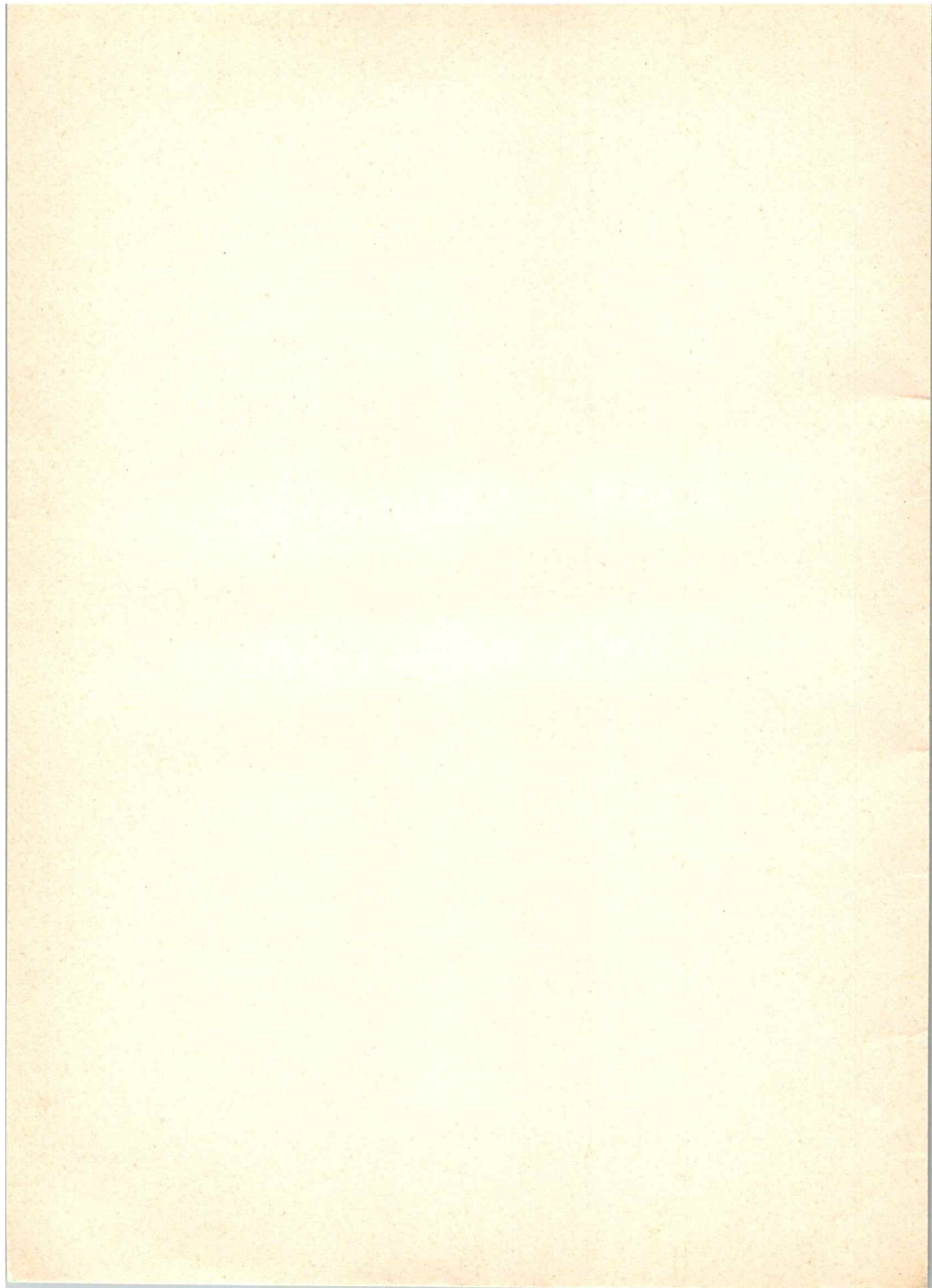




KOSMICKÉ ROZHLEDY

NEPERIODICKÝ VĚSTNÍK ČESKOSLOVENSKÉ ASTRONOMICKÉ SPOLEČNOSTI PŘI ČSAV

2/1976



KOSMICKÉ ROZHLEDY, neperiodický věstník Československé astronomické společnosti při Československé akademii věd

ročník 1976

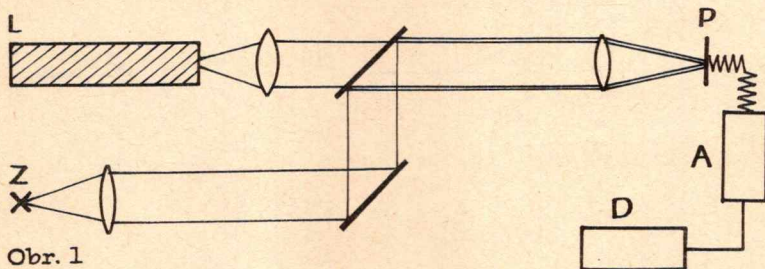
číslo 2

J. Grygar

Možnosti a meze optické heterodynní spektroskopie

Klasická optická spektroskopie se odjakživa pohybovala mezi dvěma úskalími. Tím jedním je rozlišovací schopnost a tím druhým nedostatek světla. Chceme-li v klasickém spektrografu zvýšit rozlišovací schopnost, zužujeme šterbinu spektrografu. Tím se ovšem připravujeme o velkou část světla, jež se odráží neúžitečně na břitech šterbiny a obráceně: rozšíříme-li šterbinu, rozlišovací schopnost spektrografu klesá. Poměrně optimální veličiny získáváme jen tehdy, uijeme-li skutečně klasického postupu, tj. mřížkového spektrografu a jemnozrné fotografické emulze. Moderní způsoby techniky detekce spektra pomocí měničů či zesilovačů obrazu zlepšují sice podstatně kvantovou účinnost detekce, ale rozlišovací schopnost je vždy horší než v klasické spektroskopii, aplikované ke studiu astronomických objektů.

