POVĚTROŇ

Královéhradecký astronomický časopis

číslo **4/2008**
ročník **16**

SLOVO ÚVODEM. Zářijový Povětroň začíná astronomickým kurzem, ve kterém prokážeme souvislost Newtonových a Keplerových zákonů. Následují tři zprávy o jarních výpravách za slunečními hodinami a krátká poznámka o přenosných analematických hodinách.

Upozorňujeme předem, že na začátku října, přesněji 4. a 5., se uskuteční setkání slunečních hodinářů v Hradci Králové. V sobotu se sejdeme v 10 hodin v Nezvalově ulici u staré nemocnice a vydáme se na čtyřhodinovou procházku za slunečními hodinami na starém městě a v Malšovicích. Od 16:30 do 19:30 se koná na hvězdárně seminář. V neděli mezi 8. a 16. hodinou plánujeme automobilový výlet, směr Dobruška, Nové Město nad Metují, Náchod, Hronov, Police n. M., Teplice n. M. a zpět.

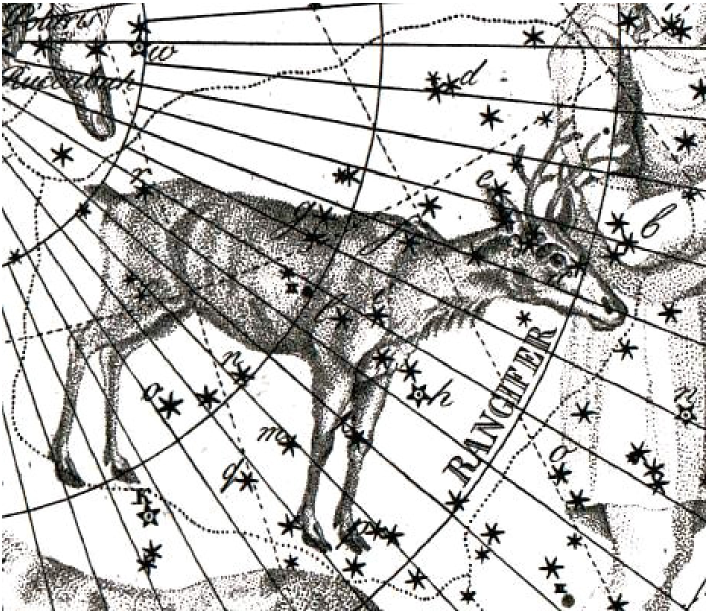
Miroslav Brož

Elektronická (plnobarevná) verze časopisu Povětroň ve formátu PDF je k dispozici na adrese:
⟨http://www.astrohk.cz/ashk/povetron/⟩

Povětroň 4/2008; Hradec Králové, 2008.
Vydala: **Astronomická společnost v Hradci Králové** (6. 9. 2008 na 211. setkání ASHK)
ve spolupráci s **Hvězdárnou a planetáriem v Hradci Králové**
vydání 1., 32 stran, náklad 100 ks; dvouměsíčník, MK ČR E 13366, ISSN 1213–659X
Redakce: Miroslav Brož, Martin Cholasta, Josef Kujal, Martin Lehký a Miroslav Ouhrabka
Předplatné tištěné verze: vyřizuje redakce, cena 35,– Kč za číslo (včetně poštovného)
Adresa: ASHK, Národních mučedníků 256, Hradec Králové 8, 500 08; IČO: 64810828
e–mail: ⟨ashk@ashk.cz⟩, web: ⟨http://www.ashk.cz⟩

Obsah

strana



Titulní strana: Skupinová fotografie v Čáslavi na náměstí; z výletu za slunečními hodinami 12. dubna. K článku na str. 25.

Astronomický kurz (6) — Problém dvou těles

Miroslav Brož

Oč nám jde v problému dvou těles? Vypočítat tři Keplerovy zákony pro pohyb planet ze čtyř Newtonových zákonů pro pohyb a gravitaci. Souvislost je sice všeobecně známá, ale skutečný výpočet není zcela přímočarý, zabere nám asi 10 stran. Nejprve si příslušné zákony připomeneme.

Newtonovy pohybové zákony

1. Existují inerciální[1] vztažné soustavy, v nichž se volné[2] hmotné body pohybují rovnoměrně přímočaře nebo jsou v klidu;
2. působím-li silou $\boldsymbol{F}$ na těleso o hmotnosti m, jeho zrychlení je:

$$\boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{F}}{m_{\text{setrvačná}}}\,; \tag{1}$$

3. když těleso 1 působí silou na těleso 2, pak 2 působí na 1 reakcí:

$$\boldsymbol{F}_{21} = -\boldsymbol{F}_{12}\,. \tag{2}$$

Newtonův gravitační zákon

Hmotný bod 1 působí na hmotný bod 2 gravitační silou:

$$\boldsymbol{F}_{12} = -G\frac{m_1 m_{2\,\text{gravitační}}}{r^2}\frac{\boldsymbol{r}_{12}}{r}\,. \tag{3}$$

Podle měření je gravitační konstanta $G = (6{,}6743 \pm 0{,}0007)\,\mathrm{N\cdot kg^{-2}\cdot m^2}$ [2]. Pozoruhodné je, že v našem vesmíru platí rovnost $m_{\text{gravitační}} = m_{\text{setrvačná}}$, alespoň to potvrzují měření až do úrovně relativní chyby 10^{-9}.[3] V souvislosti se skoro

[1] Tyto soustavy souvisejí spolu *Galileiho transformací* souřadnic $\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{v}t$, kde $\boldsymbol{v}$ označuje jejich vzájemnou rychlost a t čas.

[2] Nepůsobí na ně jiné síly než gravitace vzdálených hmot.

[3] To je ostatně důvod, proč může být v obecné teorii relativity nahlížena gravitace jako *křivost prostoročasu* — zrychlení tělesa

$$\boldsymbol{a}_{12} = \frac{\boldsymbol{F}_{12}}{m_1} = -G\frac{m_2}{r^2}\frac{\boldsymbol{r}_{12}}{r}$$

totiž nezávisí na tělese samém (není tam m_1), ale na rozložení hmot okolo.

kulatými planetami se nám také velmi hodí, že gravitační pole *vně homogenní koule* o hmotnosti M je stejné jako okolo hmotného bodu o hmotnosti M.[4]

Keplerovy zákony

1. planety se pohybují po elipsách, přičemž všechny mají společné ohnisko $\odot$;
2. planeta za stejnou dobu opíše průvodičem stejné plochy;

[4] Což bychom ověřili integrací příspěvků v objemu koule „přes prstýnky" souosé s $\boldsymbol{r}$ (obr. 1): $\Delta = \boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'$, $\Delta^2 = r^2 - 2rr'\cos\varphi + r'^2$ (dle kosínové věty). Jednodušší je použít skalární potenciál U místo vektorové síly $\boldsymbol{F} = \nabla U$:

$$U = \int_{\text{kouli}} -\frac{G\,\mathrm{d}m}{\Delta} = -G\int_V \frac{\varrho\,\mathrm{d}V}{\Delta} = -G\int_{r'=0}^{R}\int_{\varphi=0}^{\pi} \frac{\varrho(r')}{\Delta}\,\overbrace{2\pi r'\sin\varphi}^{\text{obvod}}\; r'\mathrm{d}\varphi\;\mathrm{d}r'\,.$$

Trik: $\mathrm{d}\varphi$ vyjádřím z $\Delta = (r^2 - 2rr'\cos\varphi + r'^2)^{\frac{1}{2}}$ a zaměním integrační meze $(0,\pi)$ za $(r-r', r+r')$.

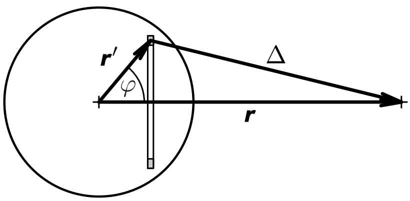
$$\frac{\mathrm{d}\Delta}{\mathrm{d}\varphi} = \frac{1}{2}(r^2 - 2rr'\cos\varphi + r'^2)^{-\frac{1}{2}}(-2rr')(-\sin\varphi) = \frac{rr'\sin\varphi}{\Delta}\,,$$

odkud $\mathrm{d}\varphi = \frac{\Delta}{rr'\sin\varphi}\mathrm{d}\Delta$ a

$$U = -G\int_0^R\int_{r-r'}^{r+r'} \frac{\varrho(r')}{\Delta}\,2\pi r'\sin\varphi\,\frac{\Delta}{rr'\sin\varphi}\mathrm{d}\Delta\,\mathrm{d}r' = -\frac{2\pi G}{r}\int_0^R\int_{r-r'}^{r+r'}\varrho(r')r'\mathrm{d}\Delta\,\mathrm{d}r'$$

$$= -\frac{2\pi G}{r}\int_0^R \varrho(r')r'2r'\mathrm{d}r' = -\frac{G}{r}\overbrace{\int_0^R 4\pi r'^2\varrho(r')\,\mathrm{d}r'}^{\text{celková hmotnost}} = -\frac{GM}{r}\,,$$

tj. přesně jako hmotný bod.



Obr. 1 — Vektory $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{r}'$, Δ, koule a prstýnky.

3. mezi velkými poloosami a a oběžnými periodami[5] T planet platí $\dfrac{a^3}{T^2}$ = společné konstantě (tento zákon ale neplatí zcela přesně).

