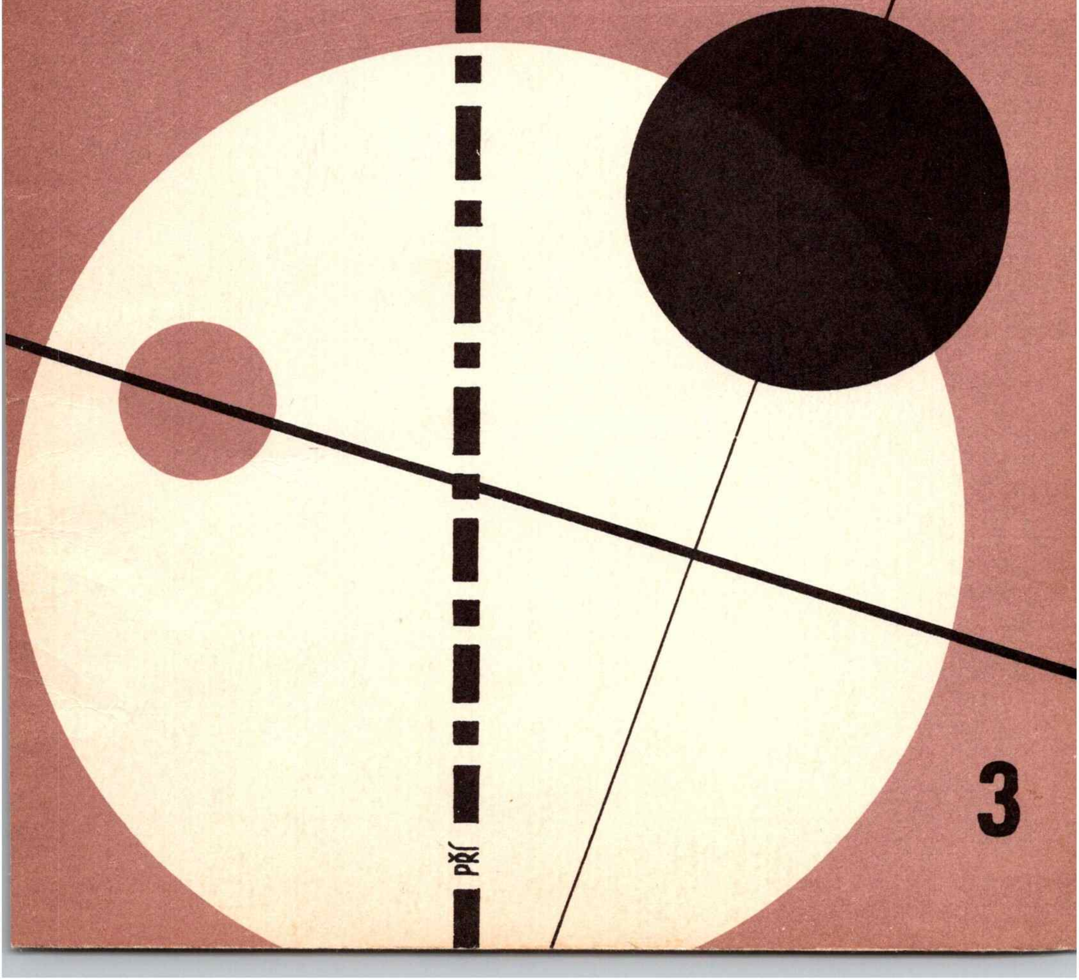
KOSMICKÉ ROZHLEDY

NEPERIODICKÝ VĚSTNÍK ČESKOSLOVENSKÉ ASTRONOMICKÉ SPOLEČNOSTI PŘI ČSAV



3

PŘS

KOSMICKÉ ROZHLEDY, neperiodický věstník Československé astronomické společnosti při Československé akademii věd

Ročník 9 - 1971 Číslo 3

Z. Horský

K původní formulaci Keplerových zákonů

Pro soudobou astronomii jsou Keplerovy zákony ustálenou a standardní hodnotou. I když i v našem století zaznamenala jejich formulace, tak jak ji běžně traktují astronomická kompendia, určité změny, jsou to změny v podstatě nepatrné a vzhledem k celkovému vývoji nebeské mechaniky nevýznamné.

Dnešní astronom se zřídkakdy setká s autentickým historickým textem. Snad proto se často vytváří představa, že i Keplerovy zákony, jak je formuloval sám Kepler, byly co do znění v podstatě totožné s dnešní běžně známou versí. Bývá proto zpravidla překvapen, má-li vzít na vědomí, že jeho představa není přesná a že zdaleka neodpovídá historické skutečnosti. Upozorněme, že tento případ zdaleka není ojedinělý; spíš je typickou ukázkou stavu, který je v exaktních vědách v poměru k jejich vlastní historii poměrně běžný. Uveďme jako příklad některé pojmy, jež se ve fyzikálních vědách zpravidla dávají do vztahu ke Galileo Galileimu. Soudobá fyzika běžně užívá pojmů jako galileovská fyzika, galileovská relativita, galileovská inercie atp. Jsou to pojmy bezesporu velmi užitečné, neboť jejich obsah je praxí dostatečně přesně vymezen a tedy usnadňují rychlé sjednocení názorů o určitém typu fyziky, relativity, inercie atp. Avšak užitečné jsou jen potud, pokud slouží právě uvedenému účelu. V případě, kdy začínají vzbuzovat představu, že uvedené pojmy v tomto smyslu lze nalézt již ve vědeckém díle Galilea Galilei, pouze zavádějí a matou. Nic nepomůže naše překvapení nad tím, že tzv. galileovská fyzika není fyzikou Galileiho. Naše případná představa, že ten, kdo žil bezprostředně po Galileim, mohl a tedy měl znát tzv. galileovskou fyziku, je prostě představa mylná.