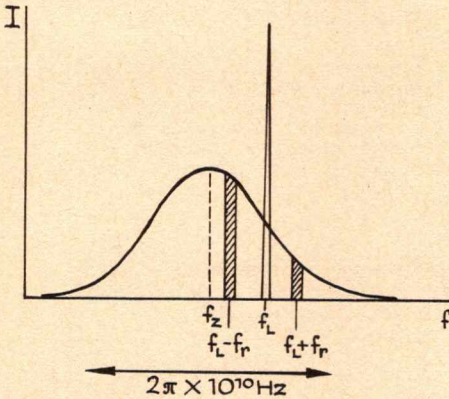
Mřížky, jež jsou hlavním prvkem moderních spektrografů, využívají vlastně interference dopadajícího záření se sebou samým. To je teoreticky velmi nevýhodný způsob: nabízí se ihned myšlenka, že by bylo velmi užitečné, kdybychom mohli nechat interferovat záření nebeského zdroje se zářením pomocného referenčního zdroje. V tom také spočívá podstata optické heterodynní spektroskopie (obr. 1).



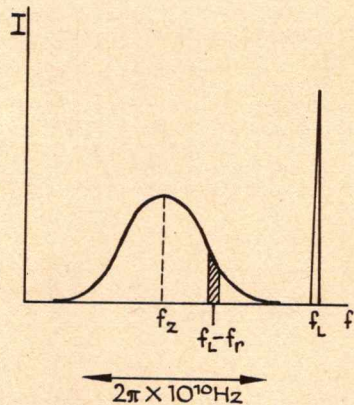
Základní principy

Heterodynní spektroskopie je vlastně typem intenzitní interferometrie, která se už využívá v jiných oborech astronomie (intenzitní interferometr Hanbury Browna v Narrabri v Austrálii). Interferenci světla zdroje a pomocného světelného zdroje dostáváme rázy, jejichž frekvence bude jednak $f_Z + f_L$ a jednak $f_Z - f_L$. Jelikož se pohybujeme v optickém oboru spektra, je součtová frekvence příliš vysoká pro jakoukoliv detekci. Zvolíme-li však vhodné frekvenci pomocného zdroje f_L , dostaneme rozdílovou frekvenci v pásmu radiových vln. zesílení takového signálu je technicky už dávno dobře vyřešeno, a v tom právě spočívá půvab heterodynní spektroskopie. Rozdílová frekvence $f_r = f_Z - f_L$ nesmí však být vyšší než asi 10 GHz, neboť na signály o vyšší frekvenci nedokáže reagovat žádný fotočlánek dostatečně rychle. Prakticky to znamená, že při užití červeného světla kolem 600 nm nesmí být rozdíl mezi vlnovou délkou zdroje a vlnovou délkou pomocného zdroje větší než 0,01 nm. Jestliže se pak frekvence f_Z a f_L pohybují kolem $5 \cdot 10^{14}$ Hz, je rozdílová frekvence právě řádu 10^{10} Hz.

Zde je třeba poznamenat, že pro studium profilu emisní čáry v optickém oboru se z těchto důvodů vyskytne nepříjemná dvojnásobnost, neboť nebudeme s to odlišit elektronicky signály s frekvencemi $(f_L - f_r)$ a $(f_L + f_r)$ (obr. 2a). V infračerveném oboru spektra, vzhledem k nižším hodnotám frekvencí f_Z (a tedy i f_L) je situace příznivější, tj. jedno z pásem $(f_L \pm f_r)$ bude ležet mimo profil čáry, a nebude tudíž rušit jednoznačnost měření (obr. 2b). Vlnové délky čáry a pomocného zdroje se totiž v infračerveném oboru mohou lišit až o 0,1 nm.



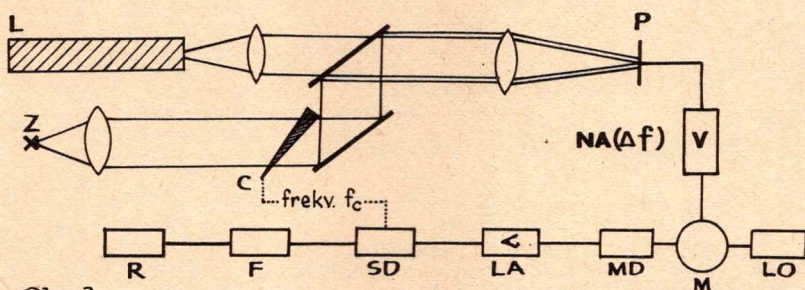
Obr. 2a



Obr. 2b

Intenzitní interferometrie ovšem vyžaduje, aby oba zdroje (hvězda i referenční zdroj) byly koherentní. Koherentní laboratorní zdroj není dnes žádným problémem, neboť máme k dispozici komerčně vyráběné stabilní lasery, vyzařující výsoce monochromatické intenzivní a koherentní záření. Horší je to s astronomickými objekty, které září nekoherentně. Jak však ukázal Forrester (1961), lze v těchto případech docílit heterodynního směšování signálů, neboť nekoherentní signál hvězdy lze považovat za směs krátkotrvajících a plošně omezených koherentních "vlnových balíků". Trvání takového koherentního "balíku" úzce souvisí s přirozenou šířkou spektrální čáry a nepřesahuje v optickém oboru 10^{-7} až 10^{-8} s. To tedy znamená, že minimální detekovatelná rozdílová frekvence je řádu 10 MHz. Tím rovněž dostáváme celkové rozmezí pro heterodynní frekvence, omezené zdola podmínkou koherence a shora setrvačností fotočlánků: 10 MHz - 10 GHz.

