo (21). Naproti tomu ve středověké Číně neokonfucianská škola, která se rozvinula v 11. až 13. století n.l. a která byla ovlivněna jak buddhistickými myšlenkami rekurence, tak i výše zmíněnými myšlenkami starověkého taoismu, přijala myšlenku, že vesmír prošel střídajícími se cykly konstrukce a rozpadu (20, str. 6 a str. 22). Například sungský učenec Shen Kua (přibližně kolem roku 1050) diskutoval rekurentní světové katastrofy (viz 20, str. 22 a 22, str. 598 a str. 603) a později učenec období Ming jménem Tung Ku tvrdil, že světová perioda měla počátek, avšak že nekonečný řetězec světových period žádný počátek nemá (viz 20, str. 6 a 22, str. 406).

Needham sice dokazoval (20, str. 50), že v pevném čínském vyřlení lineární představa času ve skutečnosti dominovala nad cyklickým hlediskem, jiní autoři však s takovým závěrem nesehlasí (23, 47). Nicméně není pochyb, že v krátském vyřlení měla lineárnost dominantní postavení a mnozí badatelé (např. 16, 24) tvrdí, že právě tato představa času hrála klíčovou roli v průběhu zrodu moderní vědy.

Moderní věda však naopak vedla k oživení cyklického času. Newtonův obraz světa obsahoval od samotných počátků jak cyklické, tak i lineární aspekty. Samotný Newton byl nespokojeván skutečností, že jeho model sluneční soustavy - založený na lineárním (matematickém) čase - byl v dlouhém časovém intervalu gravitačně nestabilní a ke kompenzaci této nestability navrhl cyklický proces přemístování planet v důsledku poruch jejich drah vlivem gravitačního působení jiných těles (25). Na začátku 19. století ukázali Euler, Laplace, Lagrange a další, že sluneční soustava je v rámci prvního řádu stabilní, přičemž gravitační perturbace vedou pouze k cyklickým oscilacím planetárních drah. Nicméně právě v té době se debata o etáse cyklického versus lineárního času přesunula od astronomie ke geologii a termodynamice (5, str. 553). Jádrem geologického problému bylo, zdali může vnitřní zemské teplo uvádět v pohyb geologické cykly do nekonečna nebo zda eventuálně dojde k ochlazení Země, ke "stavu Ledu a Smrti", jak v roce 1814 poukázal J. Murray (26). Tato otázka částečně stimulovala výzkum v oblasti termodynamiky (5, část 14); na konci 19. století dospěli na základě nové formulace druhého zákona termodynamiky Kelvin a další (detailní historii lze nalézt v 5) k závěru, že tepelná smrt je nevyhnutelná, na základě čehož byla cyklická představa času vyvrácena. Kelvin (27) a Tait (28) vskutku usuzovali, že druhý zákon poukazuje na stvezení vesmíru.

Další fyzikové se však zdráhali přisoudit druhému zákonu takevou neomezenu platnost, argumentující, že stvezení vesmíru by vedlo k narušení prvního zákona termodynamiky (29). Energie rozptýlená termodynamickými procesy takto musí být nějakým způsobem periodicky znovu skoncentrována do použitelné formy. Například Rankine naznačil (30), že teplo vysážené do prostoru by mělo v konečné vzdálenosti od Země dospět k jakémusi "éterovému valu", na kterém by zářivé teplo bylo úplně odraženo a znovu skoncentrováno do různých "ohnisek". (Rankinova představa "éterového valu" je pozoruhodně podobná vyřlence "doménové hranice (domain boundary)", která se objevuje při spontánním narušení symetrie v kalibračních teoriích (31, 32)). Historie vesmíru by tak v dlouhém časovém intervalu byla cyklická.

Rankine se v podstatě snažil ukázat, že mechanika a druhý zákon jsou neslučitelné. Toto poprvé v roce 1890 ukázal Poincaré ve svém slavném teorém rekurence (33), o kterém již byla zmínka výše. Ve své nejobecnější formě může být Poincarého teorém dokázán v libovolném prostoru X , na kterém existuje jednoparametrické zobrazení T_t z množin

$\{U\}$, patříciích do X , do $\{U\}$ a taková míra μ na X , že platí: 1. $\mu(X) = 1$ a 2. $\mu(T_{t_0}(U)) = \mu(T_{t_0+t_1}(U))$ pro libovolné $U \subset X$ a libovolné t_0, t_1 . Při aplikaci má klasickou mechaniku je podmínka (1) zajištěna požadavkem, aby prostor X byl fázovým prostorem mechanického systému s konečnou energií umístěného v konečném prostoru. Pokud je μ hustotní funkce ρ ve fázovém prostoru a T_t je vývojeovým operátorem mechanického systému (předpokládá se, že jde o hamiltonián), pak splnění podmínky (2) vyplývá z Liouvilleova teorému: $d\rho/dt = 0$. Klasická mechanika konečného systému je tak neslučitelná s druhým zákonem termodynamiky; podle Peincareého teorému se téměř všechny takové systémy musí vrátit libovolně blízko a nekonečněkrát často k téměř všem předcházejícím počátečním stavům.