Problém dvou těles [1]

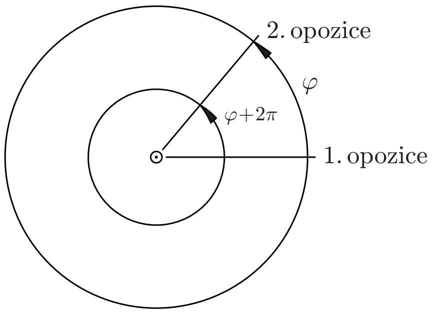
Zavedeme inerciální soustavu souřadnic, vektor $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$ (obr. 3), a napíšeme pohybové rovnice pro těleso 1 a 2, přičemž využijeme *všechny* Newtonovy zákony:[6]

$$\boldsymbol{F}_1 = +G\frac{m_1 m_2}{r^3}\boldsymbol{r} = m_1\ddot{\boldsymbol{r}}_1\,, \tag{5}$$

$$\boldsymbol{F}_2 = -G\frac{m_1 m_2}{r^3}\boldsymbol{r} = m_2\ddot{\boldsymbol{r}}_2\,. \tag{6}$$

[5] Pozorovat mohu spíše *synodickou* dobu oběhu, potřebuji převod $T_{\text{synodická}} \rightarrow T_{\text{siderická}}$. Mezi dvěma opozicemi, které se opakují po T_{syn}, urazí vnitřní planeta úhel $2\pi + \varphi$ a vnější pouze φ (obr. 2). Pro jejich úhlové rychlosti platí $\omega_1 = \frac{2\pi}{T_{\text{sid1}}}$, $\omega_2 = \frac{2\pi}{T_{\text{sid2}}}$, $\omega_1 T_{\text{syn}} = 2\pi + \varphi$, $\omega_2 T_{\text{syn}} = \varphi$; odtud:

$$\frac{1}{T_{\text{sid1}}} = \frac{1}{T_{\text{syn}}} + \frac{1}{T_{\text{sid2}}} \tag{4}$$



Obr. 2 — Dvě planety obíhající po kruhových drahách ve dvou po sobě následujících opozicích.

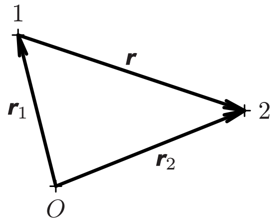
[6] Poznámka o derivacích pro ty, kteří o nich ještě neslyšeli: sklon tečny ke grafu funkce $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ popisuje „jak moc se funkce mění"; *derivace* funkce $y(x)$ v bodě x_0 je definována jako limita:

$$y' \equiv \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \equiv \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y(x_0 + \Delta x) - y(x_0)}{\Delta x}\,.$$

Příkladem první derivace souřadnic podle času je okamžitá rychlost ($\boldsymbol{v} \equiv \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$, označuje se též $\dot{\boldsymbol{r}}$); zrychlení je první derivace rychlosti nebo též druhá derivace souřadnic ($\boldsymbol{a} \equiv \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} \equiv \dot{\boldsymbol{v}} = \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} \equiv \ddot{\boldsymbol{r}}$). Uveďme derivace některých elementárních funkcí: $C' = 0$, $x' = 1$, $ax' = a$, $(x^n)' = nx^{n-1}$, $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$. Derivace součtu $(f+g)' = f' + g'$, součinu $(f \cdot g)' = f'g + fg'$, složené funkce $(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$. Opačným úkolem k derivování je hledání *primitivní funkce* (neboli integrování).

Jedná se o soustavu dvou obyčejných diferenciálních rovnic druhého řádu. Pokud se nám je podaří vyřešit, budeme znát polohy a rychlosti obou těles. Hledáme tedy *celkem 12 neznámých skalárních funkcí času* (neboli 4 vektorové): $\boldsymbol{r}_1(t)$, $\dot{\boldsymbol{r}}_1(t)$, $\boldsymbol{r}_2(t)$, $\dot{\boldsymbol{r}}_2(t)$. Při řešení použijeme tři triky:

1. budeme studovat *relativní* pohyb, nikoli přímo $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$;
2. nejprve najdeme *tvar* trajektorie $r(\varphi)$, nikoli $\boldsymbol{r}(t)$;
3. použijeme *substituce* za $\frac{1}{r}$.



Obr. 3 — Polohové vektory $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$, $\boldsymbol{r}$ pro tělesa 1 a 2.

Integrály pohybu (3 pro hmotný střed a 3 pro hybnosti)

Snadno najdu prvních 6 integrálů (celkem jich je 10), které úlohu podstatně zjednoduší (hypoteticky, kdybych našel 12 *prvních* integrálů, tělesa by „trčela“ na místě nebo se pohybovala rovnoměrně přímočaře). Součet rovnic (5) a (6) je:

$$m_1\ddot{\boldsymbol{r}}_1 + m_2\ddot{\boldsymbol{r}}_2 = \boldsymbol{0}\,,$$

První neurčitý integrál:

$$m_1\dot{\boldsymbol{r}}_1 + m_2\dot{\boldsymbol{r}}_2 = \boldsymbol{a}\,,$$

a druhý:

$$m_1\boldsymbol{r}_1 + m_2\boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{a}\,t + \boldsymbol{b}\,, \tag{7}$$

kde $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ jsou konstantní vektory (ony integrály pohybu; protože $\boldsymbol{b}$ je až druhý integrál, vyskytují se zde konstantní rychlosti, neboli lineární závislost souřadnic na čase). To znamená, že *hmotný střed* $\boldsymbol{T} = \frac{m_1\boldsymbol{r}_1+m_2\boldsymbol{r}_2}{m_1+m_2}$ soustavy je buď v klidu, nebo se pohybuje rovnoměrně přímočaře.[7]

Rovnice relativního pohybu (a 3 integrály momentu hybnosti)

Nyní vyšetříme relativní pohyb m_2 vzhledem k m_1 — odečteme (6) od (5) (přejdeme do *neinerciální* souřadnicové soustavy):

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = \ddot{\boldsymbol{r}}_2 - \ddot{\boldsymbol{r}}_1 = -\overbrace{G(m_1+m_2)}^{\mu}\,\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}$$

[7] A vůbec nezáleží na tom, že $F_\mathrm{G} \propto \frac{1}{r^2}$; stačí, že síly jsou stejně veliké a opačného směru.

$$\ddot{\boldsymbol{r}} + \mu\frac{\boldsymbol{r}}{r^3} = 0 \tag{8}$$

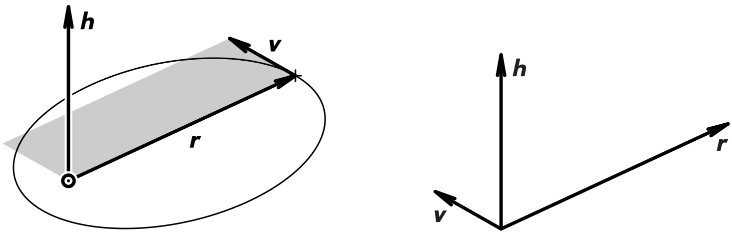
Další integrály pohybu najdeme vektorovým násobením této rovnice $\boldsymbol{r}$:

$$0 = \ddot{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{r} + \frac{\mu}{r^3}\overbrace{\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{r}}^{\boldsymbol{0}} = \ddot{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{r}\,,$$

protože vektorový součin rovnoběžných vektorů je vždy $\boldsymbol{0}$. Neurčitý integrál je:

$$\boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{h} = \text{konst.} \tag{9}$$

neb $(\boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{r}} - \boldsymbol{h})' = \overbrace{\dot{\boldsymbol{r}} \times \dot{\boldsymbol{r}}}^{\boldsymbol{0}} + \boldsymbol{r} \times \ddot{\boldsymbol{r}} - \boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$; $\boldsymbol{h}$ je „něco jako“ moment hybnosti[8] na jednotku hmotnosti μ. Jinými slovy to znamená, že pohyb probíhá *v rovině* a plošná rychlost se zachovává (obr. 4), což je přesně **2. Keplerův zákon**.[9] □



Obr. 4 — Vektory $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{v}$ a $\boldsymbol{h} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}$ (plošná rychlost).

Přechod do polárních souřadnic v rovině

Souřadnicovou soustavu orientujeme tak, že rovina xy je kolmá na $\boldsymbol{h}$, dosadím[10] za $\boldsymbol{r} = r\hat{r}$, $\ddot{\boldsymbol{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\,\hat{r} + \left[\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r^2\dot{\varphi})\right]\hat{\varphi}$ do vektorové rovnice (8) a obdržím *skalární* rovnici (příslušnou složce $\hat{r}$):

$$\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = -\frac{\mu}{r^2}\,, \tag{10}$$

[8] Rozhodně to *není* celkový moment $\boldsymbol{L}$ hybnosti v inerciální soustavě, $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r}_1 \times m_1\dot{\boldsymbol{r}}_1 + \boldsymbol{r}_2 \times m_2\dot{\boldsymbol{r}}_2$; v $\boldsymbol{h}$ jsou přitom vektorové součiny „pomíchané“: $\boldsymbol{h} = (\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2) \times (\dot{\boldsymbol{r}}_2 - \dot{\boldsymbol{r}}_1) = \boldsymbol{r}_1 \times \dot{\boldsymbol{r}}_2 - \boldsymbol{r}_1 \times \dot{\boldsymbol{r}}_1 + \ldots$

[9] Opět nevyžaduje $F_\mathrm{G} \propto \frac{1}{r^2}$, $\boldsymbol{F}_\mathrm{G}$ pouze musí směřovat podél spojnice těles.