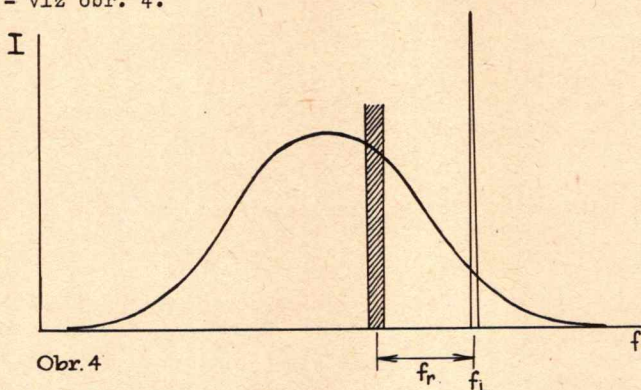
O aplikaci teoretických úvah o heterodynní spektroskopii se zasloužili především holanďští astronomové z utrechtské observatoře (van Bueren, 1967; Nieuwenhuizen, 1968 a 1970). Van Bueren poukázal na problém kvantového šumu v detektoru, jež znemožňuje použití fotonásobičů k detekci rozdílové frekvence. Vhodnými detektory jsou polovodičové nebo parametrické diody. Pro nízkou citlivost těchto detektorů je k vlastní registraci nutné užít integračního principu, přičemž vhodné integrační časy jsou řádu 1 s. Tehdy dosáhneme poměru signál : šum řádu 10^4 . Modulaci signálu docílíme nejnázde mechanickým přerušovačem (rotujícím sektorem), jež je vložen do cesty paprskům z astronomického zdroje. Po smíšeném světle zdroje a laseru a detekci rozdílového signálu na fotočlánku lze již užít standardního postupu k zesílení radiového signálu, tj. výstup z fotočlánku jde na úzkopásmový vysokofrekvenční zesilovač, odtud do směšovače, mezifrekvenčního zesilovače, nízkofrekvenčního zesilovače a synchronního detektoru (detektor je synchronizován s frekvencí rotujícího sektoru). Odtud jde výstup přes filtr do zapisovače (obr. č. 3).



Obr. 3

K tomu, abychom mohli určit profil spektrální čáry, potřebujeme vhodným způsobem měnit frekvenci. V podstatě jsou

dvě možnosti: a - ladění úzkopásmového zesilovače,
 b - ladění laseru
 - viz obr. 4.



Obr. 4
 V případě a) klademe na zesilovač značné nároky: musí být laditelný v rozmezí 10 GHz s šířkou pásma 100 MHz. To je technicky stěží splnitelné.

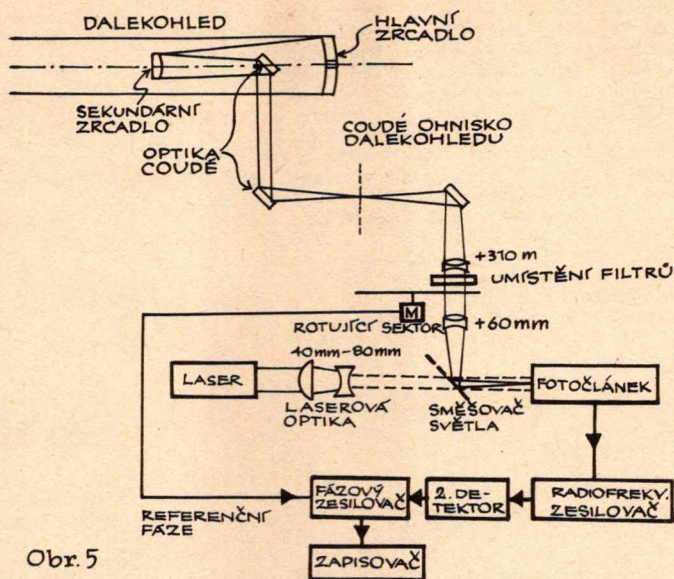
Proto se přednostně pokoušíme ladit laser. Naneštěstí nejsou plynové lasery, jež jediné mají dostatečně úzké a stabilní čáry, příliš laditelné. Poměrně nejnadějnější je proto zdánlivě bizarní metoda mechanického ladění odrazem laserového paprsku na soustavě rotujících zrcadel, čímž dostáváme posuvy frekvence vyvolané Dopplerovým efektem.

V každém případě je zřejmé, že pro souvislé pozorování hvězdných spekter budeme potřebovat velké množství laserových čar, neboť, jak jsme uvedli dříve, požadujeme koincidence čar hvězdného zdroje laseru na 0,01 nm ve vizuální oblasti a 0,1 nm v infračervené oblasti spektra.

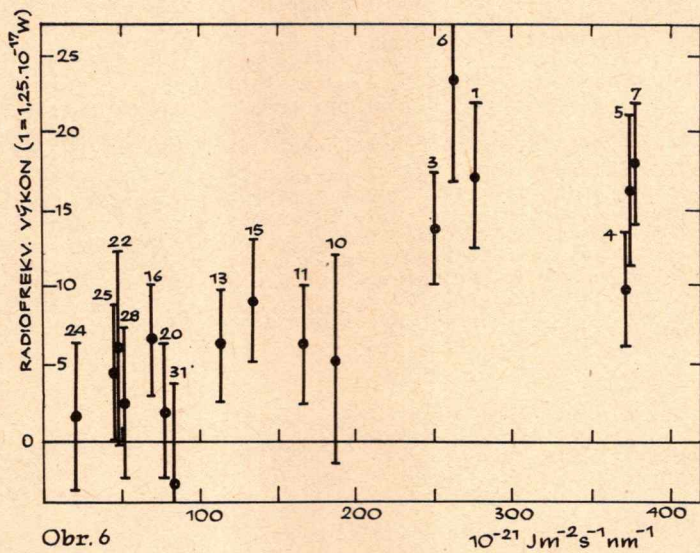
V pásmu od 300 do 2000 nm je zhruba 20 000 čar ve spektrech hvězd slunečního typu. V téže oblasti je komerčně k dispozici zhruba 5000 laserových čar. Možných koincidenčí jsou tudíž řádově stovky; užitečných koincidenčí je však jen asi 30. Tím se ovšem myslí koincidence vůči čarám, jejichž zdroje jsou v klidu vůči laboratoři. Samotné pekulární radiální rychlosti hvězd výskyt koincidenčí usnadňují; přitom během roku lze vhodně využívat proměnlivé složky geocentrické radiální rychlosti objektu, způsobené oběhem Země kolem Slunce.

Výsledky experimentů

Laboratorní pokusy s heterodyním směřováním vykonal Nieuwenhuizen (1968). Jako zdroje použil plynové výbojky a jako referenčního zdroje He-Ne laseru s vlnovou délkou 633 nm. Podařilo se mu získat heterodynní signál, jehož velikost byla úměrná okamžité intenzitě záření výbojky. Tím byla zásadní možnost heterodyním směřování koherentního a "makroskopicky nekoherentního" signálu v podstatě ověřena.