Rovněž tak bude zklamán čtenář, který znaje dobře soudobé formulace Keplerových zákonů, sáhne po jeho spisech "Astronomia nova" (1609), kde byly publikovány prvé dva zákony, a "Harmonices mundi libri V" (1619), kde byl publikován třetí, a bude očekávat, že zde na význačných místech najde pregnantní formulace těchto tří zákonů, v téže obecnosti a v podstatě s užitím téže terminologie, jak je to běžné dnes. Že tomu tak není, vyplývá z celé řady faktorů. Mnoho je dáno Keplerovým zvláštním slohem, jakým psal své hlavní vědecké práce. Je to sloh značně těžkopádný, rozvleklý a tedy málo vhodný pro čtenáře dnešní doby, který pospíchá. Je to však sloh doslova fascinující pro toho, kdo se jednou do díla začte. Celá stavba Keplerových hlavních spisů, zejména spisu Astronomia nova, je totiž nemálo odlišná od toho, jak psali přírodovědci před ním (třeba Koperník) i po něm (třeba Newton). Určuje-li strukturu díla Koperníkova i Newtonova systém, o němž se pojednává, a poznatky tu jsou presentovány ve své hotové a vybroušené formě, aniž by bylo sděleno, jak se k nim došlo, je tomu u Keplera právě naopak. Jeho styl je do značné míry já-styl. Kepler referuje o svém bádání, a postup bádání vytváří strukturu díla. Neušetří nás při tom ani podrobného výkladu o všech chybných pokusech a slepých uličkách, jak je to zvlášť patrné právě u Nové astronomie. Co tratíme při rozvleklosti textu a sledování řady odboček, to je nám plně vynahrazeno zcela ojedinělým průhledem do mistrovy dílny, což právě mnozí jiní tak důsledně utajují. Můžeme téměř spoluprožívat Keplerovo těžké rozhodování, jakým směrem vést další výzkum. Není asi jen zcela nahodilé, ale pravděpodobně vychází z obecného cítění doby, že v umělecké hladině tento proces tápání a rozhodování prakticky současně zobrazil Shakespearův Hamlet.

Pak se ovšem stane, že Keplerovy zákony - nejvlastnější astronomické výsledky spisů Astronomia nova a Harmonice mundi - jsou v textu knih jakoby ztraceny. Přesto tak tomu není docela. Kepler dobře věděl, že v zákonech dospívá jeho bádání k vrcholům. Utajil-li zákony jinak, to jest jak v celkové struktuře toho či onoho díla, tak, což vlastně spadá na vrub nejen autora, ale i tiskaře, v grafickém zdůraznění, tak přesto věren své zásadě, že podrobně referoval nejen o tom, co bylo objektem bádání, ale i o sobě jako bádajícím a objevujícím subjektu, nemohl utajit svou radost nad svými vlastními objevy. Přimělo jej to, že v této pro něho vzácné a výjimečné chvíli citoval verše svého oblíbeného básníka Vergilia. A tak formulaci zákona elips předcházejí na počátku 59. kapitoly Astronomia nova verše z 3. Vergiliovy Eklogy, formulaci harmonického zákona v 3. kapitole 5. knihy Harmonices mundi dva verše z první Eklogy téhož básníka. Vergiliovy verše jsou tak vlastně hlavním rozlišujícím znakem těchto dvou zákonů.

Vznikne asi otázka, proč takto není vyznačen i zbývající zákon, dnes běžně označovaný jako zákon ploch. Odpověď vyplyne později, až se vrátíme k zvláštnímu postavení tohoto zákona v rámci Keplerova díla.

Zvykli jsme tedy již tomu, že Keplerovy zákony budeme v jeho díle poněkud obtížněji hledat. Ale i tak, nalezneme-li je, překvapí nás jejich historicky autentická formulace, v mnohém odlišná od dnešní.

Co především překvapí, je fakt, že ani jeden ze zákonů není v těchto Keplerových spisech označen jako zákon. Zdá se tedy být zatím značně daleko k Isaacu Newtonovi, který o tři čtvrtě století později, když na čelném místě svých Principií uváděl své tři zákony pohybu, výrazně je nadepsal: "Axiomata sive leges motus" - axiomy čili zákony pohybu.

Ve skutečnosti je však pouze těžko vysvětlit a stále zůstává poněkud záhadou, proč nakonec sám Kepler neoznačil své zákony jako zákony, ač pojem přírodního zákona, myšleného ovšem jako matematický přírodní zákon, mu byl nejen dobře znám, ale dosažení matematicky formulovaných přírodních zákonů bylo přímo jeho vědeckým programem. V této souvislosti se sluší uvést, že v Praze, kde Kepler skutečně prvé dva zákony odvodil, nebyl tento program něčím zcela novým.
V roce 1557, tehdy jako jeden z prvních a tedy velmi prozíravě, volal po tomto cíli Tadeáš Hájek z Hájku ve své úvodní Řeči o chvále geometrie (Oratio de laudibus geometriae), jež byla vstupem do jeho přednášek o Eukleidových Základech na Karlově universitě. V rozsáhlém výkladu o Platonově pojetí přírodních

zákonů je představuje jako zákony matematické a v přírodě tak bezvýhradně platné, že sám stvořitel světa, ustanoviv je jednou, nemůže jim již nikdy víc vzdorovat [1].

Rovněž Kepler sám znal v tomto, ne-li ještě v pregnantnějším smyslu pojem přírodního zákona. Vyplývá to např. z jeho korespondence, a to i právě z doby hlavních úspěchů práce na Nové astronomii. Tak např. v létě r. 1605, když z Prahy píše svému příteli Hegulontiovi (Heydonovi) do Anglie, výrazně uvádí pojem "přírodní zákon" (naturae lex) právě do souvislosti s tím, jak Hegulontiovi referuje o svých úspěších při zvládání teorie Martu, tedy vlasně přímo o dvou prvních zákonech [2]. Přesto však do publikovaných Keplerových spisů měl pojem přírodního zákona jaksi zakázenou cestu; poprvé se s ním setkáme až v úvodu k Rudolfinským tabulkám, a to ještě - v citaci výseku z Reinholdova spisu [3].

Přistupme k otázce prvotního znění Keplerových zákonů. Se dvěma z nich budeme poměrně brzo hotovi. Je to eliptický zákon, dnes uváděný zpravidla jako Keplerův prvý zákon, ač byl Keplerem autenticky i dosažen i zařazen jako druhý, a harmonický zákon, běžně a i co do pořadí vzniku správně označovaný jako třetí zákon. Rozdíly v autentické a dnešní formulaci tu spadají převážně na vrub tehdejšího způsobu matematicko-fyzikálního vyjadřování i na vědomí obecnosti těchto dvou zákonů. Dnes je jim přisuzována mnohem obecnější platnost, než jak Kepler tušil. Eliptický zákon je ve spise Astronomia nova uváděn jako fyzikální hypotéza a je vysloven jaksi napůl: "dráha planety je elipsa" [4], zatímco fakt, že Slunce je v jednom z ohnisek této elipsy, je jednoznačně obsažen ve veškerém rozsáhlém okolním výkladu.