Přibližně ve stejné době, kdy Peincaré rozvíjel svůj teorém, pokušeli se anglický filozof H. Spencer (34) a německý filozof F. Nietzsche vytvořit vědecky znějící argument v prospěch koncepce věčné návratu. Nietzscheův argument je užitečně separevat detailně, třebaže je nerigózní (řečeno přinejmenším!). Obsahuje všechny základní myšlenky potřebné pro rigórní důkaz (na základě určitých daných předpokladů o vývoji systému světa), důkaz, který bude užitečný v rámci diskuse významu teorému zavedeného v následující části této práce. Budu následovat příkladu Nietzscheovy sestry a vynechám ty části jeho argumentu, které považuji za nesmyslné.

Nietzsche zakážíil svůj "důkaz" věčné rekurence následovně: ... naléháme na fakt, že svět jako sehnra veškeré energie nemusí být nahlížen jako neomezený - koncepcí nekonečné energie si zakážeme, protože tato koncepce se zdá být neslučitelná se samotným pojmem energie (35, str. 5).

Toto je pedobné myšlenoe energie v obecné teorii relativity. Pouze v asymptoticky plechém prostoru, ve kterém je celková energie nutně konečná, má koncepce energie dobře definovaný smysl (37, str. 457). Nietzsche rovněž usuzoval, že vesmír musí být nekonečný v čase:

Ani na okamžik se nepotřebujeme zabývat hypotézou stveřeného světa. Pojem "stveřit" je dnes zcela nedefinovatelný a neskutečný; je to pouhé sleve pecházající z dob pevěr ... (36, str. 1066).

Nietzsche pak tvrdil, že rekurence všech stavů vyplývá z konečnosti energie (a prostoru), čímž mnil konečný počet možných stavů vesmíru, nekonečnost uplynulého času a náhodě pedobný vývej:

Pokud je možné představit si vesmír jako přesně definované množství energie, jako přesně definovaný počet center energie, přičemž každá další koncepce sůstává nedefinovanou a tedy nepoužitelnou, pak z toho vyplývá, že vesmír musí pejíít kalkulovatelným počtem kombinací ve velké hře máhody, kterou je jeho existence. V nekonečnu, v tom či jiném okamžiku, musela být každá možná kombinace jednou realizována a nejen to - musela být realizována nekonečněkrát ... (36,

str. 1066). Pokud všechny možné kombinace a vztahy sil desud nebyly vyčerpány, pak nekonečno depesud neleží za námi. Nyní, jelikož je nutno předpokládat nekonečný čas, žádná nevá
možnost nemůže nastat a ke všemu již muselo dojít a navíc nekonečněkrát (35, str. 7). To, že nikdy nebylo dosaženo stavu rovnováhy, dokazuje, že to je nemožné. (Tento stav však musel být dosažen ve sférickém prostoru (36, str. 1064). Pouze když budeme falešně předpokládat, že prostor je nemeas
sený, takže dochází k postupné disipaci energie, pojem finální stavu bude neproduktivním a neživým pojmem (35, str. 8).

V závěrečné části této práce bude ukázáno, že Nietzscheův model světa může být docela dobře přivěrnán k markovovskému procesu, jehož stavy musí být rekurentní. Můžeme tak připustit, že Nietzscheovy předpoklady (konečný počet stavů, žádná stveření a náhodný vývoj) a jeho důkaz rekurence jsou správné, pokud jsou posuzovány standardy filosofického (nikoli matematického) rigoru.

Jiným myslitelem 19. století, uvažujícím problém rekurence, byl Boltzmann. Boltzmann původně doufal, že se mu podaří odvodit nevrátnost z mechaniky atomů, záhy se však přesvědčil, že takové odvození byle nemožné bez použití správnějších technik. Pod tlakem Planckova studenta Zermela, který své argumenty založil na Poincarého teorému, Boltzmann naznačil, že vezmír jako celek nemá žádný směr času, nicméně že jeho jednotlivé části teute směr mají, když náhodu velká fluktuace ze stavu rovnováhy vytvoří oblast se sníženou entropií. Tyto oblasti redukované entropie se pak spětně vyvíjejí k pravděpodobnějšímu stavu maximální entropie a celý proces se bude opakovat ve shodě s Poincarého teorémem (viz 5, část 14.7 a 38).