Obr. 5



Obr. 6

Další pokusy se konaly v r. 1969 v Ondřejově. Bylo při nich směřováno světlo téhož typu laseru přímo se světlem jasných hvězd, soustředěným 2m reflektorem observatoře (obr. 5). (Nieuwenhuizen, 1970). Experimentální zařízení bylo umístěno ve II. coudé ohnisku dalekohledu. Při tomto uspořádání bylo poměrně snadné provést předběžné celou justáž aparatury, aniž by tím byl přerušen normální provoz dalekohledu. Teprve před započítím vlastních měření byl signál z dalekohledu překlopením rovinného zrcátka v místnosti coudé přiveden do optického směšovače a odtud dále na fotočlánek. Pro velký nepochybující intenzit laseru a hvězdného záření konalo se měření tak, že se opakovalo rychlé přepínání z referenčního zdroje (laseru) na kombinaci (laser + hvězda), a zpět. Hvězdný svazek byl dále spektrálně vymezen interferenčním filtrem se šířkou pásma 10 nm a maximální propustností 67 % u vlnové délky 633 nm. Optický směšovač propouštěl 50 % světla. Průměr světelného svazku na fotokatodě byl 0,5 nm. Pouze 41 % světla hvězdy, jež dopadlo na primární zrcadlo, se dostalo do ohniska coudé - zbytek byl ztracen odrazy na dalších zrcadlech.

Celkem bylo měřeno 8 jasných hvězd a dále planeta Jupiter, přičemž jednotlivé série měření trvaly 10 - 45 minut. V okolí laserové hvězdy se v žádném případě nevyskytovaly hvězdné absorpční čáry ve vzdálenosti menší než 0,01 nm. Pro každé měření byl vypočítán tok záření hvězdy dopadající do dalekohledu a k němu přiřazen změřený radiový signál na výstupu heterodynního zařízení. Výsledky včetně středních chyb jsou zobrazena na obr. 6. Čísla u jednotlivých úseček představují pořadová čísla měření - čísla 1, 3, 6 odpovídají měřením Capelly a 4, 5 a 7 měřením Arktura. V těchto dvou případech byl nepochybně zjištěn heterodynní signál. Podrobný rozbor všech měření ukazuje, že heterodynní signál byl úměrný dopadajícímu toku hvězdného záření a zejména se zmenšil na polovinu při užití 50 % filtru zařazeného do svazku hvězdného světla. Signál vymizel při zařazení polaroidu s polarizační rovinou kolmou k rovině polarizace laserového svazku. Konečně pak podle očekávání nebyl získán žádný signál při měření planety Jupiter, což je dáno tím, že Jupiter je plošný objekt a proto pro něj neplatí počáteční předpoklad o koherentních "vlnových balíčcích".

Naproti tomu však, jak je patrné z obr. 6, pro větší toky neroste radiový signál úměrně s tokem, což je způsobeno turbulencí v zemské atmosféře. Turbulence zhoršuje výrazně koherentnost hvězdných "vlnových balíčků", takže v uvedeném experimentu pracoval 2m reflektor efektivně jen jako 30 cm dalekohled. Konverzní faktor pro převod optické energie na radiovou byl $1,2 \pm 0,4$ Wrd. záření / 1 joule optického záření. Tím je dáno současné omezení heterodynní spektroskopie v optickém vizuálním oboru spektra.

Perspektivy

Jakmile se podaří překonat současné technické obtíže s laditelnými lasery, lze očekávat významný rozvoj heterodynní spektroskopie, která ovšem nikdy nenahradí, nýbrž pouze doplní klasickou spektroskopii. Hlavní přednosti heterodynní spektroskopie lze shrnout takto:

1. Podstatně lepší rozlišovací schopnost než klasická spektro-

skopie (řádu 10^{11} , tj. 10^5 x lepší než v klasickém uspořádání).

2. Zjednodušení optických cest, zvláště pak odstranění štěrbín, které ztrácejí zbytečně přes 90 % dopadajícího světla.
3. Zařízení je kompaktní a mechanicky odolné. To předurčuje heterodynní spektroskopii pro použití v kosmických sondách a družicích.
4. Heterodynní výstup lze snadno digitalizovat, takže metoda umožňuje automatické zpracování dat.

Pokud jde o nevýhody, jsou jednak technologické (málo laditelné lasery, omezený výběr spektrálních čar, málo citlivé fotodiody) a jednak fyzikální. Sem patří především nutnost předpokládat, že profil zkoumaných čar je symetrický v optickém oboru (kde nelze rozlišit dvě blízké frekvence - obr. 2a) a dále nehomogenity a turbulence v zemské atmosféře. Tím je podstatně omezeno využití heterodynní spektroskopie ve vizuálním oboru spektra na zemském povrchu.

Proto lze očekávat, že heterodynní spektroskopie se nejprve rozvine v infračerveném oboru spektra, kde by tak bylo možné získávat detailní průběh profilů spektrálních čar, a teprve pak se vrátí zpět do vizuálního oboru spektra, přičemž detektory budou umístěny vně hranic zemské atmosféry.

Nová metoda dává zásadní možnost zvýšit rozlišovací schopnost spektrálních měření hned o několik řádů. Jelikož nás historická zkušenost učí, že kdykoliv se experimentátorům podařilo posunout přesnost měření jen o jediné desetinné místo, vedlo to k závažným objevům, lze od heterodynní spektroskopie očekávat významné rozšíření našich vědomostí o zářící plazmě v laboratoři i ve vesmíru.

(Předneseno na výroční konferenci Zentralinstitut für Astrophysik v Rheinsbergu, NDR, dne 14.4.1976).

Literatura:

- Bueren van, H.G., 1967: B.A.N. 19, 97.
Forrester, A.T., 1961: J.O.S.A. 51, 253
Nieuwenhuizen, H., 1968: B.A.N. 19, 391
Nieuwenhuizen, H., 1970: MN 150, 325.