Harmonický zákon je formulován nejobecněji a vlastně tak, že jeho znění je ze všech nejblíže současné běžné formulaci; to, co zdánlivě způsobuje značné rozdíly, je jen způsob slovního popisu užitých matematických vztahů, jenž byl tehdy značně odlišný od dnešního: "Poměr, který je mezi oběžnými dobami kterýchkoli dvou planet, je přesně půldruhanásobkem poměru středních vzdáleností, tedy samotných drah..." [5].

Rozhodně nejvíce obtíží a nejasností je spojeno s výkladem vzniku zákona ploch, tedy toho zákona, který je dnes běžně označován jako Keplerův druhý zákon. Fakticky vznikl v pořadí jako první a Kepler jej formuloval, zabývaje se v tu chvíli nikoli pohybem Marse kolem Slunce, ale pohybem Země kolem Slunce. Cílem sice stále bylo rozřešit pohyb Marsu, avšak bezprostředním krokem, jímž se Kepler měl k tomuto cíli přiblížit, zde bylo zvládnout druhou anomalii v pohybu Marsu, tedy jinými slovy poznat a tak moci ze zdánlivého pohybu Marse vyloučit ty nepravidelnosti, které jsou způsobeny nepravidelnostmi pohybu našeho pozorovacího stanoviště, tedy Země. Tato okolnost, zdánlivě snad bezvýznamná, Keplerovi nemálo přispívala k úspěchu. Excentricita zemské dráhy je ve srovnání s Martovou mnohem menší, a tak Kepler, neznaje ještě eliptickou dráhu a užívaje pracovně stále zatím dráhy kruhové, nezabředl při zkoumání pohybu Země do zbytečných nesnází. Později, když skutečně eliptickou dráhu objevil, vztáhl platnost (našeho) druhého zákona i na tuto dráhu, aniž by se již podrobněji zabýval rozborem celé otázky.

Základní podnět, který Keplera vedl k objevu druhého zákona, je zcela jasný a nesporný a spadá v jedno s celkovým

Keplerovým názorem, který byl základem jeho reformace astronomie: Všechny planety respektují při svém pohybu kolem centrálního tělesa soustavy skutečné fyzické Slunce a nikoli nějaký pomyslný bod uvnitř dráhy, geometricky snad i nějak singulární, ale fyzikálně prázdný. Jako takové odmítl i užívání tzv. "středního Slunce", s nímž pracovali jeho předchůdci. Pro Keplera musí síla, která uvádí planety do pohybu, vycházet ze Slunce, a podle Keplerových představ, který se inspiruje nedávným objevem zemského magnetismu, jak jeho autorem je Angličan William Gilbert [6], je to síla magnetická.

Zde se - na druhou stranu - ukazuje i Keplerova důslednost, s níž jde za svým cílem chápat matematický výklad pohybu planet jako úlohu objasnit fyzikální proces pohybu planet. U pohybu Země kolem Slunce byly rozdíly nepatrné a zanedbatelné a všichni Keplerovi předchůdci, Ptolemaios, Koperník i Tycho Brahe tu vystačili s rovnoměrným pohybem Země, resp. Slunce po kružnici, v níž bylo Slunce, resp. Země postaveno excentricky. Právě zde mohl Kepler stejně tak dobře vystačit s představou rovnoměrného pohybu, avšak pro něho, který byl přesvědčen, že hybná síla planet vychází ze Slunce, je nutné vzít v úvahu i důsledek, že rychlost pohybu planety bude záviset na vzdálenosti od Slunce a tedy že i pohyb Země kolem Slunce musí být nerovnoměrný. Aby tuto věc podrobně prozkoumal, vytvořil v Nové astronomii původní metodu, při níž jakoby pozoroval pohyb Země z nehybného Marsu.

Keplerova představa o magnetickém působení Slunce na pohyb planet je ovšem chybná, a to nejen v názoru o kvalitě síly, jíž Slunce na planety působí - víme dobře, že to v tomto smyslu není síla magnetická, ale že mezi Sluncem a planetou je působení gravitační - to však v podstatě vadí méně, protože Kepler tuto magnetickou sílu, jež má vycházet ze Slunce, žádným způsobem blíže neurčuje a je tedy možnost ji představovat jako libovolnou zatím blíže nepoznanou fyzikální sílu vycházející ze Slunce. Avšak z hlediska budoucí všeobecné gravitační teorie, k jejímuž vzniku Kepler sám nesporně buduje cestu a přispívá dílčími názory (jak o tom svědčí řada vět formulovaných v úvodu k Nové astronomii, tedy ovšem již po uzavření celého díla), je Keplerova představa o magnetickém působení Slunce na pohyb planet nesprávná i pokud jde o způsob, jakým tato síla má planety uvádět do oběhu kolem Slunce. Podle gravitační teorie, jak známo, se vzájemné působení Slunce a planety projevuje v radiální složce pohybu planety, kdežto tangenciální složka připadá na vrub principu setrvačnosti. Kepler však působením Slunce na planety vysvětluje právě tangenciální složku jejich oběhu. Slunce, o němž předpokládá, že se otáčí kolem vlastní osy ve stejném smyslu jako kolem něho obíhají planety (jak se také krátce po publikování Keplerovy "Astronomia nova" r. 1609 prověřilo při pozorování Slunce dalekohledem), svými "magnetickými paprsky" (Kepler předpokládaný magnetický výron ze Slunce nazývá "effluvium magneticum") má "postrkovat" planety v jejich drahách.