Když už se jednou stalo jasným, že konečný systém částic by měl být v dlouhém časovém měřítku rekurentní a ne
nevrátný, Planck uvažoval, zdali by nebylo možné odvodit nevrátnost z teorie pole, jakou je například elektromagne
tismus. Základem jeho úvah byla myšlenka odvodit nevrátnost ze vzájemného působení spojitého pole a diskrétních částic. Sérii prací o této otázce začal Planck publikovat v roce 1897, přičemž tato série vyvrcholila jeho objevem kvantové teorie záření v roce 1900. Boltzmann však poukázal na sku
tečnost, že pokud pole považujeme za systém s nekonečným počtem stupňů volnosti, situace je analogická jako v případě mechanického systému s nekonečným počtem molekul a tak či onak dospějeme k nekonečnému Poincarého rekurencnímu času; v každém případě budeme mít nevrátnost a shodu s druhým zákonem termodynamiky v dlouhém časovém měřítku. Nicméně, v termodynamice polí ve vázaném prostoru je fyzikálně v
hlednější pohled na pole nikoliv jako na spojitou kvalitu pedláhající diferenciálními rovnícím, ale spíše jako na velký, ale konečný počet "vektorevých éterevých atomů", jejichž rovnice pohybu získáme záměnou obvyklých diferenciálních rovnic za rovnice s konečnou diferencí. Na tento systém by měl být teorém rekurence aplikovatelný (viz 5, část 14.8 a 39).

Většina z diskusí 20. století o problému věčného

návratu je založena na tzv. modelu uzavřeného oscilujícího vesmíru, který v roce 1922 navrhl A. Friedmann (40). Samotný Friedmann si byl vědom cyklické podstaty času ve svém řešení a naznačil, že v každém cyklu by bylo možné identifikovat odpovídající časy. Nicméně ve Friedmannově modelu na začátku a na konci každého cyklu klesá poloměr vesmíru na nulu, takže ze striktního matematického hlediska jsou cykly odděleny singularitami; v podstatě nejde o skutečné "cykly". V roce 1931 dokázal Tolman (41), že taková diskontinuita je nevyhnutelná na začátku a konci libovolného izotropického a homogenního uzavřeného vesmíru s fyzikálně reálnými tenzorem hmoty. Tolman však dále vyvozoval (42), že tato diskontinuita je pouze artefaktem předpokládané vysoké symetrie a že ve fyzikálně reálném vesmíru by měla skutečná diskontinuita zmizet. Předpokládal proto, že entropie by měla být v průběhu přechodu singularitou zachována, takže termodynamika cyklu by byla částečně determinována historií cyklu předcházejícího. Další relativisté té doby se v otázce nereálnosti singularity shodávali s Tolmanem (detaily viz 43).

S příchodem Hawkingových-Penroseových teorémů o singularitách v šedesátých letech přijala většina relativistů realnost určitého druhu počáteční singularity - přinejmenším v klasické relativitě. Někteří relativisté argumentovali, že kvantové efekty by měly ve vesmíru při velmi vysokých hustotách zapříčinit jakýsi "odraz", což by vedlo k cyklům v modelech uzavřeného vesmíru. Například Wheeler domnělka naznačoval (44, 48), že při "odrazu" dochází k jakémusi recyklování samotných fyzikálních konstant. (V současnosti Wheeler obhajuje jednocyklový uzavřený vesmír - viz např. 48). Na výraz uznání za Wheelerovu změnu hlediska jsem na jiném místě (48a) nazval jednocyklový uzavřený vesmír Wheelerovým vesmírem). Tolmanova koncepce cyklů tak připomínala cyklus Brahmaeva dne v indické mytologii, zatímco Wheelerova dřívější koncepce byla spíše analogií cyklu Brahmaeva života. Nyní ukáži, že v klasické relativitě singularita brání rekurenci a v části V této práce dokážu, že pokud je výsledkem kvantových efektů "odraz", pak je určitý druh rekurence pravděpodobně nevyhnutelný.

III. Teorém nenávratnosti

V rámci důkazu, že žádné dva stavy vesmíru nemožno být identické resp. libovolně blízko si musíme nejdříve upřesnit význam pojmu "blízko". Tote můžeme provést tím, že na množinu všech počátečních dat budeme pohlízet jako na Sebolevův prostor W^2 . Globální topologii prostoročasu (M, g) je $S \times \mathbb{R}$, kde S je kompaktní, pokud je prostoročas globálně hyperbelický. Vyberme si určitou pozitivně definitní metriku e_{ab} na M a definujeme si normu na W^2 prostřednictvím vztahu

$$\| K_J^I \|_m \equiv \left[\sum_{p=0}^m \int_S (|D^p K_J^I|)^2 d\sigma \right]^{1/2} \quad (1)$$