[10] Ověření vztahu pro 2. derivaci v polárních souřadnicích: bázové vektory $\hat{r} = (\cos\varphi, \sin\varphi)$, $\hat{\varphi} = (-\sin\varphi, \cos\varphi)$; $\dot{\hat{r}} = (-\sin\varphi, \cos\varphi)\dot{\varphi} = \dot{\varphi}\hat{\varphi}$, $\dot{\hat{\varphi}} = -\hat{r}\dot{\varphi}$; $\boldsymbol{r} = r\hat{r}$, $\dot{\boldsymbol{r}} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\hat{r}} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\varphi}\hat{\varphi}$, $\ddot{\boldsymbol{r}} = \ddot{r}\hat{r} + \dot{r}\dot{\varphi}\hat{\varphi} + \dot{r}\dot{\varphi}\hat{\varphi} + r\ddot{\varphi}\hat{\varphi} + r\dot{\varphi}(-\hat{r}\dot{\varphi}) = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\hat{r} + (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})\hat{\varphi} = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\hat{r} + \left[\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r^2\dot{\varphi})\right]\hat{\varphi}$.

Rovnice $\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r^2\dot{\varphi}) = 0$ pro složku $\hat{\varphi}$ je naštěstí splněna automaticky, protože to je vlastně vyjádření integrálu $\boldsymbol{h}$ v polárních souřadnicích:

$$\boldsymbol{h} = \boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{r}} = r\hat{r} \times (\dot{r}\hat{r} + r\dot{\varphi}\hat{\varphi}) = r^2\dot{\varphi}\hat{z} \tag{11}$$

a velikost tohoto vektoru je evidentně:

$$h = r^2\dot{\varphi} = \text{konst.} \tag{12}$$

Jak řešit rovnici (10) pro *dvě* neznámé funkce času $r(t)$, $\varphi(t)$?!

Eliminace času pomocí substituce $u = \frac{1}{r}$ a integrálu h

Do rovnice (10) musíme dosadit jednak za $r = \frac{1}{u}$, a jednak za druhou derivaci $\ddot{r}$ podle času. Nejprve spočteme první:

$$\dot{r} = -\frac{1}{u^2}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{u^2}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi}\overbrace{\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}}^{\equiv \dot{\varphi} = \frac{h}{r^2} = hu^2} = h\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi}\,; \tag{13}$$

zde jsme elegantně derivovali složenou funkci $u(\varphi(t))$ a využili integrál h (12). Druhá je:

$$\ddot{r} = -h\,\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\varphi^2}\,\dot{\varphi} = -h^2u^2\,\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\varphi^2}\,. \tag{14}$$

Vyjde $-h^2u^2\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\varphi^2} - \frac{1}{u}h^2u^4 = -\mu u^2$ a po krácení:

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\varphi^2} + u = \frac{\mu}{h^2}\,, \tag{15}$$

tj. *obyčejná* lineární diferenciální rovnice 2. řádu pro funkci $u(\varphi)$. Její obecné řešení „uhádneme“:[11]

$$u = \frac{\mu}{h^2}[1 + e\cos(\varphi - \varpi)]\,, \tag{16}$$

kde máme dvě integrační konstanty: e, ϖ[12] (plus onen předchozí integrál h a hmotnost μ, které dohromady definují jeden parametr p:

$$p = \frac{h^2}{\mu}\,. \tag{17}$$

[11] Můžeme se přesvědčit jeho derivováním $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi} = -\frac{\mu}{h^2}e\sin(\varphi - \varpi)$, $\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\varphi^2} = -\frac{\mu}{h^2}e\cos(\varphi - \varpi)$, že rovnici (15) opravdu splňuje, a bez důkazu „věříme“, že neexistuje nějaké jiné řešení.

[12] ϖ je zvláštní tvar řeckého písmene π, nikoli ω; v TEXu se píše `\varpi`.

Řešení problému dvou těles — rovnice kuželosečky

Zpětná substituce dává funkci $r(\varphi)$:

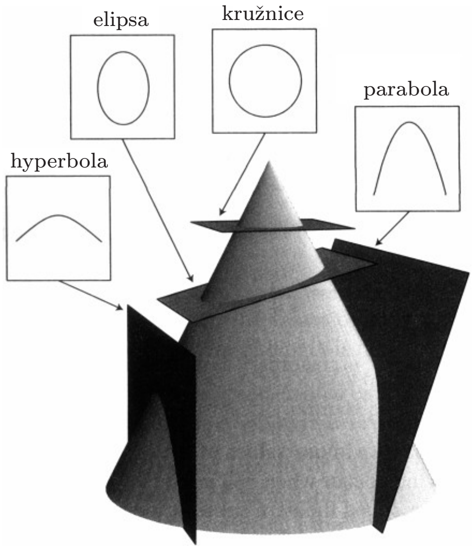
$$r = \frac{p}{1 + e\cos(\varphi - \varpi)}\,, \tag{18}$$

což je *obecná rovnice kuželosečky* s ohniskem v počátku (tělese 1; 2. ohnisko je prázdné), neboli **1. Keplerův zákon**. $\square$

Konstanty nazvýváme e *excentricita*, ϖ délka pericentra, p parametr, protože mají přesně takový geometrický význam. Můžeme rozlišit čtyři případy (obr. 5):

kružnice	$e = 0$	$p = a$
elipsa	$0 < e < 1$	$p = a\,(1 - e^2)$
parabola	$e = 1$	$p = 2q$
hyperbola	$e > 1$	$p = a\,(e^2 - 1)$

kde a označuje *velkou poloosu* a q vzdálenost pericentra od ohniska.



Obr. 5 — Řezy kužele rovinami a příslušné kuželosečky. Převzato z [1].

Polární souřadnice φ je zvána *pravá délka* (měřená od osy x); často užíváme *pravou anomálii* f:

$$f = \varphi - \varpi\,, \tag{19}$$

měřenou od pericentra. Potom pro elipsu je

$$r = \frac{a\,(1-e^2)}{1+e\cos f}\,. \tag{20}$$

Pro pravoúhlé souřadnice pak pochopitelně platí:

$$x = r\cos\varphi\,, \quad y = r\sin\varphi\,.$$

Užitečná je znalost vztahů pro vzdálenosti pericentra q a apocentra Q od ohniska:

$$q = a\,(1-e)\,, \tag{21}$$

$$Q = a\,(1+e)\,, \tag{22}$$

a také integrálu h vyjádřeného v orbitálních elementech:

$$h = \sqrt{p\mu} = \sqrt{a(1-e^2)\mu}\,; \tag{23}$$

obojí plyne z geometrie elipsy.

Jaký je vztah mezi periodou oběhu a rozměrem dráhy?

Plocha A elipsy opsaná za celou orbitální periodu je:

$$A = \pi ab = \pi a^2\sqrt{1-e^2} = \frac{1}{2}r^2\dot{\varphi}T = h\,\frac{T}{2} = \sqrt{a(1-e^2)\mu}\,\frac{T}{2}\,,$$

odtud:

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{G(m_1+m_2)}{4\pi^2}\,, \tag{24}$$

čili **3. Keplerův zákon** v přesném znění. □

Připomeňme, že Kepler ho neznal přesně (protože $m_2 \ll m_1$). Další užitečné tvary zákona mohou být:

$$n^2a^3 = \mu\,, \tag{25}$$

kde $n = \frac{2\pi}{T}$ je *střední pohyb* (úhlová frekvence oběhu); nebo

$$\frac{[a]^3_{\mathrm{AU}}}{[T]^2_{\mathrm{rok}}} \doteq [M]_{M_\odot} = 1\,, \tag{26}$$

kteréžto jednička platí v naší sluneční soustavě.

Keplerovy zákony tedy máme odvozené. Na to, abychom znali závislosti souřadnic a rychlostí na čase, bychom ale museli ještě chvíli počítat...

Jaká je rychlost v dráze? (1 integrál energie)

Ještě existuje desátý integrál pohybu, který nám umožní snadno určovat velikost rychlosti v dráze (zatím znám jen $r(\varphi)$ a 2. KZ). Rovnici relativního pohybu (8) $\ddot{\boldsymbol{r}} + \mu\frac{\boldsymbol{r}}{r^3} = \boldsymbol{0}$ násobíme skalárně rychlostí $\dot{\boldsymbol{r}}$:[13]

$$\ddot{\boldsymbol{r}} \cdot \dot{\boldsymbol{r}} + \mu\frac{\dot{r}}{r^2} = \boldsymbol{0}\,,$$

první neurčitý integrál je:[14]

$$\frac{1}{2}v^2 - \frac{\mu}{r} = C\,, \tag{27}$$

kde C je integrační konstanta.

Kolik je C? Nahlédnout to lze snadno ze dvou limitních případů: pro kruhové dráhy, kdy $e \to 0$, $r \to a$, platí jednoduchoučký vztah pro rychlost $v^2 = \frac{\mu}{r}$. Zároveň ale musí být $v^2 = 2(C + \frac{\mu}{r})$, takže $C = -\frac{\mu}{2r}$ anebo $C = -\frac{\mu}{2a}$. Druhý limitní případ je volný pád, neboli $e \to 1$, elipsa je vlastně úsečkou, v apocentru je $r = 2a$ a dle 2. KZ $v = 0$, takže vychází:

$$C = -\frac{\mu}{2a}$$

a po dosazení:

$$v^2 = \mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)\,. \tag{28}$$

Tomuto vztahu říkáme integrál „živé síly“ (ZZE na jednotku hmotnosti).[15]

---

[13] Protože $\boldsymbol{r} = r\hat{r}$, $\dot{\boldsymbol{r}} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\varphi}\hat{\varphi}$ a $\hat{r}\cdot\hat{\varphi} = 0$, je $\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\cdot\dot{\boldsymbol{r}} = \frac{r\hat{r}\cdot\dot{r}\hat{r}}{r^3} + \frac{r\hat{r}\cdot r\dot{\varphi}\hat{\varphi}}{r^3} = \frac{\dot{r}}{r^2}$.