Právě tato kuriózní představa je kořenem Keplerova druhého zákona. I když je z hlediska pozdějšího vývoje nebeské mechaniky nesprávná a neudržitelná, ukazuje zároveň výhody a náskok, jež Kepler získal, jakmile začal fyzikálně přistupovat k problému, který jeho předchůdci projednávali jen čistě geometricky. Protože si Kepler představoval, že Slunce vysílá své magnetické paprsky zhruba v rovině ekliptiky, došel nutně k závěru, že doby, za něž planeta urazí stejně malé úseky dráhy, jsou přímo úměrné vzdálenosti planety od Slunce. (Kdyby Keplerovi nebyl cizí pojem okamžité rychlosti, mohlo by se s výhodou formulovat takto: okamžitá rychlost planety je nepřímo úměrná její vzdálenosti od Slunce). V pozadí těchto úvah nestojí však jen představa o magnetickém výronu ze Slunce, ale i představa rovnováhy na nerovnoramenné páce; tam, kde je vzdálenost od Slunce větší, jsou planety pro pohyb po dráze v tomto poměru "těžší", a naopak. [7]. Toto pravidlo, v německé literatuře o Keplerovi běžně nazývané "Radiensatz", je bezprostředním předchůdcem skutečného zákona ploch ("Flächensatz"). Přeskok od jednoho ke druhému se udál jaksi nekontrolovaně, jako matematická pomůcka při snaze o usnadnění výpočtu. Velmi hrubě řečeno: Kepler, počítaje součty jednotlivých vzdáleností planety pro malé úseky dráhy, nahradil součty vzdáleností plochou, v níž se jednotlivé vzdálenosti "srovnávají". Matematicky však oba vztahy nejsou ekvivalentní. Tato jakási velkorysá nedůslednost či důsledná velkorysost trápila později četné astronomy i znalce Keplerova díla z řad historiků vědy, když se zabývali otázkou, zda Kepler si byl vědom rozdílnosti mezi prvou a druhou formulací [8] a zda nakonec nebyla dána přednost zákonu ploch jen proto, že v předběžných výpočtech se dvě chyby shodou okolností navzájem vyrušily. Max Caspar, zřejmě nejlepší znalec Keplerova života a díla a také jeho nejlepší editor, hájí svého klienta např. i proti názoru astronoma Enckeho a řeší celou věc závěrem, že Kepler si byl dobře vědom rozdílu mezi oběma postupy. Ve prospěch zákona ploch měla rozhodnout nakonec zkušenost, neboť tento zákon se nejlépe hodil pro výpočet pohybu planet, touto cestou bylo možno nejlépe dojít k souhlasu se skutečností, a proto byl právě tento zákon přijat. [9].

Pro další vývoj, zejména pro přijetí tří zákonů měl zřejmě rozhodující význam Keplerův spis Epitome astronomiae copernicanae (volněji přeloženo:Učebnice koperníkovské astronomie), který vyšel na dvě části r. 1618 a 1621. Pro svou přístupnější formu (je psán jako sled otázek žáka a odpovědí učitele) měl jistě větší dosah působnosti než Keplerovy hlavní spisy Astronomia Nova i Harmonice mundi. Keplerovi tedy mohl dát příležitost formulovat tři zákony znova a tedy v jakési konečné redakci. Co je tu nového, je důsledné rozlišení mezi oběma postupy, jež vedou jeden k "Radiensatz", druhý k "Flächensatz". [10]. Avšak jinak, pokud jde o formulaci zákonů, nepřinesla Epitome v podstatě nic nového. Nesporně mnoho přispěla k tomu, aby smysl zákonů byl důkladně pochopen. V podrobném výkladu tu jsou důsledky zákonů přebírány do posledních detailů. Ale právě proto, hledáme-li výraznou a stručnou jednoznačnou formulaci zákonů - té se tu nedostává. Je rozmělněna v celém výkladu.

---

[1] Thaddaeus Nemicus Hayko ab Hagek: Oratio de laudibus geometriae, scripta et recitata in Academia Pragensi sub initium lectionis Euclideae, xij Februarij die, Anno M. D. LVII., fol. B5ver - B6rec.

[2] Joannis Kepleri astronomi Opera omnia ed. Ch. Frisch, vol. III, Francofurti a.M. et Erlangae 1860, str. 37., něm. překlad: Johannes Kepler in seinen Briefen, herausg. v. Max Caspar u. Walther von Dyck, Bd. I, München u. Berlin, 1930, str. 246.

[3] Joannis Kepleri astronomi Opera omnia, vol. VI, Francofurti a.M. et Erlangae 1866, str. 673

[4] "ellipsis est planetae iter", J. K. a.O.o., ed. Ch. Frisch, vol. III, Francofurti a.M. et Erlangae 1860, str. 400

[5] "...proportio, quae est inter binorum quorumcunque planetarum tempora periodica, sit praecise sesquialtera proportionis mediarum distantiarum, id est orbium ipsorum..." Harmonice mundi, kn. 5. kap. 3, tj. J.K. a.O.o., ed. Ch. Frisch, vol. V, Francofurti a.M. et Erlangae, 1864, str. 279.

[6] William Gilbert: De magnete magneticisque corporibus et de magno magnete Tellure physiologia nova, Londini 1600.

[7] Astronomia nova, kap. 33., tj. J.K. a.O.o., ed. Ch. Frisch, vol. III, Francofurti a.M. et Erlangae 1860, str. 300-301. Proto i mezi šest allegorických postav, jež zdobí střechu chrámu na frontispici Rudolfinských tabulek, se dostala i Mechanica, jež drží v ruce nerovnoramenné váhy. Vahadlo je v rovnovážné poloze, neboť na obou koncích vahadla jsou upevněna břemena nepřímo úměrná délce ramen. Příznačné je, že břemeno, jež tu vlastně znázorňuje planetu, je označováno hvězdičkou, a v bodě, kde je vahadlo podepřeno, je vyznačeno Slunce. Srovnej: Walther Gerlach - Martha List: Johannes Kepler. Dokumente zu Leben und Werk. Ehrenwirth Verlag, München, 1971, str. 115

[8] Naposledy se výrazně touto otázkou zabýval Eric J. Aiton v článku "Kepler's Second Law of Planetary Motion" (Isis, Vol. 60, Part 1, No 201, str. 75-90), již dlouho před tím do diskuse zasáhli např. J.F.Encke, J. Frischauf, pak E.J.Dijksterhuis, Alexandre Koyré a další.