Texty k obrázkům

- obr. 1. Princip heterodynní spektroskopie. Nekoherentní světlo ze zdroje Z je směřováno s koherentním světlem laseru L a soustředěno na fotočlánek P. Intenzitní fotometrie obou paprsků způsobí rázy v radiovém oboru spektra, jež jsou zesíleny zesilovačem A a zaznamenány zapisovačem D.
- obr. 2. Poloha vlnové délky laserového záření vůči profilu spektrální čáry, která umožňuje koherentní detekci rozdílového signálu: a) situace ve vizuálním optickém spektru. f_z je frekvence záření zdroje, f_L - frekvence laserového záření a f_r je rozdílová frekvence. V optické vizuální oblasti dostáváme tudíž vlastně dvě interferující oblasti (vyšrafované), jež nelze

elektronicky oddělit; b) situace v infračerveném spektru. Rozdíl frekvence f_L a f_Z je dostatečný k tomu, aby jen jedna větev rozdílového signálu padla do oblastí profilu spektrální čáry.

- obr. 3. Detekce a zesílení signálu v heterodynní spektroskopii. L - laser, Z - nekoherentní zdroj, C - rotující sektor modulující záření zdroje, P - fotoočlánek, NA - úzkopásmový vysokofrekvenční zesilovač, M - směšovač, LO - lokální oscilátor, MD - mezifrekvenční zesilovač, LA - nízkofrekvenční zesilovač, SD - synchronní detektor (naladěný na frekvenci rotujícího sektoru), F - filtr, R - zapisovač.
- obr. 4. Přejíždění profilu spektrální čáry lze docílit buď změnou rozdílové frekvence f_P (tj. laděním úzkopásmového zesilovače) anebo změnou frekvence laseru f_L . Vyšrafovaná je oblast interference obou signálů.
- obr. 5. Schéma uspořádání experimentu u 2m reflektoru v Ondřejově. Schéma není kresleno v měřítku.
- obr. 6. Vztah mezi tokem záření hvězdy při vstupu do dalekohledu a radiovým výkonem heterodynního signálu. Svislé úsečky označují střední chyby měření, označená pořadovými čísly jednotlivých pozorovacích řad.

V. Matas

O stabilitě libračních center kruhového a eliptického restringovaného problému tří těles (pokračování).

2. Stabilita libračních center kruhového restringovaného problému tří těles v 1. aproximaci.

Studujeme-li pohyb infinitesimálního tělesa M v "těsné" blízkosti libračního centra L_1 můžeme se omezit v rozvoji na pravé straně příslušné soustavy pohybových rovnic pouze na lineární členy s ξ^* , η^* , ζ^* a místo řešení původní "komplikované" soustavy pohybových rovnic řešit tzv. soustavu variačních rovnic příslušných libračnímu centru L_1 . Jedná se o homogenní soustavu lineárních diferenciálních rovnic s periodickými koeficienty.

Jsou-li řešení této soustavy stabilní resp. nestabilní, hovoříme potom o stabilitě resp. nestabilitě libračního centra L_1 v 1. aproximaci. Přesněji řečeno, pod pojmem stability budeme zde rozumět toto: Jestliže pro libovolně zvolené počáteční podmínky platí, že řešení soustavy zmíněných variačních rovnic určené těmito počátečními podmínkami leží pro všechna $v \in \langle v_0, +\infty \rangle$ (v_0 odpovídá "počátečnímu okamžiku") v jistém okolí libračního centra L_1 , řekneme, že daná soustava variačních rovnic má stabilní obecné řešení a příslušné librační centrum L_1 je stabilní v první aproximaci. V opačném případě mluvíme o nestabilitě libračního centra L_1 . Jak už bylo řečeno, soustavy variačních rovnic příslušné libračním centrům jsou soustavy lineárních diferenciálních rovnic s periodickými koeficienty. Jejich obecné exaktní řešení dovedeme nalézt pouze

pokud $e = 0$, t.j. pokud se jedná o kruhový restringovaný problém tří těles, kdy zmíněné periodické koeficienty se stávají konstantami.

V tomto případě soustava variačních rovnic příslušných přímkových libračních centrům L_j , $j = 1, 2, 3$, vypadá následovně:

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dv^2} - 2 \frac{dy}{dv} &= (1 + 2 A_j) x, \\ \frac{d^2y}{dv^2} + 2 \frac{dx}{dv} &= (1 - A_j) y, \\ \frac{d^2z}{dv^2} &= - A_j z, \quad +/ \\ j &= 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Variační rovnice příslušné trojúhelníkovým libračním centrům kruhového restringovaného problému tří těles mají tvar

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dv^2} - 2 \frac{dy}{dv} &= \frac{3}{4} x + (-1)^j \frac{3\sqrt{3}}{4} (1 - 2\mu) y, \\ \frac{d^2y}{dv^2} + 2 \frac{dx}{dv} &= (-1)^j \frac{3\sqrt{3}}{4} (1 - 2\mu) x + \frac{9}{4} y, \\ \frac{d^2z}{dv^2} &= -z, \\ j &= 4, 5. \end{aligned}$$

Učiníme transformaci proměnných

$$x = x_1, \quad \frac{dx}{dv} = x_2, \quad y = x_3, \quad \frac{dy}{dv} = x_4.$$

Potom místo prvních dvou rovnic v poslední uvedené soustavě dostaneme

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2 \\ x_2' &= \frac{3}{4} x_1 + B_j x_3 + 2 x_4 \\ x_3' &= x_4 \\ x_4' &= B_j x_1 - 2x_2 + \frac{9}{4} x_3 \\ j &= 4, 5, \end{aligned}$$

kde pro stručnost bylo zavedeno

$$B_j = (-1)^j \frac{3\sqrt{3}}{4} (1 - 2\mu)$$

a čárka značí derivaci podle času. Bude-li nyní symbol x zna-

+ / Nyní pravá anomálie v = střední anomálii = "časové proměnné" t (střední "denní" pohyb $n = 1$ při našich jednotkách).