[14] Protože $v^2 = \dot{\boldsymbol{r}}\cdot\dot{\boldsymbol{r}}$ a $(\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\dot{\boldsymbol{r}})' = 2\ddot{\boldsymbol{r}}\cdot\dot{\boldsymbol{r}}$.

[15] Jinak bychom to mohli spočíst takto: do výrazu pro v^2 v polárních souřadnicích dosadíme z polární rovnice elipsy a použijeme ještě integrál momentu hybnosti h a 3. KZ:

$$v^2 = \dot{\boldsymbol{r}}\cdot\dot{\boldsymbol{r}} = \dot{r}\cdot\dot{r} + r^2\dot{\varphi}^2 = \dot{r}^2 + (r\dot{f})^2\,, \tag{29}$$

protože $\varphi = f + \varpi$, $\varpi =$ konst. a $\dot{\varphi} = \dot{f}$. Jenže tam se kromě r vyskytuje ještě $\dot{r}$ a $\dot{f}$. Proto ze známé rovnice elipsy (20) $r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos f(t)}$ vypočítáme derivaci $\dot{r}$:

$$\dot{r} = -\frac{a(1-e^2)}{(1+e\cos f)^2}\cdot e(-\sin f)\dot{f}\,,$$

přičemž $\dot{f}$ vyjádříme z integrálu h (23):

$$\dot{f} = \frac{na^2\sqrt{1-e^2}}{r^2}$$

Maximální rychlost je v pericentru, kde $r = q = a(1-e)$:

$$v_\mathrm{p}^2 = \mu\left(\frac{2}{a(1-e)} - \frac{1}{a}\right) = \frac{\mu}{a}\frac{2-(1-e)}{1-e} = n^2a^2\frac{1+e}{1-e}\,,$$

$$v_\mathrm{p} = na\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\,, \tag{31}$$

minimální v apocentru, při $r = Q = a(1+e)$:

$$v_\mathrm{a} = na\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\,. \tag{32}$$

Jaký je vztah mezi f a t?

Zjistíme to oklikou:

1. najdeme vztah mezi *pravou* anomálií f a *excentrickou* anomálií E (obr. 6);
2. najdeme vztah mezi E a *střední* anomálií $M = n(t-\tau)$, kde τ označuje okamžik průchodu pericentrem. Pozor! M *nemá* jednoduchou geometrickou reprezentaci (nelze ji nakreslit do obrázku).

---

a vyjde:

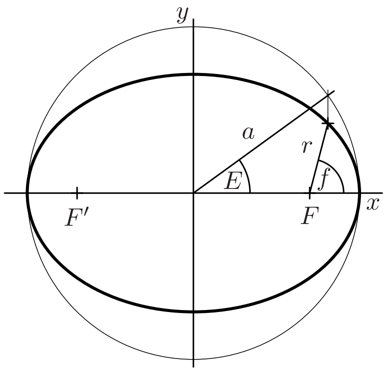
$$\dot r = \frac{na}{\sqrt{1-e^2}}\,e\sin f\,,$$

$$r\dot f = \frac{na}{\sqrt{1-e^2}}(1+e\cos f)\,.$$

Vše dosadíme do (27) a upravíme:

$$\begin{aligned} v^2 &= \frac{n^2a^2}{1-e^2}\left(e^2\sin^2 f + 1 + 2e\cos f + e^2\cos^2 f\right) = \frac{n^2a^2}{1-e^2}\Big(e^2 + 1 + 2e\overbrace{\cos f}^{=\left(\frac{a(1-e^2)}{r}-1\right)\frac{1}{e}}\Big) = \\ &= \frac{n^2a^2}{1-e^2}\left(\frac{2a(1-e^2)}{r} - (1-e^2)\right) = n^2a^3\left(\frac{2}{r}-\frac{1}{a}\right) = \mu\left(\frac{2}{r}-\frac{1}{a}\right)\,. \end{aligned} \tag{30}$$

Vidíme, že integrační konstanta v (27) je $C = -\frac{\mu}{2a}$ a nezávisí na e; pro parabolickou dráhu by bylo $C = 0$, pro hyperbolickou $C = +\frac{\mu}{2a}$.



Obr. 6 — Elipsa, opsaná kružnice, pravá anomálie f a excentrická anomálie E. Body F a F' označují ohniska elipsy.

Ad 1. Z geometrie elipsy (obr. 6) hned vidíme, že kartézské souřadnice:

$$x = a\cos E - ae = r\cos f\,, \tag{33}$$

$$y = a\sqrt{1-e^2}\sin E = r\sin f\,. \tag{34}$$

Pak:

$$\begin{aligned} r = \sqrt{x^2+y^2} &= \sqrt{a^2\cos^2 E - 2a^2 e\cos E + a^2e^2 + a^2(1-e^2)\sin^2 E} \\ &= a\sqrt{1-2e\cos E + e^2(1-\sin^2 E)} = a(1-e\cos E)\,. \end{aligned} \tag{35}$$

Protože $\cos f = \frac{x}{r} = \frac{\cos E - e}{1-e\cos E}$, plyne odtud:[16]

$$\operatorname{tg}\frac{f}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\operatorname{tg}\frac{E}{2}\,. \tag{36}$$

Ad 2. Napíšeme časové derivace souřadnic (x, y) (viz (33), (34)):

$$\dot{x} = -a\sin E\,\dot{E}$$

$$\dot{y} = a\sqrt{1-e^2}\cos E\,\dot{E}$$

a využijeme „asi posté“ integrálu h (12):

$$\begin{aligned} h = na^2\sqrt{1-e^2} &= |\boldsymbol{r}\times\dot{\boldsymbol{r}}| = |(x,y,0)\times(\dot{x},\dot{y},0)| = |(0,0,x\dot{y}-y\dot{x})| \\ &= a(\cos E - e)a\sqrt{1-e^2}\cos E\,\dot{E} + a^2\sqrt{1-e^2}\sin^2\!E\,\dot{E}\,, \end{aligned}$$

[16] Využijeme vztahů pro poloviční úhel: $\sin^2\frac{f}{2} = \frac{1-\cos f}{2}$, $\cos^2\frac{f}{2} = \frac{1+\cos f}{2}$ a vypočteme $1-\cos f = \frac{1-e\cos E-\cos E+e}{1-e\cos E} = \frac{(1+e)(1-\cos E)}{1-e\cos E}$, $1+\cos f = \frac{(1-e)(1+\cos E)}{1-e\cos E}$.

odkud dostaneme diferenciální rovnici pro funkci $E(t)$:

$$\dot{E} = \frac{n}{1 - e\cos E}\,, \tag{37}$$

neboli:

$$\mathrm{d}E\,(1 - e\cos E) = n\,\mathrm{d}t\,,$$

jejíž neurčitý integrál je:

$$E - e\sin E = nt + C\,.$$

Okrajová podmínka pro $E = 0$ je $t = \tau$, tudíž $C = -n\tau$ a

$$M = E - e\sin E\,, \tag{38}$$

což je *Keplerova rovnice*. Bohužel je transcendentní — neznáme algebraické vyjádření $E(M)$.

Jak řešit Keplerovu rovnici?

1. numericky, iterační metodou:

$$E_{i+1} = M + e\sin E_i\,, \quad E_0 = M\,, \tag{39}$$

   $E_1 = M + e\sin M$, $E_2 = M + e\sin E_1, \ldots$, dokud $|E_{i+1} - E_i| >$ nějaké malé ϵ. Lepší počáteční odhad může být $E_0 = M + \mathrm{sgn}(\sin M)\,ke$, kde $k \in (0, 1]$, např. $k = 0{,}85$.

2. Newtonovou–Raphsonovou metodou (tj. obecná numerická metoda pro hledání kořenů funkce $f(x) = 0$, viz obr. 7):

$$f(E) = E - e\sin E - M\,,$$

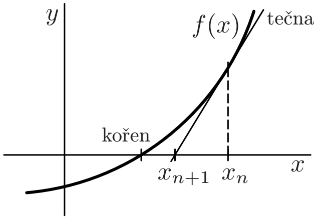
   hledáme tedy $f(E) = 0$ postupnými iteracemi

$$E_{i+1} = E_i - \frac{f(E_i)}{f'(E_i)}\,, \tag{40}$$

   kde

$$f'(E) = 1 + e\cos E$$

   je derivace $f(E)$ podle E.



Obr. 7 — Schéma jedné iterace Newtonovy–Raphsonovy metody.