[9] Johannes Kepler: Neue Astronomie. Übersetzt und eingeleitet von Max Caspar. München - Berlin, 1929, str. 46 s hvězdičkou

[10] E. J. Aiton, cit. práce, str. 90

P. Andrle

Keplerovy zákony a jejich důsledky

> Kinematika je nauka o pohybu těles, který popisuje, aniž hledá jeho příčinu.
>
> Dynamika je nauka o pohybu těles podrobených silovému působení.
>
> (Učebnice fyziky pro školy povinné)

Letos [illegible]avíme čtyřsté výročí Keplerova narození. Keplerem vyvrcholila a v podstatě také skončila kinematika nebeských těles. Bylo by, myslím, zbytečné psát o vývoji názorů na pohyby planet od nejstarších dob až po Keplera. Je to sice velmi zajímavá historie, plná usilovného hledání, plná geniálních nápadů i omylů, plná nepochopení i umlčování nových názorů, ale bylo o ní už psáno mnohokrát. Proto si raději dnes všimneme důsledků Keplerových zákonů nebo, chcete-li, uděláme si výlet do rudolfinské doby a přitom "nezapomeneme" na své matematické znalosti pocházející z doby mnohem pozdější. Jako už před námi Bertrand a jiní budeme zjišťovat, co vyplývá z Keplerovské kinematiky s pomocí soudobých matematických metod.

Vyjdeme nejdříve z Keplerova poznatku, že planety se pohybují po eliptických drahách a položíme si otázku, jaká síla je příčinou tohoto faktu. O této síle budeme pouze předpokládat, že závisí jen na vzdálenosti planety od centra (není tím míněn střed elipsy) a lze ji tedy psát ve tvaru $F = F(r)$. Protože elipsa je rovinná křivka, můžeme zvolit takovou prostorovou souřadnicovou soustavu, aby se planeta trvale pohybovala v rovině $z = 0$. Má-li síla složky $(m\ddot{x}, m\ddot{y}, 0)$, kde dvě tečky nad písmeny značí druhou derivaci podle času, můžeme psát

$$(1) \qquad \begin{aligned} m\,\ddot{x} &= F(r)x/r \\ m\,\ddot{y} &= F(r)y/r \end{aligned} \qquad m \text{ je hmota planety}$$

a po substituci

$$(2) \qquad F(r) = m\, r\, u(r)$$

přejde (1) na tvar

$$(3) \qquad \ddot{x} = x\, u(r) \quad , \quad \ddot{y} = y\, u(r).$$

Dále využijeme toho, že se pohyb děje po elipse. Rovnici kuželosečky (a tedy i elipsy) můžeme v nejobecnějším případě psát jako mnohočlen

$$(4) \qquad Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \quad .$$

Abychom mohli využít rovnic (3), vyjádříme (4) pomocí diferenciální rovnice. Budeme předpokládat $y = y(x)$ a vyloučíme konstanty $A, \ldots, E$ tím způsobem, že budeme (4) postupně pětkrát derivovat podle x. Užijeme-li zkrácených zápisů $y^{IV} = d^4y/dx^4$ atd., dostaneme

$$(5) \qquad \begin{aligned} & Cyy^{I} + B(y + xy^{I}) + Ey^{I} + Ax + D = 0 \\ & C(yy^{II} + y^{I^2}) + B(2y^{I} + xy^{II}) + Ey^{II} + A = 0 \\ \hline & C(yy^{III} + 3y^{I}y^{II}) + B(3y^{II} + xy^{III}) + Ey^{III} = 0 \\ & C(yy^{IV} + 4y^{I}y^{III} + 3y^{II^2}) + B(4y^{III} + xy^{IV}) + Ey^{IV} = 0 \\ & C(yy^{V} + 5y^{I}y^{IV} + 10y^{II}y^{III}) + B(5y^{IV} + xy^{V}) + Ey^{V} = 0 \end{aligned}$$

Pokud známe B, C, E, mohou nám prvé dvě rovnice (5) sloužit k určení A a D. Z homogenní soustavy zbývajících tří rovnic však můžeme nalézt nenulové hodnoty B, C, E pouze tenkrát, když determinant

$$(6) \qquad \begin{vmatrix} yy^{III} + 3y^{I}y^{II} & 3y^{II} + xy^{III} & y^{III} \\ yy^{IV} + 4y^{I}y^{III} + 3y^{II^2} & 4y^{III} + xy^{IV} & y^{IV} \\ yy^{V} + 5y^{I}y^{IV} + 10y^{II}y^{III} & 5y^{IV} + xy^{V} & y^{V} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 3y^{II} & y^{III} \\ 3y^{II^2} & 4y^{III} & y^{IV} \\ 10y^{II}y^{III} & 5y^{IV} & y^{V} \end{vmatrix} =$$

$$= y^{II}(45y^{II}y^{III}y^{IV} - 40y^{III^2} - 9y^{II^2}y^{V}) = 0 \quad .$$

Nechme-li stranou pro nás nepodstatnou parabolu $y = ax^2 + bx + c$, která odpovídá křivce $y^{II} = 0$ a navíc bude v dalším obsažena jako speciální případ, dostaneme z (6) důležitou rovnici

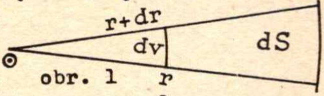
$$(7)\qquad 9{y^{II}}^2 y^{V} - 45 y^{II} y^{III} y^{IV} + 40 {y^{III}}^3 = 0 \quad ,$$

do které budeme postupně dosazovat z (2) a (3). Dříve, než tak učiníme, musíme vyjádřit jednotlivé derivace z (7) pomocí funkce $u(r)$. Platí

$$(8)\qquad y^{I}.\dot{x} = \dot{y}$$

$$y^{II}.\dot{x}^3 = (\dot{x}y - x\dot{y})u(r) = -2Cu(r) \quad ,$$

kde C je konstanta. Platnost druhého vztahu (8) lze snadno dokázat s pomocí Keplerova zákona ploch, podle kterého průvodiče planet opisují plochu úměrnou času - neboli plošná rychlost je konstantní. Vyjdeme z náčrtku na obr.1, kde nekonečně malou plošku dS můžeme počítat jako trojúhelník, přičemž součiny diferenciálů zanedbáme. Platí



obr. 1

$$(9)\qquad dS = \frac{1}{2} r(r + dr)\sin dv = \frac{1}{2} r^2 dv \quad .$$

Plošná rychlost je

$$(10)\qquad C = \frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \mathring{v} \quad .$$