menat čtyřsložkový vektor

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

můžeme předchozí soustavu diferenciálních rovnic psát v maticovém tvaru

$$x' = Ax$$

kde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{4} & 0 & B_j & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ B_j - 2 & \frac{9}{4} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Předpokládejme řešení ve tvaru

$$x = c e^{\lambda t}, \quad c \neq 0 \quad (c \in E_4).$$

Odtud vyplývá

$$c \lambda e^{\lambda t} = A c e^{\lambda t}$$

a dále

$$(\lambda I - A) c = 0, \quad I = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix}$$

K tomu, aby tato soustava měla netriviální řešení $c \neq 0$, je nutné a stačí, když

$$\det(\lambda I - A) = 0.$$

Uvedená charakteristická rovnice má následující explicitní tvar (stejný pro obě trojúhelníková libračná centra)

$$\lambda^4 + \lambda^2 + \frac{27}{4} \mu(1 - \mu) = 0$$

a kořeny

$$\lambda_1 = -\lambda_2 = \sqrt{\frac{-1 + \sqrt{1 - 27\mu(1 - \mu)}}{2}}$$

$$\lambda_3 = -\lambda_4 = \sqrt{\frac{-1 - \sqrt{1 - 27\mu(1 - \mu)}}{2}}$$

Odtud ihned vidíme, že, pokud

$$1 - 27\mu(1 - \mu) = 0,$$

t.j.

$$\mu = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} \sqrt{\frac{23}{3}} \approx 0,038520896$$

(druhý kořen $\mu^* = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\sqrt{\frac{23}{3}}$ neleží ve zkoumaném inter-
valu $\mu \in (0, \frac{1}{2})$), je

$$\lambda_1 = \lambda_3 \quad \text{a} \quad \lambda_2 = \lambda_4 ,$$

t.j. výše uvedená charakteristická rovnice má dva dvojnásob-
né komplexně sdružené kořeny

$$\lambda_1 = i\sqrt{\frac{1}{2}} , \quad \lambda_2 = -i\sqrt{\frac{1}{2}} ; \quad i \equiv \sqrt{-1}$$

a jest dále

$$B_j = (-1)^j \sqrt{\frac{23}{4}} .$$

Buď $h^{(1)}$ nějaký (pevný) vlastní vektor matice A příslušný
vlastnímu číslu $\lambda_2 = -i\sqrt{\frac{1}{2}}$, t.j. $h^{(1)}$ je nějaké pevné ne-
nulové řešení soustavy

$$(A - \lambda_2 I) h^{(1)} = 0 .$$

Buď dále $h^{(2)}$ nějaké pevné řešení nehomogenní soustavy

$$(A - \lambda_2 I) h^{(2)} = h^{(1)} .$$

Snadno nalezneme, že obecné řešení homogenní soustavy

$$(A - \lambda_2 I) h = 0$$

jest

$$h = \begin{bmatrix} 0 \\ -i\sqrt{\frac{1}{2}} \\ -(-1)^j \frac{\sqrt{23}}{11} - i \frac{4\sqrt{2}}{11} \\ -\frac{4}{11} + i \frac{(-1)^j \sqrt{23}}{11} \end{bmatrix} k$$

kde k je libovolná konstanta. Položme $h^{(1)}$ rovno hornímu
výrazu pro h s hodnotou konstanty $k = 1$. Potom obecné řešení
soustavy

$$(A - \lambda_2 I) h^* = h^{(1)}$$

má tvar

$$h^* = h + h^*(2)$$

kde

$$h^*(2) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{56}{121} + i \frac{(-1)^j 4\sqrt{46}}{121} \\ -(-1)^j \frac{7\sqrt{23}}{121} - i \frac{72\sqrt{2}}{121} \end{bmatrix}$$

Položme

$$h^{(2)} = h^{*(2)}$$

Jako důsledek elementární teorie diferenciálních rovnic dostáváme, že obecné řešení studované soustavy lineárních diferenciálních rovnic

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A} \mathbf{x}$$

za předpokladu, že

$$\mu = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} \sqrt{\frac{23}{3}}$$

jest

$$\begin{aligned} \mathbf{x} = & c_1 h^{(1)} e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}t} + c_2 (h^{(1)} t + h^{(2)}) e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}t} + \\ & + c_3 \overline{h^{(1)}} e^{\frac{1}{\sqrt{2}}t} + c_4 (\overline{h^{(1)}} t + \overline{h^{(2)}}) e^{\frac{1}{\sqrt{2}}t} \end{aligned}$$

(c_1 až c_4 jsou libovolné konstanty),

kde $h^{(k)}$ značí vektor komplexně sdružený k vektoru $h^{(k)}$, $k = 1, 2$. Z fyzikálních důvodů je příhodnější přejít k reálnému fundamentálnímu systému, Potom máme

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x}' \\ \mathbf{y} \\ \mathbf{y}' \end{bmatrix} = & d_1 \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -(-1)j \frac{\sqrt{23}}{11} \\ -\frac{4}{11} \end{bmatrix} \cos \frac{t}{\sqrt{2}} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{4\sqrt{2}}{11} \\ (-1)j \frac{\sqrt{23}}{2} \end{bmatrix} \sin \frac{t}{\sqrt{2}} \right\} + \\ & + d_2 \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{4\sqrt{2}}{11} \\ (-1)j \frac{\sqrt{23}}{2} \end{bmatrix} \cos \frac{t}{\sqrt{2}} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ (-1)j \frac{\sqrt{23}}{11} \\ -\frac{4}{11} \end{bmatrix} \sin \frac{t}{\sqrt{2}} \right\} + \\ & + d_3 \left\{ \begin{bmatrix} t \\ 1 \\ -t(-1)j \frac{\sqrt{23}}{11} + \frac{56}{121} \\ -t \frac{4}{11} - (-1)j \frac{7\sqrt{23}}{121} \end{bmatrix} \cos \frac{t}{\sqrt{2}} + \begin{bmatrix} 0 \\ -t \frac{\sqrt{1}}{2} \\ -t \frac{4\sqrt{2}}{11} + \frac{(-1)j 4\sqrt{46}}{121} \\ t \frac{(-1)j \sqrt{23}}{11} - \frac{72\sqrt{2}}{121} \end{bmatrix} \sin \frac{t}{\sqrt{2}} \right\} + \end{aligned}$$

$$+ d_4 \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ -t\sqrt{\frac{1}{2}} \\ -t\frac{4\sqrt{2}}{11} + \frac{(-1)^j 4\sqrt{46}}{121} \\ t\frac{(-1)^j \sqrt{23}}{11} - \frac{72\sqrt{2}}{121} \end{bmatrix} \cos \frac{t}{\sqrt{2}} - \begin{bmatrix} t \\ 1 \\ -t(-1)^j \frac{\sqrt{23}}{11} + \frac{56}{121} \\ -t\frac{4}{11} - (-1)^j \frac{7\sqrt{23}}{121} \end{bmatrix} \sin \frac{t}{\sqrt{2}} \right\},$$

kde d_1 až d_4 jsou libovolné konstanty.