3. analyticky, Fourierovým rozvojem.[17]

[17] Vyjdeme z 1. iterační metody a použijeme součtový vzorec $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$ a Taylorovy rozvoje goniometrických funkcí $\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^5)$, $\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^4)$:

$$\begin{aligned}
E_1 &= M + e\sin M\,,\\
E_2 &= M + e\sin(M + e\sin M)\\
&\simeq M + e\sin M\,\overbrace{\cos(e\sin M)}^{\doteq 1} + e\cos M\,\overbrace{\sin(e\sin M)}^{\doteq e\sin M}\\
&\simeq M + e\sin M + \frac{1}{2}e^2\sin 2M\,,\\
E_3 &= M + e\sin(M + e\sin M + \frac{1}{2}e^2\sin 2M)\\
&\simeq M + \left(e - \frac{1}{8}e^3\right)\sin M + \frac{1}{2}e^2\sin 2M + \frac{3}{8}e^3\sin 3M\,.
\end{aligned}$$

Podle prvních třech členů vidíme, že jde o nekonečnou Fourierovu řadu:

$$E - M = \sum_{s=1}^{\infty} b_s(e)\sin sM\,, \tag{41}$$

přičemž lze dokázat, že její koeficienty

$$b_s(e) = \frac{2}{s}J_s(se)$$

jsou Besselovými funkcemi 1. druhu:

$$J_s(se) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\cos(sE - se\sin E)\mathrm{d}E\,.$$

Pozor! Řada konverguje pouze do určitého maximálního $e \doteq 0{,}66$.

Některé aplikace Keplerových zákonů

Třetí Keplerův zákon nám například umožňuje vypočítat *poměry vzdáleností* těles sluneční soustavy podle jejich snadno měřitelných oběžných dob:

$$\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^3 = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2 .$$

Můžeme též snadno odhadnout *dobu trvání gravitačního kolapsu* sférického mračna, ve kterém nepůsobí odpudivé elektromagnetické síly. Stačí uvážit malou částečku na jeho povrchu o poloměru R, která se pohybuje po elipse s $e \to 1$ a velkou poloosou $a = \frac{R}{2}$. Doba volného pádu t_{ff} do středu je pak polovinou oběžné doby T. Po dosazení za hmotnost M oblaku, $M = \frac{4}{3}\pi R^3 \varrho$, dostáváme:

$$t_{\mathrm{ff}} = \sqrt{\frac{3\pi}{32 G \varrho}} .$$

Samotný Keplerův zákon nám neumožňuje snadno určovat *hmotnosti planetek*, které jsou mnohem menší než hmotnost Slunce, ale pro planetku *s malým satelitem* můžeme napsat Keplerovy zákony dva:

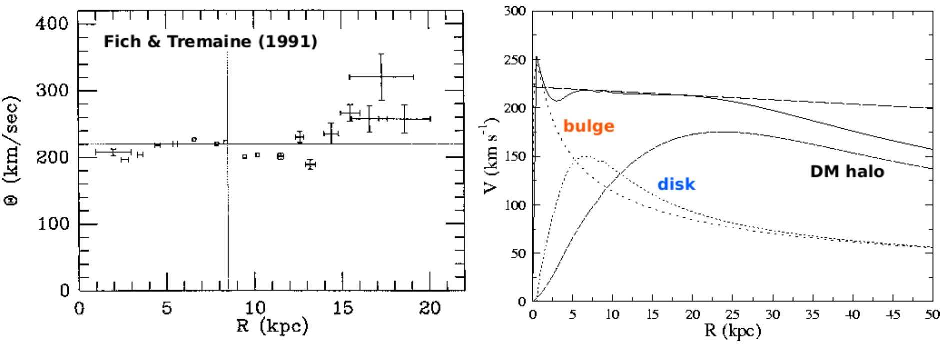
$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{G(m_\odot + m_{\mathrm{planetky}} + m_{\mathrm{satelitu}})}{4\pi^2} \quad \text{(ve sluneční soustavě)} ,$$

$$\frac{a'^3}{T'^2} = \frac{G(m_{\mathrm{planetky}} + m_{\mathrm{satelitu}})}{4\pi^2} \quad \text{(v systému planetka–satelit)}$$

a z nich při zanedbání planetky vůči Slunci a satelitu vůči planetce odvodit poměr:

$$\left(\frac{a}{a'}\right)^3 \left(\frac{T'}{T}\right)^2 = \frac{m_\odot + m_{\mathrm{p}}}{m_{\mathrm{p}} + m_{\mathrm{s}}} \simeq \frac{m_\odot}{m_{\mathrm{p}}} . \qquad (42)$$

Vztah pro oběžnou kruhovou rychlost $v \propto \frac{1}{\sqrt{r}}$ jsme již zmiňovali. Porovnejme tuto závislost s *rotační křivkou* naší Galaxie, která je známá z měření dopplerovských posuvů rádiového záření na vlnové délce 21 cm a je *plochá* (obr. 8). Je evidentní, že hmota naší Galaxie není všechna soustředěná v centru (to by musela v klesat jako $\frac{1}{\sqrt{r}}$, nikoli být konstantní). Podle oběžných rychlostí oblaků na periferii Galaxie dokonce můžeme usuzovat na existenci temné hmoty, která se projevuje velkou gravitační přitažlivostí.



Obr. 8 — Měřená rotační křivka pro naši Galaxii. Vpravo je model rotační křivky, s rozlišením jednotlivých příspěvků od výdutě, disku a hala temné hmoty. Převzato z Fich a Tremaine (1991).

Hmotnost neznámého kompaktního objektu lze vypočítat, pokud okolo něj obíhá alespoň jedna hvězda, pro kterou změříme úhlový rozměr dráhy, oběžnou dobu a vzdálenost od Země. Například okolo *centrální černé díry* v naší Galaxii obíhá hvězdička S2: $\alpha = 0{,}12''$, $T = 15{,}2\,\mathrm{roku}$, $r = 26\,000\,\mathrm{sv.\,r.}$, tedy $a = r \operatorname{tg} \alpha \doteq 930\,\mathrm{AU}$. Hmotnost černé díry pak vychází:

$$[M_{\mathrm{BH}}]_{M_\odot} \doteq \frac{[a]^3_{\mathrm{AU}}}{[T]^2_{\mathrm{rok}}} \doteq \frac{930^3}{15{,}2^2} \doteq 3{,}5 \cdot 10^6 \,,$$

čili o šest řádů větší než hmotnost Slunce a o šest řádů menší než hmotnost celé Galaxie.

[1] Murray, C. D., Dermott, S. F. *Solar System Dynamics.* Cambridge: Cambridge University Press, 2000. ISBN 0521575974.
[2] *Wikipedia* [online]. [cit. 2008-04-10]. ⟨http://www.wikipedia.org/⟩.

Jędrzejów a okolí 29. a 30. března 2008

Jaromír Ciesla

Cestu do Jędrzejówa jsem již delší dobu připravoval. Dozvěděl jsem se totiž o zdejším muzeu, které disponuje jednou z největších sbírek slunečních hodin v Evropě. Taky jsem si v Polsku vytipoval zajímavé lokality se slunečními hodinami. O svém plánu jsem mluvil s panem Noskem, který projevil zájem o účast, což jsem přivítal. S panem Noskem a jeho manželkou jsme se setkali v Českém Těšíně o osmé hodině ranní, odkud jsme společně vyrazili do Polska. Krátce po překročení hranice začalo poprchávat a s deštěm jsme pokračovali až do podvečerních hodin.

První zastávkou byl klášter Kamedulů v Bielanech asi 7 km jihozápadně od středu Krakówa. Jedná se o velmi starý kostel a klášter obývaný řádem otce Kamedula. Vstup je povolen pouze mužům, ženám jen 12 dní v roce. Svislé sluneční hodiny situované na jižní stěně jsou vidět pouze z vnitřního nádvoří kláštera, který je od okolního světa izolován, proto jsme požádali o pořízení snímků místního mnicha, díky jehož laskavosti jsme je získali. Jelikož byl pokročilý čas, pokračovali jsme bez zastávky až do Jędrzejówa. Toto osmnáctitisícové městečko nás hned na jeho začátku uvítalo slunečními hodinami. Rozměrná plastika se symbolem hodinových ručiček, erbem, názvem města a samozřejmě slunečními hodinami, které ale byly bez číslic, stojí hned vedle příjezdové komunikace ve směru od Krakówa.

Po ujetí asi jednoho kilometru nás vítaly druhé sluneční hodiny, tentokrát štukové na fasádě nárožního domu na náměstí. Rozměr jejích číselníků je 4,2 krát 4,2 metry, a proto jsou již z dálky dobře vidět. Hodiny byly zhotovené roku 1971. Graficky jsou velmi bohatě zdobené a doplněné textem „FESTINA LENTE“. Úsudek o jejich estetickém vzhledu si nechám pro sebe. Zajímavé u hodin je zakončení ukazatele symbolem města, s čímž se v Polsku často setkáváme.

Po krátké prohlídce centra města navštěvujeme místní muzeum, které je z velké části věnováno slunečním hodinám. Rozsahem svých sbírek slunečních hodin se řadí k největším na světě (viz článek na str. 23).

Ani ne o 500 m dále v přímém směru byly vidět další sluneční hodiny na zdi kostela sv. Trojice. Tyto jsou perfektně provedené dle návrhu Tadeusze Przypkowského a již z dálky působí velmi dobrým dojmem. Hodiny z roku 1952 jsou doplněné tabulkou s časovou rovnicí a texty odkazujícími na autora a pozdější opravu. Pod hodinami jsme se seznámili s příjemnou paní učitelkou v důchodu, která se rozpovídala o dalších zajímavostech města Jędrzejówa a také o některých zvláštnostech polského jazyka. Na rozloučenou nám paní učitelka zazpívala hit číslo jedna v Polsku „Jóžin z bažin“ v češtině. Po příjezdu na další stanoviště, do cisterciánského kláštera, jsme po delším hledání zjistili, že hodiny byly při rekonstrukci kostela odstraněny.