Přejdeme-li nazpět k pravoúhlým souřadnicím pomocí transformací

$$(11)\qquad x = r\cos v \qquad\qquad r = (x^2 + y^2)^{1/2}$$

$$y = r\sin v \qquad\qquad v = \operatorname{arctg}(y/x)$$

a odtud

$$(12)\qquad \dot{v} = \frac{1}{1 + (y/x)^2} \cdot \frac{\dot{y}x - \dot{x}y}{x^2} = \frac{\dot{y}x - \dot{x}y}{r^2} \quad ,$$

můžeme (10) přepsat na tvar

$$(13)\qquad 2C = \dot{y}x - \dot{x}y \quad .$$

Dosadíme-li (13) do (8), máme poslední úpravu plně ospravedlněnou. Podobně jako jsme odvodili (8), můžeme nalézt

$$(14)\qquad y^{III}\circ\dot{x}^5 = 2C(3u^2x - \dot{u}\dot{x})$$

$$y^{IV}.\dot{x}^7 = 2C(3u^2\dot{x}^2 - \bar{u}\,\dot{x}^2 - 15u^3x^2 + 10u\mathring{u}x\mathring{x})$$

$$y^{V}\circ\dot{x}^9 = 2C(-\ddot{u}\,\dot{x}^3 + 16u\dot{u}\,\dot{x}^3 - 45u^3x\dot{x}^2 + 15u\,\bar{u}\,x\,\dot{x}^2 -$$

$$-105\,u^2\mathring{u}x^2\mathring{x} + 10\,\dot{u}^2x\dot{x}^2 + 105\,u^4x^3) \quad .$$

Po dosazení (8) a (14) do (7) obdržíme po jednoduchých, ale zdlouhavých úpravách

$$(15)\qquad -9u^2\,\ddot{u} + 9u^3\dot{u} + 45u\,\dot{u}\,\bar{u} - 40\dot{u}^3 = 0 \quad .$$

Po substituci

$$(16)\qquad u = w^{-3/2}$$

se (15) dále zjednoduší

$$(17)\qquad \ddot{w} - w^{-3/2}\mathring{w} = 0 \quad .$$

Protože $w = w(r)$, bude výhodné přejít k derivacím podle r, které budeme označovat příslušným počtem čárek. Vyjdeme z transformací

(18) $\dot{w} = w'\dot{r}$

$$\ddot{w} = w''\dot{r}^2 + w'\ddot{r}$$

$$\dddot{w} = w'''\dot{r}^3 + 3\dot{r}\,\ddot{r}\,w'' + \dddot{r}\,w'$$

Dříve než dosadíme (18) do (17), vyjádříme s pomocí (3), (13) a (16) časové derivace průvodiče jako funkce r, ṙ, w, w.
Platí

(19) $\dot{r} = \dfrac{x\dot{x} + y\dot{y}}{r}$

$$\ddot{r} = \frac{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + x^2w^{-3/2} + y^2w^{-3/2})(x^2 + y^2) - (x\dot{x} + y\dot{y})^2}{r^3} =$$

$$= \frac{4C^2}{r^3} + r\,w^{-3/2}$$

$$\dddot{r} = -\frac{12\,C^2\dot{r}}{r^4} + \dot{r}\,w^{-3/2} - \frac{3}{2}\,r\dot{r}\,w^{-5/2}\,w'$$

Dosadíme-li (18) a (19) do (17), dostaneme

(21) $\dot{r}\left[w'''\dot{r}^2 + \dfrac{12\,C^2}{r^3}\,(w'' - w'/r) + 3r\,w^{-3/2}\{w'' - w'^2/(2w)\}\right] = 0.$

Nejjednodušeji lze rovnici (19) vyhovět tak, že

(21) $\dot{r} = 0$ a odtud $r = \mathrm{const}$,

což odpovídá kruhové dráze. Pro rychlost s pomocí (9) a (10) platí $V^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = r^2\dot{v}^2 = 4C^2/r^2$ - tedy opět konstantní výraz. Jde tedy o rovnoměrný pohyb kruhový, pro který je dostředivá síla dána známým vztahem

(22) $F = \dfrac{m\,V^2}{r}$.

Využijeme třetího Keplerova zákona, podle kterého v případě kruhové dráhy (kružnice je zvláštní případ elipsy)

(23) $\dfrac{r^3}{P^2} = K = \mathrm{konst}$.

Protože v případě rovnoměrného pohybu kruhového $V = 2\pi r/P$, odvodíme po dosazení do (22)

(24) $F = \dfrac{4\pi^2 r^2 m}{P^2 r} = \dfrac{4\pi^2 m\,K}{r^2}$,

takže dostředivá (přitažlivá) síla je nepřímo úměrná druhé mocnině vzdálenosti.

Řešení (21) však je velmi speciální případ. Obecně je téměř vždy $\dot{r} \neq 0$, takže (20) může být trvale rovno nule pouze tehdy, když je roven nule mnohočlen v hranaté závorce. A opět: Protože je výraz v závorce roven nule identicky, musí být např.

(25) $w''' = 0$ a odtud $w = \alpha r^2 + \beta r + \gamma$,

kde α, β a γ jsou konstanty. Dosadíme-li (25) do (20), dostaneme

(26) $\dfrac{12\,C^2}{r^3}\left(2\alpha - \dfrac{2\alpha r + \beta}{r}\right) + 3r\,w^{-3/2}\left[2\alpha - \dfrac{(2\alpha r + \beta)^2}{2(\alpha r^2 + \beta r + \gamma)}\right]$.

Z identické platnosti (26) vyplývá, že musí být rovny nule výrazy v prvé kulaté i hranaté závorce. Prvému požadavku odpovídá případ $\beta = 0$. Je-li $\beta = 0$, anuluje se hranatá závorka buď když $\gamma = 0$, nebo když $\alpha = 0$. Je-li $\gamma = 0$, potom $w = \alpha r^2$

a podle (2) a (16)

(27) $$F(r) = \frac{m\,r}{\alpha^{3/2} r^3} = \frac{m}{\alpha^{3/2}} \frac{1}{r^2} ,$$

což je jeden z možných tvarů Newtonova zákona. Tedy: Z Keplerových zákonů vyplývá Newtonův gravitační zákon, z něhož můžeme dostat téměř celou nebeskou mechaniku a mnoho dalších zákonitostí.