Tedy např. x -ová složka pohybu infinitesimálního tělesa v blízkosti trojúhelníkového libračního centra L_j , $j=4,5$, bude v 1. aproximaci rovna (za předpokladu, že $1 - 27\mu(1-\mu) = 0$)

$$x = d_1 \cos \frac{t}{\sqrt{2}} - d_2 \sin \frac{t}{\sqrt{2}} + d_3 t \cos \frac{t}{\sqrt{2}} + d_4 t \sin \frac{t}{\sqrt{2}}.$$

Zřetelně vidíme, že v mezním případě, kdy $\mu = \frac{1}{2} - \frac{1}{6}\sqrt{\frac{23}{3}}$, je obecný pohyb v okolí trojúhelníkových libračních center L_4, L_5 nestabilní v 1. aproximaci. To ovšem neznamená, že nelze zvolit počáteční podmínky tak, aby dráha jím vyhovující byla omezená. (Stačí je zvolit např. tak, aby $d_3 = d_4 = 0$.)

Všimněme si nyní krátce limitního případu $\mu \rightarrow 0$. Charakteristická rovnice má pak tvar

$$\lambda^2(\lambda^2 + 1) = 0$$

a kořeny

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \lambda_2 = 0, \\ \lambda_3 &= -\lambda_4 = i. \end{aligned}$$

Podobně jako v předchozím, obecné řešení soustavy $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ (při $\mu = 0$) lze vyjádřit ve tvaru

$$\mathbf{x} = c_1 \mathbf{h}^{(1)} + c_2 \mathbf{h}^{(1)} t + c_2 \mathbf{h}^{(2)} + c_3 \mathbf{h}^{(3)} e^{it} + c_4 \mathbf{h}^{(3)} e^{-it}$$

kde vektory $\mathbf{h}^{(1)}$, $\mathbf{h}^{(2)}$ a $\mathbf{h}^{(3)}$ jsou nějaká pevně zvolená nenulová řešení soustav lineárních rovnic

$$\begin{aligned} A\mathbf{h}^{(1)} &= 0, \\ A\mathbf{h}^{(2)} &= \mathbf{h}^{(1)}, \\ (A - iI)\mathbf{h}^{(3)} &= 0, \end{aligned}$$

c_1, c_2, c_3, c_4 jsou libovolné konstanty. Opět tedy vidíme, že i v limitním případě ($\mu \rightarrow 0$) je pohyb v okolí L_4, L_5 - s ohledem na existenci členu $c_2 \mathbf{h}^{(1)} t$ - v 1. aproximaci nestabilní. Navíc z faktu, že pro $\mu = 0$ se problém redukuje na problém dvou těles, který připouští m.j. hyperbolické a parabolické dráhy, vyplývá obecná nestabilita.

Poznamenejme, že jsme si dosud nevěšovali z-ové složky radius vektoru infinitesimálního tělesa. Pohyb podél této osy v blízkosti trojúhelníkových libračních center je pro všechna $\mu \in (0, \frac{1}{2}) > 1$. aproximaci popsán diferenciální rovnicí lineárního harmonického oscilátoru

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + z = 0 \implies z = \alpha \cos(t + \beta)$$

(α, β konstanty). Tedy pohyb ve směru osy z (kolmé na rovinu pohybu primárních těles) je v 1. aproximaci stabilní. To ale samozřejmě nikterak neovlivňuje "celkovou" nestabilitu pro

$$\mu = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} \sqrt{\frac{23}{3}}$$

výše odvozenou.

Zůstaňme nadále u trojúhelníkových libračních center a studujme případ, kdy

$$1 - 27\mu(1 - \mu) \neq 0.$$

Potom všechny kořeny charakteristické rovnice

$$\lambda^4 + \lambda^2 + \frac{27}{4}\mu(1 - \mu) = 0,$$

totiž

$$\lambda_1 = -\lambda_2 = \sqrt{\frac{-1 + \sqrt{1 - 27\mu(1 - \mu)}}{2}},$$

$$\lambda_3 = -\lambda_4 = \sqrt{\frac{-1 - \sqrt{1 - 27\mu(1 - \mu)}}{2}},$$

jsou navzájem různé. Označíme-li nějaký pevný vlastní vektor matice A příslušný vlastnímu číslu λ_i symbolem

$h^{(i)} \in E_4$, obecné řešení soustavy

$$x' = Ax \quad (x \in E_4)$$

bude

$$x = \sum_{k=1}^4 c_k e^{\lambda_k t} h^{(k)}$$

kde c_k ($k=1,2,3,4$) jsou libovolné integrační konstanty.

Jestliže konkrétně "bezrozměrná" hmota $\mu \in (0 < \mu \leq \frac{1}{2})$ splňuje

$$1 - 27\mu(1 - \mu) < 0$$

t.j.