Cestou k dalším hodinám jsme se ještě jednou zastavili v muzeu za jeho ředitelem panem Mgr. Piotrem Przypkowským, abych získal nějaké informace ohledně slunečních hodin a také jsem mu předal drobnou upomínku na naši návštěvu. Panem ředitelem jsme byli velice mile přijati. Při té příležitosti jsme se dostali ještě k jedněm hodinám na dvoře za muzeem, jejichž autorem byl Tadeusz Przypkowski. Zde se nám také ten den poprvé hodiny „roztikaly“, když na pár minut konečně vysvitlo Slunce. Hodiny jsou velmi pěkně provedené, v roce 2001 byly rekonstruované panem Krysztofem Igratzem, který je dobrým znalcem v oboru gnómoniky a členem polského spolku přátel slunečních hodin. S panem Igratzem jsem rovněž domlouval schůzku, ke které ale nakonec nedošlo.

V Jędrzejowě jsme věděli ještě o jedněch hodinách, tentokrát na místním hřbitově, na kterém se nachází rodinná hrobka Przypkowských. Hrobka z roku 1959 je zakryta mramorovou deskou s motivem vodorovných slunečních hodin se šikmým ukazatelem. I tady se nám poštěstilo, když se nad západním obzorem na chvíli ukázalo Slunce.

Následující jasné ráno jsme zamířili ještě jednou do Jędrzejówa, ke kostelu vyfotit stín na hodinách. Než jsme tam ale dojeli, spadla hustá mlha, ve které se Slunce ztratilo a bylo po stínu. Opouštíme Jędrzejów a po hlavní silnici jedeme rovnou do Wodzisławi, který je přímo na hlavním tahu na Kraków. Město není moc velké a nám nedělá problém najít správný kostel, který je zde jen jeden a navíc je z daleka dobře vidět. Na jižní stěně jsou velmi pěkné svislé sluneční hodiny s azimutem asi 11° a dokonce, což je nejlepší, jsou plně osvětlené Sluncem (obr. 18). Asi 3 krát 3 m velký číselník z roku 1963 byl restaurován v roce 2001, je bohatě zdoben a doplněn také tabulkou s časovou rovnici.

Další hodiny, tentokrát na kostele v Miechówě, umístěném hned vedle náměstí, nás trochu zklamaly. Z dálky špatně postřehnutelný číselník 40 krát 40 cm a 3,5 m nad zemí, na zdi s azimutem -6°, bez ukazatele a navíc je zde pro svislé hodiny použit vodorovný číselník, který je ke zdi přichycen třemi skobami, a ke všemu je prasklý. Hodiny byly nejspíš určené pro jiné stanoviště a zde je později použil někdo bez základních znalostí gnómoniky. Bohužel na místě nebylo s kým tuto otázku diskutovat. Jelikož je neděle a my se nacházíme na území s bohatou katolickou tradicí, většina věřících se účastní dopoledních bohoslužeb. U každého kostela se slunečními hodinami tak budíme značnou pozornost.

Z cesty k následující zastávce, kterou byl klášter v Grodzisku, jsem měl trochu obavy. Stanoviště bylo stranou dobrých cest a v nepřehledném terénu, ale nakonec jsme byli nad očekávání spokojeni. V městečku Skała jsme se na třetí pokus trefili na správnou odbočku. Další cesta byla již dobře značená. Zastavili jsme asi dvěstě metrů před klášterem a zbytek došli pěšky. Samotný klášter, nebo spíše již jen kostel obehnaný zídkou se sochami členů rodiny blahoslavené Salomei a Henryka Brodatego, domek kaplana a trojice umělých jeskyní s poustevnou, se nachází ve velmi pěkném prostředí mezi lesy na vápencových skalách a je oblíbeným poutním a výletním místem.

Hned za vstupní branou stojí sloup blahoslavené Salomei se sochou sv. Kláry a s nezvyklým typem slunečních hodin (obr. 19). Na stuze, ovíjející sloup, jsou provedeny hluboké svislé rýhy. Čas je určen rýhou, která je plně osvícená Sluncem a bez stínu. Pod některými rýhami jsou patrné římské číslice. Otázkou je, jaký čas jednotlivé značky ukazovaly. Jelikož v těsném sousedství probíhala mše, nemohli jsme tyto hodiny důkladně prozkoumat.

Hned o pár metrů dále, po pravé straně od vstupu do kostela na obvodové zdi, se nachází číselník hodin na podstavci sochy Boleslawa Wstydliwego z 2. pol. 18. století. Na číselníku 30 krát 40 cm se dochovaly pouze čtyři špatně čitelné rysky a otvor paty ukazatele s jeho zbytkem. Tvar ukazatele nelze odvodit.

Obr. 9 — Socha Bolesława Wstydliwego se zbytkem slunečních hodin na podstavci.

Další hodiny jsou k vidění za kostelem po pravé straně. Číselník ve tvaru srdce, jako přívěšek na podstavci sochy sv. Jadwigy Slezské, držící v rukou model kostela. Na číselníku se dochovala pouze stuha po jeho obvodě, na které byly patrně hodinové značky a otvor pro kolmý ukazatel v jeho středu. Azimut číselníku jsem odvodil na 30°. Trochu matoucí je ale text na podstavci, který uvádí jméno blahoslavené Kunegundy, ženy Bolesawa Wstydiwego. Její socha se ale nachází na jiném stanovišti.

Podle dostupných podkladů zde měly být ještě jedny hodiny na podstavci sochy Henrika Brodatego, po levé straně za kostelem. Ty jsme také nakonec objevili. Z původních hodin se dochovalo pouze několik hodinových čar s označením 8, 9 a 10 hodiny a s dalším dělením. Stopy po ukazateli nejsou patrné.

Poslední etapa našeho putování byla v Krakowě. Z časových důvodů jsme vynechali sluneční hodiny u astronomické observatoře a zamířili rovnou ke klášteru, do krakowské čtvrti Mogiła. Zde jsme znovu zjistili, že se hodiny nacházejí ve vnitřních prostorách, kam jsme jako civilové neměli přístup. Samozřejmě jsme se nevzdávali a hledali nějaké místo, ze kterého by bylo alespoň trochu na hodiny vidět. Přes zeď se nám nakonec povedlo hodiny trochu zahlédnout a vyfotit. Hodiny jsou poměrně velké, na jižní stěně a ve velmi dobrém stavu s textem na stuze.

Dalšími hodinami měly být hodiny na jižní stěně kostela sv. Floriána. Hodiny se nám ale nepodařilo najít, pouze v jednom místě se nacházel prázdný vystouplý obdélník na nové omítce. Trochu zklamaní jsme se vydali na asi kilometr vzdálené náměstí k Mariackému kostelu, kde jsou na kapli sv. Jana Nepomucena pěkné svislé sluneční hodiny, údajně z roku 1752, rekonstruované 1954 Tadeuszem Przypkowskim. Číselník je bohatě zdoben, vybaven datovými čarami a texty. Pod těmito hodinami jsme naši pouť za slunečními hodinami ukončili a vydali se se spoustou materiálů a dojmů zpět k domovu.

Obr. 10 — Sluneční hodiny na kapli sv. Jana Nepomucena u Mariackeho kostela.

Závěrem bych zhodnotil celou výpravu jako úspěšnou, až na jeden bod, kdy se nám nepodařilo setkat se zástupcem spolku polských přátel slunečních hodin.

Muzeum v městečku Jędrzejów jsme navštívili proto, že má ve sbírkách více než 500 slunečních hodin a různých astronomických přístrojů. Podle počtu exponátů a jejich hodnoty se jedná o 3. největší gnómonickou sbírku na světě, po sbírkách Planetária v Chicagu a Vědeckého muzea v Oxfordu.

Muzeum bylo založeno v roce 1895. V únoru roku 1962 odkázala své sbírky rodina Przypkowskich státu. Tehdy vzniklo státní muzeum. Tvůrce zárodku muzea je Feliks Przypkowski (1872–1951). Byl milovníkem astronomie a gnómoniky. Po absolvování lékařských studií byl více jak 50 let praktickým lékařem v Jędrzejówě. Od roku 1895 důsledně shromažďoval sluneční hodiny a literaturu vztahující se k jejich stavbě a historii. V Jędrzejówě založil dosud existující astronomickou observatoř. Řídil rovněž meteorologická měření. Zajímal se o numismatiku, mineralogii a shromažďoval rovněž památky svázané s místem a regionem. Nahromaděné sbírky zpřístupnil veřejnosti v roce 1909 v soukromém muzeu. Zanechal po sobě rovněž ohromnou sbírku fotografií.

Jeho sběratelské a vědecké vlohy zdědil jeho syn Tadeusz Przypkowski (1905–1977), znalec historie malířství, bibliofil a milovník heraldiky. Jako znalec a zhotovitel slunečních hodin vytvořil jejich různá provedení, z nichž nejdůležitější je

Obr. 11 — Interiér muzea slunečních hodin v Jędrzejówě.

sedmero hodin pro observatorium v Greenwichi. Díky jeho zásluhám byla sbírka po válce značně rozšířena a získala na publicitě. Od roku 1962 funguje muzeum jako státní. Rodina Przypkowskich si však zachovala vliv na řízení muzea. Po smrti Tadeusze se stal jeho syn Piotr ředitelem této instituce.