Ani druhá výše uvedená možnost není bez zajímavosti. Je-li totiž $\alpha = 0$ a $\gamma \neq 0$, potom w = const a

(28) $$F(r) = \frac{m}{\gamma^{3/2}} r ,$$

tj. působící síla je úmerná vzdálenosti od středu. I když to není na první pohled zřejmé, může být i (28) důsledkem zákona všeobecné přitažlivosti. Dá se dokázat, že působící síla je úměrná vzdálenosti, pohybuje-li se částice uvnitř koule, kde plochy stejné hustoty jsou soustředné slupky (např. uvnitř kulové hvězdokupy).

Náš "výlet" končí a nám nezbude, než se omluvit čtenářům, že tento článek obsahoval více matematiky, než je v Kosmických rozhledech zvykem. Newton kdysi řekl:"Uviděl -li jsem více než jiní, bylo to proto, že jsem stál na ramenech obrů". Newton to v tomto výroku se skromností poněkud přehnal; nebylo to jenom proto. Jestliže však tento článek alespoň některému čtenáři pomohl poněkud hlouběji pochopit, proč Kepler byl jedním z těchto obrů, pak, myslím, splnil svůj účel.

J. Kolář

Anténní soustavy radioteleskopů

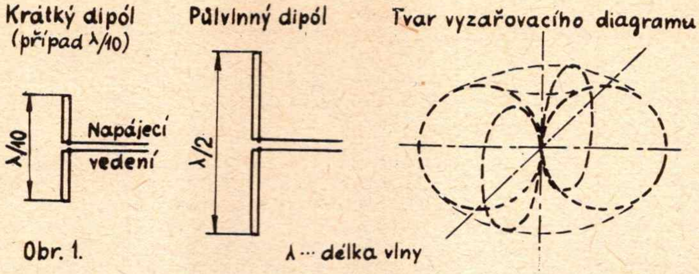
Prvky anténních soustav.

V prvém čísle tohoto ročníku K.R. jsme se seznámili se způsoby, kterými je možno vhodným seskupením více dílčích antén (prvků) docílit žádaného tvaru vyzařovacího diagramu neboli radiometrického tělesa. V tomto článku se seznámíme s prvky odvozenými od nejjednodušší antény (a zároveň i nejznámější), tzv. dipólu.

Jednoduchý dipól.

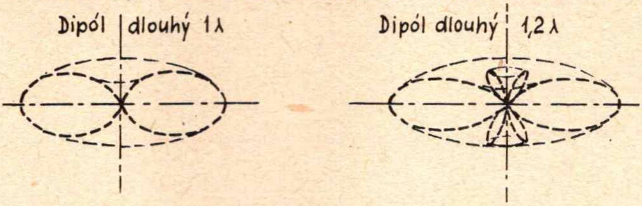
Tato anténa je pro účely radiometrické a tím i radioastronomické velmi důležitá, protože je po stránce teoretické podrobně propracována a její vlastnosti dovedeme předem přesně vypočítat. (To znamená, že dipolu můžeme používat podobně, jako trychtýřové a rámové antény jako etalonů zisku. Každá má ovšem uplatnění v jiném kmitočtovém pásmu. Trychtýř od 500 do 50 000 MHz, dipól od 50 do 1000 MHz a rám pro kmitočty nižší.)

Vyzařovací diagram dipólu má tvar anuloidu s nulovým vnitřním průměrem. Diagram stejného tvaru (obr.1) mají všechny tenké dipoly počínaje tzv. elementárním dipólem s rameny nekonečně krátkými až po dipol s každým ramenem dlouhým čtvrt vlny. Takovému dipolu se říká půlvlnný dipól, v názvu se totiž používá součtu délek obou ramen. Elementární dipól je pomocný pojem v teorii antén podobně jako všesměrový zářič. Dipolů krat-



Obr. 1.   λ ... délka vlny

ších než polovina vlny se používá jen zřídka, protože mají malou účinnost a nelze ję v mnoha případech přizpůsobit napájecímu vedení. Dipoly delší než půlvlna mají vyzařovací diagram tvaru rotačního tělesa vzniklého rotací elipsy kolem její tečny ve vrcholu. Delší osa elipsy se prodlužuje spojitě, prodlužujeme-li délku každého z ramen až do půlvlny (tzv. celovlnný dipól). Obr.2. Při dalším prodlužování se začnou tvořit parazitní lalůčky, které zvolna rostou a původní hlavní



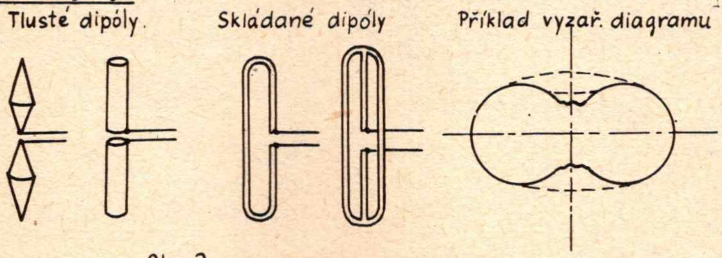
Obr.2. Vyzařovací diagramy dipólů delších, než λ/2

lalok (elipsa) se zkracuje. Při prodlužování dipólu se značně mění jeho impedance. Půlvlnný dipól z tenkého vodiče má reálnou složku vstupní impedance přibližně 70 ohmů.

Tlustý dipól.

Za tlustý dipól můžeme považovat dipól s rameny tlustšími než jedna šestina jejich délky. Vyzařovací diagram má přibližně stejný tvar jako v případě dipólu tenkého, pouze minima v diagramu nejsou tak výrazná a vstupní impedance nedosahuje v případech rezonance tak extrémních hodnot.

Skládané dipóly.

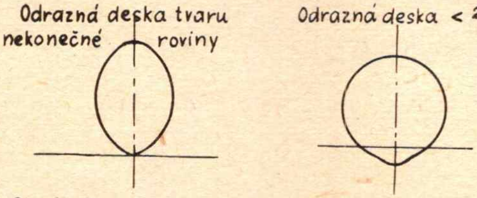


Obr. 3.