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{6} \sqrt{\frac{23}{3}} < \mu \leq \frac{1}{2}$$

vidíme, že

$$\operatorname{Re} \lambda_k \neq 0, \operatorname{Im} \lambda_k \neq 0, k = 1, 2, 3, 4,$$

$$\overline{\lambda_3} = \lambda_1, \overline{\lambda_4} = \lambda_2.$$

Z lineární algebry je známo - vzhledem k tomu, že λ_3 s λ_1 a λ_4 s λ_2 jsou komplexně sdružené dvojice vlastních čísel matice A -

že vlastní vektory $h^{(3)}$ a $h^{(4)}$ příslušné k vlastním číslům λ_3 a λ_4 lze vybrat tak, že

$$\frac{h^{(4)}}{h^{(3)}} = \frac{h^{(2)}}{h^{(1)}} \quad \text{a} \quad \frac{h^{(4)}}{h^{(3)}} = \frac{h^{(1)}}{h^{(2)}} .$$

Potom místo hořehního výrazu pro řešení x ($x \in E_n$) rovnice $x' = Ax$ snadno nalezneme vyjádření pomocí reálného fundamentálního systému, totiž

$$x = \sum_{k=1}^2 \left[d_k e^{t \operatorname{Re} \lambda_k} \left(\operatorname{Re} h^{(k)} \cos(t \operatorname{Im} \lambda_k) - \operatorname{Im} h^{(k)} \sin(t \operatorname{Im} \lambda_k) \right) + d_{k+2} e^{t \operatorname{Re} \lambda_k} \left(\operatorname{Im} h^{(k)} \cos(t \operatorname{Im} \lambda_k) + \operatorname{Re} h^{(k)} \sin(t \operatorname{Im} \lambda_k) \right) \right]$$

(d_1 až d_4 jsou libovolné integrační konstanty, $d_k = c_k + c_{k+2}$, $d_{k+2} = i(c_k - c_{k+2})$, $k=1,2$). Protože $\lambda_1 = -\lambda_2$, je též

$\operatorname{Re} \lambda_1 = -\operatorname{Re} \lambda_2$. Je tedy právě jedna z veličin $\operatorname{Re} \lambda_1$, $\operatorname{Re} \lambda_2$ kladná. Z pohledu na posledně uvedený výraz pro obecné řešení soustavy $x' = Ax$ ihned vyplývá, že obecný pohyb v blízkosti trojúhelníkových libračních center je též pro $\mu > \frac{1}{2} - \frac{1}{6} \sqrt{\frac{23}{3}}$

nestabilní v 1. aproximaci. Lze ovšem opět zvolit počáteční podmínky tak, aby partikulární řešení je splňující bylo omezené. (Nechť např. pro určitost je $\operatorname{Re} \lambda_1 > 0$. Potom všechna řešení, pro něž $d_1 = d_3 = 0$ jsou omezenými funkcemi času.)

Jestliže však bezrozměrná hmota μ vyhovuje vztahu

$$1 - 27\mu(1 - \mu) > 0 ,$$

t. j.

$$(0 <) \mu < \frac{1}{2} - \frac{1}{6} \sqrt{\frac{23}{3}} ,$$

jest vidět, že

$$\operatorname{Re} \lambda_k = 0 \quad , \quad k=1,2,3,4 .$$

Označme

$$\operatorname{Im} \lambda_1 \equiv \omega_1 \quad , \quad \operatorname{Im} \lambda_3 \equiv \omega_2 .$$

Potom

$$\lambda_1 = i\omega_1 \quad , \quad \lambda_2 = -i\omega_1 \\ \lambda_3 = i\omega_2 \quad , \quad \lambda_4 = -i\omega_2 .$$

Vidíme tedy, že tentokrát λ_1 s λ_2 a λ_3 s λ_4 tvoří dvojice komplexně sdružených vlastních čísel matice A . Vlastní vektory $h^{(k)}$ $k=1,2,3,4$ příslušné k vlastním číslům λ_k lze tedy zvolit tak, aby

$$\frac{h^{(2)}}{h^{(1)}} = h^{(1)} \quad \text{a} \quad \frac{h^{(4)}}{h^{(3)}} = h^{(3)}$$

a obecné řešení rovnice $x' = Ax$ lze napsat ve tvaru

$$x = \sum_{k=1}^2 \left[d_k (\operatorname{Re} h^{(2k-1)} \cos \omega_k t - \operatorname{Im} h^{(2k-1)} \sin \omega_k t) + d_{k+2} (\operatorname{Im} h^{(2k-1)} \cos \omega_k t + \operatorname{Re} h^{(2k-1)} \sin \omega_k t) \right] .$$

Jsou tedy pro $\mu < \frac{1}{2} - \frac{1}{6} \sqrt{\frac{23}{3}}$ trojúhelníková librační centra stabilní v 1. aproximaci. Z výrazů pro λ_k dostáváme ihned následující vztahy charakterisující kruhové frekvence ω_1 a ω_2 :

$$0 < \omega_1 = \sqrt{\frac{1 - \sqrt{1 - 27\mu(1-\mu)}}{2}} < \frac{1}{\sqrt{2}} ,$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} < \omega_2 = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{1 - 27\mu(1-\mu)}}{2}} < 1$$

a dále

$$\omega_1^2 + \omega_2^2 = 1 ,$$

$$\omega_1^2 \cdot \omega_2^2 = \frac{27}{4} \mu (1 - \mu) .$$

Závěrem připomeňme již dříve zjištěnou stabilitu pohybu podél osy z platnou v 1. aproximaci pro všechna $\mu \in (0, \frac{1}{2})$.

(Jedná se o periodický pohyb s kruhovou frekvencí $\omega = 1$).

Obraťme nyní pozornost k pohybu v okolí přímkových libračních center L_1, L_2, L_3 kruhového restringovaného problému tří těles. Vzpomenme si na tvar jím korespondující soustavy variačních rovnic a zavedme nové závislé proměnné pomocí vztahů

$$x_1 = x , \quad x_3 = y , \quad x_5 = z ,$$

$$x_2 = \frac{dx}{dv} , \quad x_4 = \frac{dy}{dv} , \quad x_6 = \frac{dz}{dv} .$$

Potom uvedená soustava variačních rovnic přejde na tvar

$$x' = Ax ,$$

kde tentokrát $x = (x_1, x_2, \dots, x_6) \in E_6$ a A je matice typu 6×6 ,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 + 2A_j & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 - A_j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -A_j & 0 \end{bmatrix}$$

A_j jsou už dříve zmíněné funkce hmoty μ , $1 < A_j \leq 8$ pro $0 < \mu \leq \frac{1}{2}$ a pro všechna přímková librační centra L_j , $j = 1, 2, 3$. Charakteristická rovnice