Muzeum je umístěno ve dvou budovách na náměstí T. Kościuszki. Jedna z budov byla na počátku 18. století lékárnou, druhá sídlem rodiny Pryzpkowskich. Na ní je kopule astronomické observatoře. Muzeum je otevřeno mimo pondělí každý den od 8 do 15 hodin, v letní sezoně od 8 do 16 hod. Vstupné je 10,– Zł. Délka prohlídky je vymezena na 40 minut. Začátek prohlídky je vždy po půlhodině (v celou hodinu nebo půlhodinu). Myslím, že pro příznivce slunečních hodin je tato doba naprosto nedostačující. Studiu exponátů by bylo vhodné se věnovat několik hodin, možná i dnů.

Jednotlivé sbírky zachycují různorodost zájmů členů rodu. Lze je rozdělit na tyto základní části: astronomie, exlibris a grafika, gastronomie, lékařství, malířství a historie, muzejní knihovna.

Obr. 12 — Sbírky muzea obsahují velké množství typů slunečních hodin, často historicky cenných.

Velkou část muzea tvoří kolekce slunečních hodin. Jsou zde zastoupeny reprezentanti téměř všech typů přístrojů užívaných od XV. století do nejnovější doby. Vystaveny jsou přístroje astronomické, gnómonické i obecně chronometrické — klepsydry, ohňové hodiny (svíčkové, knotové) mechanické hodiny.

Ozdobu této kolekce tvoří sluneční hodiny z XVI. století zhotovené Erasmem Habermelem, polední hodiny s kanónem z r. 1654 (střílející z něho v poledne), kyvadlové hodiny ze XVII. století z kolekce krále Jana Kazimíra (z Paříže, r. 1654) a další. V muzeu jsou vystaveny gnómonické návrhy slunečních hodin, teoretické práce i historické modely. Na panelech jsou zde vysvětleny základní principy funkce slunečních hodin.

V knihovně je okolo 600 svazků knih. Mezi nejcennější díla patří vydání Koperníkova *De revolutionimbus orbium coelestium* z r. 1566. Jsou zde díla vědců zvučných jmen, např. Reného Descarta. Část knižní sbírky věnovaná gnómonice je jednou z nejcennějších souborů tohoto typu na světě.

Z muzea si lze odvézt dva typy slunečních hodin, vodorovné nebo svislé. Obojí jsou navrženy pro jižní orientaci. Pro jakou zeměpisnou šířku jsou určeny, nevím. Jejich cena je 130,– Zł. Pokud byste chtěli zakoupit přívěsek v podobě slunečních hodin, i to je zde možné.

Další informace hledejte na stránkách [1] a dalších odkazech tam uvedených.

[1] Nosek, M. *Jedrzejow* [online]. [cit. 2008-05-25]. ⟨http://www.sweb.cz/hodiny/polsko.html#zalozka_Jedrzejow⟩.

Sluneční hodiny Kutnohorska 12. dubna 2008

Jan Trebichavský

Tmavá obloha ráno nevěstila nic dobrého a drobný déšť se z ní spustil ve chvíli, kde se účastníci začali sjíždět do Nových Dvorů. Přesto však v 10 hodin byli všichni na místě a vytvořili zdánlivě nesourodou společnost patnácti osob obého pohlaví a věku od tří do 69 let.

V Nových Dvorech jsme si prohlédli na raně barokním zámku jihovýchodní sluneční hodiny (ev. č. KH 5), jejichž výtvarné provedení odpovídá možnému vzniku v 2. pol. 18. st., kdy zámek koupil hrabě Chotek.

Další zastávka byla v areálu velkolepého empírového zámku Kačina, kde v parčíku za bývalou kočárovnou jsou bronzové vodorovné hodiny na cihlovém sloupku (KH 19), chybně orientované o 30° k východu.

Následovala ves Rohozec, kde při vjezdu do obce, vlevo od silnice, jsou na domě č. 33 prosté jižní sluneční hodiny.

V Žehušicích se dochovala torza dvou hodin. První (KH 11/2) jsou ve štítě bývalého pivovaru čp. 19 (za tvrzí) a zůstal z nich jen polos. Druhé (KH 11/1) lze spatřit na jjz. stěně domu v předzámčí a s postupem let se mění v nezřetelný zbytek. Zde jsme již mohli schovat deštníky, protože obloha se protrahala.

Zachované sluneční hodiny jsou na jižní zdi obecního úřadu čp. 62 v Chotusicích (KH 4); jejich stáří je asi 100 let. Mimořádně jsme udělali zastávku v obci Jakub, u nádherného románského kostela Sv. Jakuba, z roku 1165, s unikátní vnější sochařskou výzdobou.

V Církvicích jsme si připomněli podle dobové fotografie zaniklé jižní hodiny na škole čp. 202 (KH 24) a shlédli jednoduché JJV hodiny domě čp. 66 (KH 18).

V Čáslavi jsme vyšli z parkoviště na náměstí a absolvovali menší okruh historickým jádrem. Kolem románského kostela Sv. Petra jsme došli k prvním slunečním hodinám (KH 2/2) na domku čp. 189, v ulici Na Fortně. Jsou to výtvarně zajímavé, malované, asi 180 let staré jjv. hodiny. Pod hradbami jsme prošli zpět na náměstí. Druhé hodiny jsou v Palackého ulici čp. 161 (KH 2/1); stáří těchto hodin je odhadováno na 200 let, jsou však po renovaci gnómoncky chybné.

Dvoje sluneční hodiny jsou rovněž v Křeseticích. První (s obrazem vinných listů) jsou na konci obce na domě čp. 156 (KH 36). Druhé (KH 37) se třemi datovými křivkami lze spatřit v obci, na domě čp. 119, poblíž zámečku.

V Malešově jsou na domě čp. 150 (poblíž železničního přejezdu) jihovýchodní hodiny (KH 29) se dvěma polosy a dvěma číselníky a také jihozápadní hodiny (KH 16); obojí zdobené latinskými nápisy (viz obr. 13).

Obr. 13 — Jedny ze slunečních hodin na domě čp. 150 v Malešově (KH 16). Latinský nápis „VITA QUAM SIT BREVIS SI MUL COGITA“ znamená „Mysli na to, jak je život krátký“. Foto Miroslav Brož.

Poslední zastávkou byla Kutná Hora. Z parkoviště Na Valech jsme procházeli částí historického jádra. U gotické kamenné kašny je dům čp. 122, kde podle dobové pohlednice byly zsz. sluneční hodiny, dnes již zaniklé. Na Komenského náměstí lze vidět nad terasou domu čp. 76 sluneční hodiny (KH 21) na jižní zdi. Po krátkém nahlédnutí na nádvoří Vlašsského dvora a do parku s vyhlídkou na chrám Sv. Barbory jsme sešli na Jánské náměstí, kde na renovovaném secesním domě čp. 521 jsou více než sto let staré jihovýchodní hodiny (KH 15). V erbu vedle nich je těsnopisem psaný nápis.

Závěrem se účastníci výletu občerstvli pozdním obědem a předběžně se dohodli na zaměření podzimního výletu (Praha, Kolínsko nebo Královéhradecko.)

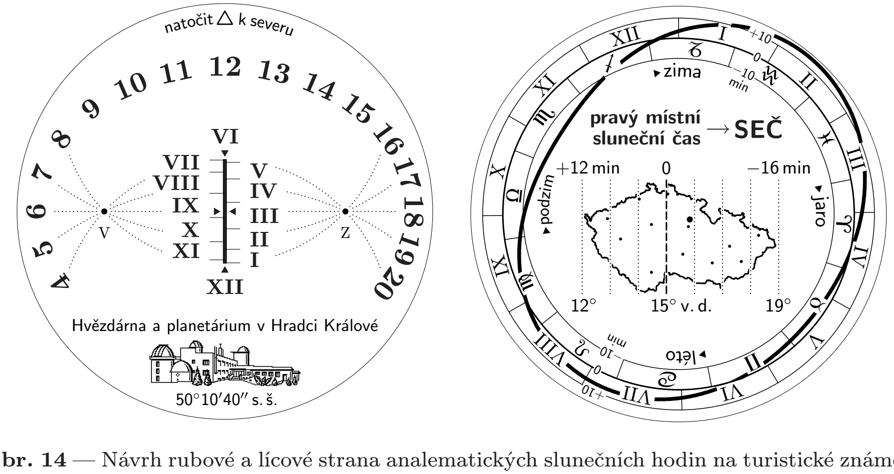
Sluneční hodiny jako turistická známka

Miroslav Brož, František Hovorka

Počátkem letošního roku si Hvězdárna a planetárium v Hradci Králové nechala ve firmě Turistické známky s. r. o. v Rýmařově vyrobit podle vlastního návrhu větší množství přenosných analematických slunečních hodin. Jedná se o dřevěné kotoučky s vypalovaným číselníkem, přičemž na boku je připraven špendlík sloužící jako pohyblivý ukazatel. Svou podobou zapadají do velké série dřevěných turistických známek, liší se pouze zaoblenou hranou. Obdobné hodiny vlastně vznikly už před dvěma roky jako rubová strana turistické známky brněnské hvězdárny a jako samostatný suvenýr Turistických známek. Ukazoval je jejich konstruktér a spoluautor Pavel Marek na setkání v Hradci Králové v roce 2006. Náš gnómonický a grafický návrh odráží podobu venkovních analematických hodin, které jsme vytvořili před hradeckou hvězdárnou (ev. č. HK 42); jejich konstrukci jsme podrobně popsali v Povětroni 5/2006.