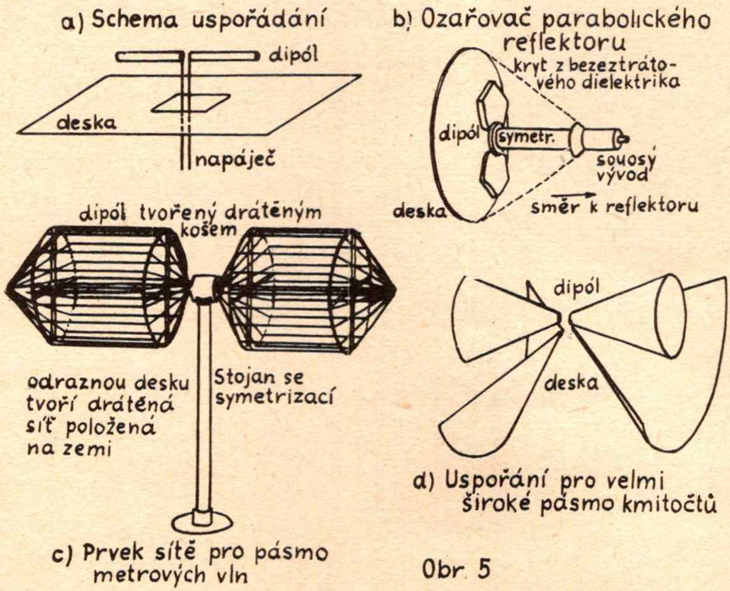
Používá se jich převážně v půlvlnné variantě v případech, kdy potřebujeme při dobré účinnosti vyšší vstupní impedanci. Skládaný dipol (obr. 3) má reálnou složku vstupní impedance cca 250 ohmů, dvojitě skládaný dipól má cca 600 - 800 ohmů. Vyzařovací diagram je podobný diagramu tlustého dipólu.

Dipóly s odraznou deskou.

Vyzařovací diagram dipólu se v blízkosti země prudce mění s výškou nad zemí. Abychom zamezili tomuto vlivu a obdrželi anténu s definovaným radiometrickým tělesem, umístíme pod dipól do vzdálenosti 0,15 až 0,3 vlnové délky odraznou desku z vodivého materiálu. Ve stejné vzdálenosti za deskou vznikne zrcadlový obraz dipolu a anténa se chová jako podélně vyzařující dvouprvková soustava dipolů vzdálených od sebe 0,3 až 0,6 vlnové délky (obr. 4). Na obr. 5 a, b, c, d jsou různé varianty dipolů s odraznou deskou. Varianta 5 d patří již do skupiny tzv. velmi širokopásmových antén rovnoúhlých.

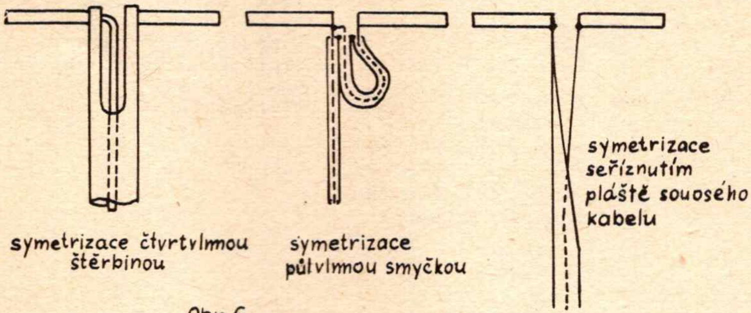


Obr. 4. Diagramy dipólů s odraznou deskou



Obr. 5

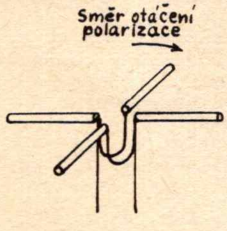
Uprostřed dipólu bývá, většinou v držáku či stojanu, umístěno symetrizační zařízení. Dipol je totiž anténa mechanicky i elektricky symetrická. To znamená, že vůči povrchu zemskému resp. vůči odrazné desce mají jednotlivá ramena stejnou kapacitu. Kdybychom chtěli napájet anténu přímo souosým kabelem (místo dvoudrátem nebo dvoulinkou, jako v případě televizních přijímacích antén), porušila by se symetrie antény a vyzařovací diagram by se deformoval. To není u radioteleskopů, kde potřebujeme definované radiometrické těleso, přípustné. Souosý kabel je však výhodný z hlediska časové stálosti parametrů a lepší odolnosti vůči radiovým poruchám z okolí. Proto se symetrizačních členů, spojených zpravidla se členy přizpůsobovacími, používá, i když jejich cena tvoří podstatnou část celkové ceny antény. Na obr. 6 jsou tři běžné typy symetrizačních členů. Prvé dva jsou úzkopásmové, třetí je širokopásmový.



Obr 6.

Zkřížené dipóly.

Tato anténa se vyznačuje tím, že je schopna přijímat a vysílat kruhově polarizované vlny. Skládá se ze dvou půlvlnných až celovlnných dipólů, z nichž jeden je napájen přímo dvoulinkou a druhý je napájen z téhož bodu přes čtvrtvlnný úsek vedení (obr. 7). Toto uspořádání způsobí, že se směr siločar elektrického pole čili směr polarizace otáčí směrem naznačeným na obrázku. Kdybychom přes zpožďovací vedení připojili místo prvního druhý dipol, smysl otáčení polarizace by se změnil. Kdybychom zapojili oba dipoly paralelně bez použití zpožďovacího úseku vedení, chovala by se anténa přibližně jako tlustý dipol. Směr polarizace by pak půlil úhel mezi dvěma navzájem spojenými rameny.



Obr. 7. Zkřížené dipóly

Tvar vyzařovacího diagramu si můžeme odvodit, když si představíme sečtené vyzařovací diagramy dvou na sebe kolmých dipolů. Odvodíme, že tato anténa je téměř všesměrová, pokud se měrný dipol, tedy anténka, pomocí které vyzařovací diagram soustavy zkřížených dipolů měříme, nalézá na libovolné rovnoběžce kulové plochy obklopující zkřížené dipoly, splývá-li rovina rovníku této plochy s rovinou, ve které leží oba dipoly (obr. 8). Kdybychom měrnou anténku orientovali ve směru poledníků uvedené kulové plochy, naměřili bychom