Lícová strana obsahuje (viz obr. 14a): eliptický číselník analematických hodin (s arabskými číslicemi), datovou úsečku s kalendáriem (s římskými číslicemi měsíců), trojúhelníčky značící slunovraty a rovnodennosti, tečkované části Lambertových kružnic, které slouží k určování východu a západu Slunce, obrázek hradecké hvězdárny a její zeměpisnou šířku, pro kterou jsou hodiny konstruovány. Při navrhování jsme samozřejmě museli zohlednit malé rozměry hodin a technologii výroby. Pro vypalování do dřeva je totiž třeba nejprve přesně a jemně gravírovat kovovou vypalovací raznici, čili nebylo možné použít příliš malé písmo nebo vlasové linie.

Rubová strana (obr. 14b) slouží k převodu pravého místního slunečního času (PMSČ) na čas středoevropský (SEČ). Na mapce České republiky jsou vyznačeny zeměpisné délky s příslušnou *opravou času o délku*, která vyplývá z rozdílu zeměpisných délek stanoviště a středního (15.) poledníku časového pásma. Pro snazší orientaci jsou vyznačeny též polohy krajských měst. Opravu o *časovou rovnici*, tj. opravu vyplývající z nerovnoměrného eliptického pohybu Země kolem Slunce během roku a jeho průmětu do roviny rovníku, jsme znázornili netradičně: jako polární graf s datovou osou ve tvaru kružnice. Časová rovnice tak získala tvar „brambory" a lze si ji dobře zapamatovat, možná snadněji než superpozici dvou sinusovek. Dále jsou vyznačeny začátky měsíců, okamžiky vstupů Slunce do znamení zvířetníku a začátky ročních období. Údaje oprav na této straně jsou obecně platné, lze je použít pro libovolné sluneční hodiny na území České republiky. Obě opravy, které nabývají hodnot několika minut, mohou být užitečné především pro uživatele velkých slunečních hodin, jejichž rozlišovací schopnost je podstatně větší.



Obr. 14 — Návrh rubové a lícové strana analematických slunečních hodin na turistické známce.

Použití hodin je jednoduché: na slunném stanovišti umístíme kotouček vodorovně a natočíme ho podle značky k severu. Špendlík zapíchneme svisle na takové místo datové úsečky, které nejlépe odpovídá aktuálnímu datu (v měsíci roku). Podle stínu odečteme PMSČ. Na rubové straně zjistíme obě opravy v minutách (o rozdíl zeměpisných délek a o časovou rovnici) a připočteme je k PMSČ, čímž získáme SEČ. Je-li v platnosti letní čas (od poslední neděle v březnu do poslední neděle v září), přičteme jednu hodinu a výsledkem je středoevropský letní čas (SELČ).

Čas východu a západu Slunce můžeme odhadnout podle tečkovaných částí křivek spojujících data na datové úsečce s hodinami na eliptickém číselníku.

Známe-li čas z jiných hodin, můžeme sluneční hodiny použít i obráceným způsobem — jako jednoduchý kompas. Kotouček hodin opět umístíme vodorovně, špendlík zapíchneme svisle na příslušné datum na datové úsečce a natočíme ho tak, aby stín špendlíku ukazoval aktuální čas, přesněji čas s odečtenými oběma opravami. Šipka v nápisu „natočit k severu“ nám ukazuje směr k severu. V době platnosti letního času nesmíme ještě zapomenout odečíst jednu hodinu.

Obr. 15 — Výsledná podoba turistické známky s hodinami a její použití.

Za leskem jihočeských krás

Petr Horálek

Jarní období stejně jako ta podzimní „probouzí“ k největší aktivitě hledače českých vltavínů. Není se čemu divit — nazelenalá přírodní skla jsou bezpochyby na území jižních Čech a jižní Moravy tím nejpozoruhodnějším bohatstvím, které nám příroda nadělila. A když k tomu příroda nadělí i příhodné počasí, je jasné, že bude o nezvyklý zážitek postaráno.

Letošní jaro jsme se na vltavíny vydali hned dvakrát. První expedici 18. a 19. dubna tvořila šestice nadšenců, mezi které patřil Martin Lehký, jeho přítelkyně Míša, Petr Komárek, Hanka Dvořáková, Adleska Šrutová a já. Cestu z Pardubic značně zpomalovala dopravní euforie víkendových chatařů, ale nakonec jsme ve zdraví dorazili na kýžené místo v Sedle u Komářic.

Díky velkorysému pohostinství pana Františka Vaclíka z JihoČASu, který je nejen astronomem, ale též hledač vltavínů a výborný pamětník, jsme měli o ubytování postaráno. Za „pardubický perník“ jsme tedy strávili víkend v jeho malebné chaloupce na okraji vísky Sedlo, odkud jsme vyráželi na osvědčenou vltavínovou lokalitu v oblasti mezi Nesmění, Ločenicemi a Chlumem.

Pan Vaclík se dokonce domnívá, že tato oblast je přímo pádová, neboli „střepy“ katastrofy, která nastala přibližně před 14,5 milióny lety v Bavorsku, popadaly právě sem. V obecném případě se totiž vltavínové lokality v průběhu tisíciletí přesouvaly nejrůznějšími vlivy (erozí, pohybem ledovců, říčními toky, . . .). Proto většina vltavínových lokalit je od původní pádové oblasti poměrně daleko.

Navíc se za milióny let dostala vltavínová vrstva do jisté hloubky pod zem (v řádech jednotek metrů) a jen několika způsoby se k nim současný člověk může dostat. Buďto otevřením lomu (pískovny) nebo vlastnoručním kopání do nesnesitelných hloubek (což je ovšem zákonem zakázané a bere se to jako přestupek), anebo povrchovým průzkumem zoraných polí, kde se díky orbě dostávají vltavíny postupně k povrchu.

Bohužel nás už první den rozesmutnil opravdu špatným stavem polí a velkým počtem stop, které tu zanechaly boty desítek hledačů před námi. Opravdu stopa vedle stopy. Pokusili jsme se dokonce o návštěvu další dvou lokalit, a to na kopci kousek od Pašinovic nebo na místě poblíž vesnice Milíkovice. Nakonec si přeci jen každý v průběhu víkendu našel střípek toho přírodního skla a byť to byly jen malé nálezy, udělaly radost každému.

Obr. 16 — Hledání vltavínů na poli u Ločenic.

Druhá výprava byla v podstatě nevyhnutelná — především bylo naprosto skvostné počasí, pole byla opláchnutá dvěma mohutnými dešti a navíc byl čtvrtek 8. května, státní svátek. Cestovali jsme ve dvou, já a Petr Komárek. Vzhledem k raketově rostoucím cenám benzínu jsme zvolili levné ubytování pod stanem a táboření na kraji lesíka mezi Malčí a Besednicí. Ten večer jsme už nic nehledali, neb Slunce klesalo k západu.

V pátek 9. května okolo jedenácté dopolední však začalo zlaté období hledání. Sluníčko bylo vysoko a stíny ustoupily z brázd. Pouhou chůzí podél brázd jsem našel za následující čtyři hodiny neuvěřitelných dvacet zelených tektitů a i Petr, který to hned zpočátku pro své nemocné oči vzdal, si přišel na své. Když už jsem i já začínal mít dost a vyhlásil jsem odchod na odpolední jídlo, on doslova zakopl o další vltavín. A jaký!

Sobotu jsme vyhradili výpravě na Kleť, kterou se nám kvůli nepřízni počasí nepodařilo zdolat v roce 2007. My, jako správní astronomové, jsme samozřejmě šli pěšky pod lanovkou a místo do hospody jsme zapadli do observatoře. Po čtvrthodinovém čekání na průvodkyni jsme s překvapením zjistili, že to je studentka Masarykovy univerzity v Brně, skoro-absolventka oboru astrofyziky, a tudíž jsme si pěkně popovídali.

Po prohlídce observatoře nezbývalo, než se rozhlédnout z Josefovy rozhledny (z asi 1 100 metrů nad mořem). V dáli bylo možné spatřit Boubín, Šumavu, Lipno a žel i Temelín. Za hodně dobrých podmínek se však daří spatřit i Alpy. A taky že jo! Fotili jsme, točili jsme, kochali se, jak jen to šlo. Tmavé stíny kumulovitých oblaků se táhly po ohromné krajině jako rejnoci pod mořem.

Cestou domů jsme se ještě přibrzdili na několika lokalitách, takže mé skóre z posledních dvou dnů čítalo neuvěřitelných 37 vltavínů. Petr, šťasten ze včerejšího nálezu, už dnes ani nehledal. Jen se kochal krásným západem Slunce z Nesměni a čekal, až mě soumrak skolí. Nakonec jsme, po vydatné večeři v autě, nastartovali burácející motor a při pohledu na Měsíc vzdalující se od Marsu jsme vyrazili směr Třeboň, Jindřichův Hradec, Pelhřimov a Hliníkův Humpolec do Pardubic.

Obr. 17 — „Úlovky“ z 9. května.

Obr. 18 — Velmi pěkné sluneční hodiny na kostele ve Wodzisławi. K článku na str. 18.

Obr. 19 — (a) Sloup blahoslavené Salomei se sochou sv. Kláry a s nezvyklým typem slunečních hodin. Sloup byl kolem roku 1900 poškozen vichřicí. (b) — Detail slunečních hodin na sloupu; jsou patrné i zbytky římských číslic.